Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции. Производная от функции заданной неявно. Частные производные различных порядков
Производная сложной функции

Семинар 23

Предположим, что в уравнении z=F(u,v) (1) u,v - функции независимых переменных x,y: $u=\varphi(x,y);\ v=\psi(x,y)$ (2). В этом случае z есть сложная функция от аргументов x,y.

Если в общем случае z можно выразить через x,y непосредственно, а именно: $z=F(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ (3), то частные производные находятся непосредственно.

Предположим, что $F(u,v),\varphi(x,y),\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Необходимо вычислить $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ исходя из уравнений (1),(2), не пользуясь уравнением (3).

Даем аргументу *x* приращение Δx, оставляя *y* неизменной, тогда *u,v* получают приращения $\Delta_x u,\Delta_y v$. Но если *u,v* получают приращения $\Delta_x u,\Delta_y v$, то и функция *z=F(u,v)* получит приращение Δz , определяемое следующей формулой:

$$\Delta z=\frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v+\gamma_1\Delta_x u+\gamma_2\Delta_x v$$

Разделим обе части равенства на Δx : $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$

Если $\Delta_x u\to 0,\Delta_x v\to 0$ (в силу непрерывности функций u,v), то $\gamma_1\to 0,\gamma_2\to 0$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x};\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x};\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\partial x};\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1=0;\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2=0$$

. Следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\quad(4)$$

аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\quad(4')$$

Полная производная.

Если задана функция *z=F(x,y,u,v)*, где *y,u,v* - в свою очередь зависят от одного аргумента *x* $y = f(x), u = \varphi(x), v = \psi(x)$, то по сути z - функция от одного аргумента. Тогда можно рассмотреть вопрос о нахождении $\frac{dz}{dx}$

Эта производная вычисляется по формуле $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

Но так как *y,u,v* – функции только одного переменного x, то частные производные обращаются в обыкновенные, и кроме того $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, поэтому $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$. Это формула для вычисления полной производной $\frac{dz}{dx}$

Полный дифференциал сложной функции.

Найдем полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (1),(2).

Формула полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ (*)

Подставляя выражения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (4),(4') получим

$$dz = (\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

Выполнив преобразование в правой части, получим

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + \frac{\partial F}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)$$

(5) Но так как $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv \end{cases}$ (6), то

равенство (5) с учетом равенства (6) можно переписать так:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv$$ (7) или $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$ (7')

Производная от функции заданной неявно

Начнем рассмотрение этого вопроса с неявной функции одного переменного. Пусть некоторая функция определена уравнением

F(x,y)=0

Теорема. Пусть непрерывная функция *y* от *x* задана уравнением (1), где $F(x,y), F_x^{'}(x,y), F_y^{'}(x,y)$ - непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению (1); кроме того, в этой точке $F_y^{'}(x,y) \neq 0$. Тогда функция *y* от *x* имеет производную $y_x^{'} = -\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$ (2) Для $z_x^{'}, z_y^{'}$ имеют место формулы $z_x^{'} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $z_y^{'} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Предполагается, что $F_z^{'}(x,y,z) \neq 0$

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Частные производные различных порядков

Рассмотрим функцию z=f(x,y). $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y); \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$ - функции переменных x,y, от которых можно снова находить частные производные. Частных производных второго порядка от функций двух переменных четыре, так как каждую из функций $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y); \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$ можно дифференцировать как по x, так и по y.

Обозначение:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}'(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x, затем по y.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y, затем по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получаем частные производные третьего порядка. Их будет восемь $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \ldots, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. В общем случае частная производная n- го порядка есть первая производная от производной (n-1) порядка. Формула $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ - соответствует производной n-го порядка. Функция z сначала p раз дифференцируется по x, затем n-p раз по y.

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Примеры с решениями

1. Найти производные сложных функций

1) $z = \ln(u^2 + v),\ u = e^{x+y^2};\ v = x^2 + y$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v};\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v};\ \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2};\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

Используя формулы (4),(4') получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2} + x);\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2} + 1);$$

2) $z = e^{x^2+y^2},\ x = a\cos t,\ y = a\sin t$. Найти $\frac{dz}{dt}$

Решение. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = e^{x^2+y^2}2x(-a\sin t) + e^{x^2+y^2}2y(a\cos t) = 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t)$$

Выразив x,y через t, получаем $\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a\sin t\cos t - a\cos t\sin t) = 0$

2. Найти полный дифференциал сложной функции $z = u^2\cdot v^3;\ u = x^2\sin y;\ v = x^3e^y$

Решение

Имеем

$$dz = 2uv^3du + 3u^2v^2dv = 2uv^3(2x\sin y dx + x^2\cos y dy) + 3u^2v^2(3x^2e^y dx + x^3e^y dy)$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$dz = (2uv^3 2x\sin y dx + 3u^2v^2)dx + (2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

3. Найти производные функций, заданных неявно

1) $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$. Дифференцируя эту функцию как явную (после разрешения уравнения относительно z) получили бы тот же результат

2) $e \quad + x^2 y + z + 5 = 0$ Решение

$$F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5; \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

4. Найти производные различных порядков

1) $z = x^2 y + y^3$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

2) $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2$$

3) $u = z^2 e^{x+y^2}$ Найти $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти производные сложных функций

1)Найти $\frac{dz}{dt}, если \rightarrow z = \frac{x}{y}; x = e^t; y = \ln t$;

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}, если \rightarrow z = u + v + uv; u = x^2 - y^2; v = e^{xy}$

3) Найти $\frac{dz}{dx}, если \rightarrow z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}; x = y\cos\alpha$

2. Найти производные от функций заданных неявно

1) Функция z переменных *x,y* задана уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если *xcosy+ycosz+zcosx=1*

3) Функция z переменных x,y задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 0$. Найти для системы значений *x=-1,y=0,z=1*

3. Найти производные различных порядков

1) Найти производные второго порядка для функций $z = \ln(x^2 + y); z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$

2) $z = y\ln x.$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

3) $z = \ln tg(x+y).$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

4) $z = \sin(x + \cos y).$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$