Функция нескольких переменных. Общие свойства. Непрерывность функции. Линии уровня, поверхности уровня.

Семинар 21

Определение 1

Если каждой паре (x,y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x,y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то z есть функция двух независимых переменных x,y, определенных в области D.

Обозначение: z=f(x,y), z=F(x,y), и так далее.

Способы задания функции: аналитический, табличный, графический.

Определение 2

Совокупность пар (x,y) значений x,y, при которых определена функция z=f(x,y), называется областью определения или областью существования этой функции.

Пусть дана функция z=f(x,y), определенная в некоторой области G плоскости OXY. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0,y_0)$, лежащую в области G или на ее границе.

Определение 3

Число A называется пределом функции f(x,y) при стремлении точки M(x,y) к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число r>0, что для всех точек M(x,y), для которых выполняется неравенство $|MM_0| < r$ имеет место неравенство

Определение 4

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x,y). Функция z=f(x,y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ (1)

Причем точка M(x,y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N_0(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции z=f(x,y). Условие (1) может не выполняться, например, в следующих случаях:

1) z=f(x,y) определена во всех точках некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$, за исключением самой точки $N_0(x_0, y_0)$.

2) z=f(x,y) определена во всех точках окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$, но не существует $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y)$

3) z=f(x,y) определена во всех точках окрестности точки $N_0(x_0, y_0)$ и существует $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y)$, но $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$

Определение 5

Линией уровня функции z=f(x,y) называется линия z=f(x,y)=c на плоскости OXY, в точках которой функция сохраняет постоянное значение z=c.

Определение 6

Поверхностью уровня функции u=f(x,y,z) называется поверхность u=f(x,y,z)=c плоскости, в точках которой функция сохраняет постоянное значение u=c.

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Решение.

Функция принимает действительные значения при условии $a^2-x^2-y^2\ge 0$ или $x^2+y^2\le a^2$, т. е. областью определения данной функции является круг радиуса а с центром в начале координат, включая граничную окружность.

2. Найти область определения функции $u=\arcsin\frac{x}{y^2}$.

Решение.

Функция определена, если $y\ne 0; -1\le\frac{x}{y^2}\le 1\Rightarrow -y^2\le x\le y^2$. Областью определения функции является плоскости, заключенная между двумя параболами $y^2=x; y^2=-x$, за исключением точки O(0,0).

3. Найти область определения функции $u=\ln(2z^2-6x^2-3y^2-6)$.

Решение.

Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при $2z^2-6x^2-3y^2-6>0\Rightarrow\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}<-1$, т. е. область определения – часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида.

4. Найти линии уровня функции $u = x^2 + y^2$

Решение.

Уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C(C > 0)$.

Придавая С различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат.

5. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$

Решение.

Уравнение семейства поверхностей имеет вид $x^2 + z^2 - y^2 = C$.

Если С=0, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ - конус.

Если С>0, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство однополостных гиперболоидов;

Если С<0, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство двуполостных гиперболоидов;

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти области определения функции

$$1) u = \arcsin(x + y);\ldots 2) u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};\ldots 3) u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)};\ldots 4) u = \ln(-x + y);\ldots 5) u = \sqrt{x + y + z}$$

2. Найти линии уровня функций:

$$1) z = 2x + y;\ldots 2) z = x / y;\ldots 3) z = \ln\sqrt{\frac{y}{x}};\ldots 4) z = \frac{\sqrt{x}}{x};\ldots 5) z = e^{xy}$$

3. Найти поверхности уровня функций:

$$u = x + y + 3z;\ldots 2) u = x^2 + y^2 + z^2;\ldots 3) u = x^2 - y^2 - z^2$$