Частное и полное приращение функции. Частные производные. Полный дифференциал. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Семинар 22

Частные приращения функции двух переменных выражаются формулами:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \quad (1)$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \quad (2)$$

Сообщая аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy, получим для z новое приращение Δz , которое называется полным приращением функции и определяется формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$

В общем случае, полное приращение не равно сумме частных приращений, то есть

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Частные производные функций нескольких переменных

Определение

Частной производной по x от функции z=f(x,y) называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при $\Delta x \to 0$

Обозначения: $z'_x, f'_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$

Таким образом, по определению $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

Аналогично определяется и обозначается частная производная по y, то есть

$z'_y, f'_y(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

Заметим, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x. Тогда определения частных производных можно сформулировать так:

Частной производной по x от функции *z=f(x,y)* называется производная по x, вычисленная в предположении, что *y=const*.

Частной производной по y от функции *z=f(x,y)* называется производная по y, вычисленная в предположении, что *x=const.*

Полное приращение и полный дифференциал

Полное приращение выражается для z=f(x,y) следующей формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \quad (1)$$

<u>Определение</u>

Функция z=f(x,y), полное приращение Δz которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно $\Delta x, \Delta y$, и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho$, называется <u>дифференцируемой в данной точке</u>, а линейная часть приращения называется полным дифференциалам и обозначается через dz или df.

Если функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в данной точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Имеет место $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta\rho$ можно написать следующее приближенное равенство:

$\Delta z \approx dz$

Приращения независимых переменных $\Delta x, \Delta y$ называем дифференциалами независимых переменных x,y и обозначаем dx,dy соответственно. Тогда выражение полного дифференциала принимает вид $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция z=f(x,y) дифференцируема в точке (x,y). Найдем полное приращение этой функции $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, тогда $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$ (1). Мы имеем приближенную формулу $\Delta z \approx dz$ (2), где $dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ (3).

Подставляя в формулу (1) вместо Δz выражение dz получаем приближенную формулу $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$ (4) верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta x, \Delta y$.

Примеры с решениями

1. Найти частные и полное приращение функции z=xy

Решение

z=xy

$$\Delta_x z = (x+\Delta x) - xy = y\Delta x$$

$$\Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

2. Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 \sin y$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 2x\sin y; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

2) $z = x^y$

Решение

$$z = x^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

3) $z = e^{x^2+y^2}$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

4) $u = x^2 + y^2 + xtz^3$

Решение

$$u = x^2 + y^2 + xtz^3 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3$$

3. Найти дифференциалы функций:

1) $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,$$

Следовательно,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

4. Вычислить приближенно $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ **, исходя из значения функции** $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ **при** $x = \pi/2 \approx 1{,}571, y = 0$

Решение.

Искомое число есть наращенное значение функции z при $\Delta x = 0{,}021, \Delta y = 0{,}015$. Найдем значение z при $x = \pi/2, y = 0$; имеем $z = \sqrt{\sin^2(\pi/2) + 8e^0} = 3$. Находим приращение функции:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\sin 2x\Delta x + 8e^y\Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} = \frac{8\cdot 0{,}015}{6} = 0{,}02$$, следовательно

$$\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}} \approx 3{,}02$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти частные и полное приращение функций:

$$1) z=\ln(x+y);\ldots 2) z=e^{x}(\cos y+x\sin y);\ldots 3) u=e^{xyz}$$

2. Найти частные производные функций:

$$z=\frac{x}{y};\ z=\ln(x^2+y^2)\cdot(x+y);\ z=Arcctg\frac{x}{y};\ z=e^{tg\frac{x}{y}};\ z=\sqrt{xy+\frac{x}{y}};\ z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right);\ u=x+\frac{x-y}{y-z};$$

$$u=\ln(xy+xz+yz);\ u=e^{\sin(xyz)};\quad u=\sin\frac{x+y+z}{xyz}$$

3. Найти дифференциалы функций:

$$1) z=\ln tg(y/x);\ldots 2) z=\sin(x^2+y^2);\ldots 3) u=\ln\left(z+\sqrt{x^2+y^2}\right);\ldots 4) u=xyze^{x+y+z}$$

4. Вычислить приближенно:

$a)(1{,}02)^3\bullet(0{,}97)^2$ $\quad b)\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$ $\quad$ c) $\sqrt{5e^{0{,}02}+2{,}03^2}$