Семинар 17. Определенный интеграл. Основные свойства и теоремы. Формула Ньютона Лейбница

Предел *S* интегральной суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$ для функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b],* когда число *n* отрезков неограниченно возрастает, а наибольшая длина отрезка $\Delta x_k \to 0$ называют определенным интегралом от функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b].*

Обозначение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$

a– нижний предел интегрирования;
b – верхний предел интегрирования;
[a,b] – отрезок интегрирования;
f(x) – подынтегральная функция;
x – переменная интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление интеграла основано на применении формулы Ньютона-Лейбница

Пусть *f(x)* – интегрируема на отрезке *[a,b]* и *F(x)* – одна из первообразных функции *f(x),* то есть *f(x)=F'(x).* Тогда приращение первообразной на отрезке *[a,b],* то есть *F(b)-F(a)* равно значению определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Другая форма $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ -двойная подстановка от *a* до *b*

Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла исходим из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ (1), где *f(x)* – непрерывна на отрезке *[a,b]* , *f(x)=F'(x).*

I. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \ldots = \int_a^b f(u)du$$

II. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0, то есть $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

III. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный.

Действительно, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (1), получим $$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

IV. Если отрезок интегрирования *[a,b]* разбить на конечное число частичных отрезков, то определенный интеграл, взятый по отрезку *[a,b]* равен сумме определенных интегралов, взятых по всем частичным отрезкам.

Пусть $[a,b,]=[a,c]\cup[c,b]$, где $a\le c\le b$. Полагая *F'(x)=f(x)*

$$\int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)=[F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)]=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad (3)$$

V. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_b^a Af(x)dx = AF(x)\big|_a^b \; AF(b)-AF(a)=A[F(b)-F(a)]=A\int_a^b f(x)dx$$

VI. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b[f(x)+g(x)-h(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\int_a^b h(x)dx$$

VII. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

Пусть $f(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$ Так как F'(x)=f(x) ≥ 0, то F(x) – неубывающая функция. В таком случае при $b \geq 0$ имеем $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$

VIII. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать поэлементно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Пуст $f(x) \leq g(x)$ при $a \leq x \leq b$, *f(x),g(x)* – непрерывные функции на ьотрезке *[a,b].*

Так как $g(x) - f(x) \geq 0$, то в силу свойств **VI** и **VIII** имеем

$\int\limits_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, отсюда $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

Примеры с решениями

1) **Вычислить интеграл** $\int\limits_0^1 x^2 dx$ **как предел интегральной суммы.**

Решение

Здесь $f(x) = x^2, a = 0, b = 1;$ Разделим отрезок [0;1] на *n* конгруэнтных частей, тогда $\Delta x_k = (b-a)/n = 1/n,$ и выберем $\gamma_k = x_k$

Имеем $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1;$

$f(\gamma_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2; f(\gamma_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2; \dots, f(\gamma_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\gamma_k)\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$, следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{1}{3}$$

(Здесь использована формула суммы квадратов натуральных чисел)

2) Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ **по формуле Ньютона-Лейбница**

Решение. Имеем $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \,|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

3)Оценить интеграл $\int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Решение. Так как $|\cos x| \le 1$, то при x>10 получим неравенство $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 10^{-2}$

Следовательно, $\left|\int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 8 \cdot 10^{-2} < 10^{-1} = 0{,}1.$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x dx$ как предел интегральной суммы.

2. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^x dx$ как предел интегральной суммы.

3. Оценить интеграл $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$

4. Оценить интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}$

5. Вычислить интегралы

$$1)\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4};..2)\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2};..3)\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx;..4)\int_0^{\pi/3}\cos^3 x\sin 2xdx;..\int_0^{\pi/4}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$$