

**Приложения определенного интеграла.
Вычисление объема тела. Вычисление площади
поверхности вращения.**

Семинар 20

1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений.

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси ОХ, может быть выражена как функция от x , то есть в виде $S = S(x), a \leq x \leq b$, то объем части тела, заключенного между перпендикулярными оси ОХ плоскостями $x=a$ и $x=b$, находится по формуле
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной данной непрерывной линией $y = f(x), (f(x) \geq 0)$, отрезком $a \leq x \leq b$ оси ОХ и двумя вертикалями $x=a, x=b$ вычисляется по формуле
$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ криволинейной трапеции $cCDd$, ограниченной данной непрерывной линией $x = g(y), (g(y) \geq 0)$, отрезком $c \leq y \leq d$ оси ОУ и двумя горизонталями $y=c, y=d$ вычисляется по формуле
$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

3. Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x), a \leq x \leq b$ вращается вокруг оси Ох, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле
$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Если задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t); (t_1 \leq t \leq t_2)$, то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Примеры с решениями.

1. Найти объем пирамиды с основанием В и высотой Н

Решение

Ось ОХ перпендикулярна поверхности В и направлена из точки О. S – площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии x от вершины. Так как площади поперечных сечений пирамиды относятся как квадраты расстояний их от вершины, то имеем

$$\frac{S}{B} = \frac{x^2}{H^2} \Rightarrow S = \frac{B}{H^2} x^2 \Rightarrow V = \int_0^H S dx = \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{B}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} BH \quad (\text{известная формула})$$

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{6}{x}, x = 1, x = 6$

Решение

Пределы интегрирования $a=1, b=6$, функция $y = f(x) = \frac{6}{x}$

$$V = \pi \int_1^6 y^2 dx = \pi \int_1^6 \frac{36}{x^2} dx = -36\pi \frac{1}{x} \Big|_1^6 = -36\pi \left(\frac{1}{6} - 1 \right) = 30\pi$$

3. Определить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси ОХ (и ОУ)

Решение.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти объем, образованный вращением вокруг оси ОХ площади ОАВ, равной $\frac{1}{4}$ площади эллипса, и полученный результат удвоить.

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \pi b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{2}{3} \pi a b^2. \text{ Окончательно } V_x = \frac{4}{3} \pi a b^2 \text{ и}$$

соответственно $V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$

4. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x=0$ до $x = \pi/2$

Решение

Находим $y' = 2 \cos 2x$; тогда $S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx$

Произведем замену переменной: $2 \cos 2x = t; -4 \sin 2x = dt; \sin 2x dx = (-1/4) dt$

Найдем пределы интегрирования по t: $x=0 \Rightarrow t=2; x=\pi/2 \Rightarrow t=-2$

Таким образом,

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} [2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)]$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси ОХ фигур, ограниченных линиями

$$1) y = \frac{64}{x^2 + 16}, x^2 = 8y; \dots 2) y^2 = x, x^2 = y; \dots 3) y = \sqrt{x}e^x, x = 1, y = 0; \dots 4) y = x^2 / 2, y = x^3 / 8$$

2. Найти площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси ОХ дуг кривых

$$1) y = 2\cosh(x/2), x = 0; x = 2; \dots 2) y = x^3, x = 0; x = 1/2; \dots 3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \dots 4) x = t - \sin t, y = 1 - \cos t -$$

площадь, образованную вращением одной арки циклоиды).