Семинар 15. Интегрирование иррациональностей

Способы вычисления интегралов, содержащих простейшие иррациональности следующие:

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b},(a \neq 0)$, то применяется подстановка $t=\sqrt[n]{ax+b}$

2. Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ этот интеграл с помощью дополнения выражения ax^2+bx+c до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm x^2}}$

Рассмотрим эти интегралы:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ Применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+a}=t-x$, где t –новая переменная.

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2 \Rightarrow a=t^2-2tx \Rightarrow d(a)=d(t^2-2tx)=2tdt-2xdt-2tdx \Rightarrow tdx=(t-x)dt$$

отсюда $\frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+c$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

3. Интеграл от иррациональности

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Заменой $x-\alpha=\frac{1}{t}$ он сводится к интегралу вида **2)**

4. Интеграл от иррациональности $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Этот интеграл можно разбить на два интеграла, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один интеграл вычисляется как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида **2)**

5. Иррациональность вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx$.Выделяем полный квадрат, а затем полученный интеграл $\int \sqrt{x^2+A} \cdot dx$ вычисляем по методу – интегрирование по частям.

<u>*Замечание*</u>

a) $\int \sqrt{1-x^2}dx = \{x = \sin t, dx = \cos t dt\} = \int \cos^2 t \cdot td = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c = \left\{\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}\right\} =$

$\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$

b) $\int \sqrt{x^2+1} \cdot dx$ При вычислении можно использовать гиперболические функции *x=sht, dx=cht*   (можно *x=tgt,* но более громоздко).

6. Иррациональность вида

$\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, ...)dx$, (1) где *R* – рациональная функция относительно переменной интегрирования *x* и различных радикалов из *x*. Обозначим через *n* – наименьшее кратное всех показателей k,m,… Тогда $\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{m} = r_2, ...$

Замена переменной $x = t^n, dx = nt^{n-1}dt$ позволяет получить интеграл от рациональной функции. Интеграл(1) примет вид $\int R(t^n, t^{r_1}, t^{r_2}, ...)nt^{n-1}dt$

__Замечание__ Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, ...)dx$ вычисляется с помощью

замены $\frac{ax+b}{px+q} = t^n, x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}, dx = \frac{aq - pb}{(a - pt^n)^2} nt^{n-1}dt$

Биноминальный дифференциал – это выражение вида $x^m(a + bx^n)^p dx$, где $a, b \in R, m, n, p \in Q$

__Теорема Чебышева__

Интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ (1) может быть выражен в элементарных функциях только в следующих трех случаях:

1) p – целое число. Тогда выражение $(a + bx^n)^p$ развертывается по формуле бинома Ньютона и подынтегральная функция после раскрытия скобок будет суммой элементов вида cx^k, которые легко интегрируются.

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число. Интеграл (1) приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$, где r – знаменатель дроби *p*

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. Интеграл (1) приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \sqrt[r]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$, где r – знаменатель дроби *p.*

Разложение на простейшие дроби. Общий случай.

Пусть $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,где *P(x)*,*Q(x)* – многочлены

Прежде всего заметим, что если степень *m* числителя *P(x)* больше или равна степени *n* знаменателя *Q(x),* то разделив многочлен *P(x*) на многочлен *Q(x),* получим в частном некоторый многочлен *N(x)* и в остатке многочлен не выше степени *(n-1).*

Следовательно $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$

Для *N(x)* – обычное интегрирование.

Дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь.

Многочлен *Q(x)* может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами:

$Q(x)=(x-\alpha)^k\ldots(x^2+px+q)^t\ldots$, где

α - *к*-кратный корень уравнения *Q(x)=0*, а квадратное уравнение

$x^2+px+q=0 \quad (p^2-4q<0)$

которые служат *t*-кратными сопряженными корнями уравнения *Q(x)=0*

Общая формула разложения дроби следующая:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{B_t x+C_t}{(x^2+px+q)^t}+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}$$

Таким образом, интеграл от всякой рациональной дроби сводится к интегралам от простейших рациональных дробей, которые находятся достаточно легко.

Примеры с решениями

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left\{ t = \sqrt[3]{x+1}, x = t^3 - 1, dx = 3t^2 dt \right\} = \int \frac{(t^3-1)3t^2 dt}{t} = 3\int (t^4 - t)dt = 3(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}) + c = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + c$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} = \ln|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}| + c$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x + \frac{1}{2})^2}} = \arcsin \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + c = \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + c$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ замена $x = t^6, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = 6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t} = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t) - 6\ln|t+1| + c =$$

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

5) $\int \frac{x-3}{x^3 - x} dx \quad \frac{x-3}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x - 3 = A(x^2 - 1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$ Получаем систему

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ -A = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B + -1 \\ C = -2 \end{cases}$$

Более простой метод: При *x=0*, *A*=3. При *x=1*, *B*=-1. При *x*=-1, *C*=-2

Имеем тождество $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}$, тогда

$$\int\frac{x-3}{x^3-x}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+c$$

6) $\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$ $\quad x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-(x+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

Разлагаем дробь на простейшие дроби:

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Коэффициенты *A,B,C,D* находим из тождества

$$12=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$$

Подставляя последовательно *x=0, x=1, x=-1, x=2* получим систему:

$$\begin{cases}12=6B\\12=-2A\\12=-A+B-D\\12=7A+21B+6C+3D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-6\\B=2\\C=4\\D=-4\end{cases}$$ следовательно

$$\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx=-6\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{x-1}{x^2+x+1}=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-6\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\ln|x^2+x+1|$$

$-4\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

7) $\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx$ $\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$

$x^2+x-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1)$ Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+D=0 \\ E=0 \\ 2A+B+D=1\Rightarrow A=-1;B=2;C=1;D=1;E=0 \\ C+E=1 \\ A+-1 \end{cases}$$

,имеем

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\frac{1}{x^2+1}+arctgx-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Интеграл $\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ вычислим, применив правило интегрирования по частям

$u=x;dv=\frac{xdx}{(x^2+1)^2};du=dx;v=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$ тогда

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+c$$