

Семинар 16. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим основные методы интегрирования тригонометрических функций

1. В приложениях математического анализа важное значение имеют интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Рассмотрим различные значения параметров m и n

а) Если хотя бы одно из m или n нечетное ($m > 0, n > 0$), то интеграл вычисляется непосредственно.

б) Если оба показателя четные числа ($m > 0, n > 0$), то используются формулы двойного аргумента, понижающие степень, а именно

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x; 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x; \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

в) Если $m < 0$ и $n < 0$ и сумма их четна, то применяется подстановка $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$. Исходный интеграл сводится к сумме интегралов от степенных функций.

$$t = \operatorname{tg} x; \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

д) Если $m < 0$ и $n < 0$, то единица в числителе представляется как

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^k, \text{ где } 2k = |m+n| - 2$$

е) Если $m = 0$, n – нечетное отрицательное или $n = 0$, m – нечетное отрицательное, то используется универсальная подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Так как $\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

При вычислении такого интеграла возможны различные случаи представления подынтегральной функции:

а) Функции $\sin x$, $\cos x$ – только в четных степенях. Тогда можно использовать подстановку $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$
Интеграл упрощается.

Замечание Такой же подстановкой вычисляется интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{1}{5} [x + 2 \ln |\cos x + 2 \sin x|] + c$$

Это после разложения на

простейшие дроби, вычисления интегралов от них и возврата к старой переменной.

б) Функция $R(\sin x, \cos x)$ имеет вид $\frac{1}{a \cos x + b \sin x + c}$

В этом случае применяется универсальная подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Замечание Использование универсальной подстановки всегда приводит к цели, но в силу своей общности она часто не является наилучшей в смысле краткости и простоты необходимых преобразований.

3. В теории рядов Фурье, важное значение имеют интегралы

$$\int \sin mx \cdot \sin nxdx, \int \cos mx \cdot \cos nxdx, \int \sin mx \cdot \cos nxdx$$

Они вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]; \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

Множкратное интегрирование по частям при вычислении интегралов.

В приложениях математического анализа встречаются интегралы вида

$$\int x^m \sin x dx, \int x^m \cos x dx, \int x^m e^x dx, \int e^x \sin x dx, \int e^x \cos x dx, m > 0, m \in N$$

Вычисление таких интегралом требует множкратного интегрирования по частям.

$$a) \int x^2 \cos x dx = \{u = x^2; du = 2x dx; dv = \cos x dx; v = \sin x\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$$

$$\{u = x; du = dx; dv = \sin x; v = -\cos x\} = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$b) \int e^x \cos x dx = \{u = \cos x; du = -\sin x; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$\{u = \sin x; du = dx; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx, \text{ тогда получаем}$$

Замечание Если принять вначале $\{u = e^x; dv = \cos x dx; \dots\}$, то получим тождество

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x \cos x dx$$

Примеры с решениями

$$1) \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c$$

$$2) \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 x (1 + \cos 2x) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx +$$

$$\frac{1}{48} \sin^3 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \cdot \frac{t^3}{(1+t^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln |t| + c = -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + c$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^6 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 2 \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + c$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \int \frac{(1+t^2)^2}{8t^3} dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{t^2}{8} + c = -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{8} + c$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{3}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2 - 3} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + c = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \right| + c$$

$$7) \int \frac{dx}{1+2tgx} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{1}{5}[x + 2 \ln |\cos x + 2 \sin x|] + c$$

Это после разложения на простейшие дроби, вычисления интегралов от них и возврата к старой переменной.

$$8) \int \sin x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 6x) dx = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

$$9) \int x^2 \cos x dx = \left\{ u = x^2; du = 2x dx; dv = \cos x dx; v = \sin x \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\left\{ u = x; du = dx; dv = \sin x; v = -\cos x \right\} = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$10) \int e^x \cos x dx = \left\{ u = \cos x; du = -\sin x; dv = e^x dx; v = e^x \right\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$\left\{ u = \sin x; du = dx; dv = e^x dx; v = e^x \right\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\text{тогда получаем } 2 \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + c$$

Замечание Если принять вначале $\{u = e^x; dv = \cos x dx; \dots\}$, то получим тождество

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x \cos x dx$$

Примеры для самостоятельного решения

$$1) \int x \sin^2 x dx$$

$$2) \int \sin^5 x \cdot \cos^5 x dx$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$$

$$4) \int \operatorname{tg}^5 x dx$$

$$5) \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$$

$$6) \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$7) \int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$8) \int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}$$

$$9) \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$