Презентация по Математическому Анализу

Лекция 18

Уравнение Бернулли. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение Бернулли.

Так называется уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad \textbf{(15)}$$

где $m \neq 0, m \neq 1$ (при ***m = 0*** уравнение линейно, при ***m = 1*** - с разделяющимися переменными). Это уравнение решается одним из следующих способов:

1. Уравнение Бернулли сводится к $z' = (1-m)y^{-m}y'$ подстановкой $z = y^{1-m}$ (при ***m>1*** может быть потеряно решение ***y = 0***).

Действительно, $z' = (1-m)y^{-m}y'$, $y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}$; после деления уравнения (15) на y^m $y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$ $\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$

- линейное уравнение.

Пример: $xy' - y = y^2 \ln x$ (уравнение Бернулли*, m = 2*).

Подстановка:

$$z = y^{1-2} \Rightarrow z = \frac{1}{y},\ y = \frac{1}{z},\ y' = -\frac{z'}{z^2},\ -x\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{\ln x}{z^2},\ xz' + z = -\ln x$$

Решаем полученное линейное уравнение:

$$z = uv,\ z' = u'v + uv',\ x(u'v + uv') + uv = -\ln x, u(xv' + v) + xu'v = -\ln x,\ x\frac{dv}{dx} + u = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \ln|v| = -\ln|x|, v = \frac{1}{x}, x\frac{1}{x}u' = -\ln x, u' = -\ln x, u = -\int \ln x\,dx = -x\ln x + x + C,$$

$$z = \frac{-x\ln x + x + C}{x};\ y = \frac{x}{-x\ln x + x + C},\ y = 0$$

2. Можно сразу решать уравнение Бернулли методом, которым решаются линейные уравнения, т.е. заменой $y(x) = u(x)\, v(x)$:

$$y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + puv = qu^m v^m,\ u'v + v(v' + pv) = qu^m v^m,$$

$$v' + pv = 0,\ v = e^{-\int p dx},\ e^{-\int p dx} u' = qe^{-m\int p dx} u^m,\ \frac{du}{u^m} = qe^{-(m-1)\int p dx},\ \frac{1}{(1-m)u^{m-1}} = \int qe^{-(m-1)\int p dx} dx,$$

из этого выражения находим $u(x)$, и $y(x) = u(x)\, v(x)$.

Приме р: решить задачу Коши $y' = \frac{xy}{x^2 + y}, \; y(2) = 1.$

Как и в предыдущем примере, это уравнение не попадает ни под один из рассмотренных типов: оно не является ни уравнением с разделяющимися переменными (наличие суммы $x^2 + y$), ни уравнением с однородной правой частью (слагаемые разных порядков - первого и второго в этой сумме), ни линейным, ни Бернулли (другая структура).

Попробуем опять представим это уравнение как уравнение относительно ***x = x(y):***

$$x' = \frac{x^2 + y}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Это уже уравнение Бернулли с ***m = -1***.

Начальное условие примет вид ***x(1) = 2***.

Решаем уравнение:

$$x = uv,\ x' = u'v + uv',\ u'v + uv' = \frac{uv}{y} + \frac{1}{uv},\ u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = \frac{1}{uv},$$

$$v' - \frac{v}{y} = 0,\ \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y},\ \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y},\ \ln|v| = \ln|y|,\ v = y$$

Тогда:

$$yu' = \frac{1}{yu},\ u\frac{du}{dy} = \frac{1}{y^2},\ udu = \frac{dy}{y^2},\ \frac{u^2}{2} = -\frac{1}{y} + \frac{C}{2},$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{Cy-2}{y}},\ x = \pm y\sqrt{\frac{Cy-2}{y}} = \pm\sqrt{y(Cy-2)}$$

Это общее решение уравнения (утерянное решение y = 0 не удовлетворяет начальному условию).

Ищем частное решение, удовлетворяющее начальному услов $1 = \sqrt{2(2C-2)} \Rightarrow C = \frac{5}{4}$

Решение задачи Коши: $x = \frac{1}{2}\sqrt{y(5y-8)}$

9. Уравнение в полных дифференциалах.

Так называется уравнение вида:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad \textbf{(16)}$$

($P(x, y), Q(x, y)$) - непрерывно дифференцируемы) в случае, если его левая часть

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если существует

такая функция $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Если **(16)** - уравнение в полных дифференциалах, то его правая часть равна

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy$$

т.е. **(16)** принимает вид $du(x, y) = 0$.

На решении ***y(x)*** получим ***du(x, y(x)) = 0***, следовательно, ***u(x, y(x)) = C***, где ***C*** - произвольная постоянная. Соотношение ***u(x, y) = C*** и есть общее решение уравнения в полных дифференциалах.

Для нахождения функции ***u(x, y)*** решается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находи $u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой по ***y*** фун $\varphi(y)$ (эта функция играет роль постоянной интегрирования; так как интегрирование ведётся по переменной ***x***); затем из второго уравнения опр $\varphi(y)$ яется .

**Приме
р:** найти общее решение уравнения

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

Убедимся, что это - уравнение в полных дифференциалах.

**Здес
ь:**

$$P(x,y)=\frac{\sin 2x}{y}+x;\ Q(x,y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

т.е. это действительно уравнение рассматриваемого типа.

Ищем функцию ***u(x, y)*** такую,
что

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin 2x}{y}+x,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}.\end{cases}$$

Из первого
уравнения:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

Дифференцируем эту функцию по ***y*** и приравниваем выражению, стоящему во втором уравнении системы:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

Если мы правильно решаем это уравнение (т.е. правильно определили его тип и правильно выполнили предыдущие действия), то в полученном урав $\varphi'(y)$ для   должны остаться только члены, зависящие от ***y***.

Действительно, представля $\cos 2x$ как $1-2\sin^2 x$, получим:

$$\frac{1-2\sin^2 x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}\Rightarrow\varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

Следователь но,

$$u(x,y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

и общее решение уравнения имеет вид:

$$-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}=C$$

10. *Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

1. Однородное уравнение.

Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами ***p*** и ***q*** без правой части имеют вид ***y''+py'+qy=0*** **(1).**

Если k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $\phi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0$ **(2),** то общее решение уравнения **(1)** записывается в одном из следующих трех видов:

1. $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$

2. $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$

3. $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i, (\beta \neq 0)$

2. Неоднородное уравнение

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения ***y''+py'+qy=f(x)*** **(3)** можно записать в виде суммы $y = y_0 + Y$, где y_0 - общее решение соответствующего уравнения **(1)** без правой части, определяемое по формулам **(1)-(3),** и ***Y*** – частное решение данного уравнения **(3).**

Функция ***Y*** может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени ***n***.

Если ***a*** не является корнем характеристического уравнения **(2)**, т.е. $\varphi(a) \neq 0$, то полагают $Y = e^{ax} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени ***n*** с неопределенными коэффициентами.

Если ***a*** есть корень характеристического уравнения **(2),** т.е. $\varphi(a) = 0$, то $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$

где ***r*** – кратность корня ***a*** (***r=1*** или ***r=2***)

2. $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$. Если $\varphi(a\pm bi)\neq 0$, то полагают

$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$, где $S_N(x),T_N(x)$ - многочлены степени

$N=max\{n,m\}$.

Если же $\varphi(a\pm bi)=0$ то полагают

$$Y=x^r e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$$

где $S_N(x),T_N(x)$ - многочлены степени $N=max\{n,m\}$, ***r*** – кратность корней $a\pm bi$ (для уравнений 2-го порядка ***r=1***).

В общем случае для решения уравнения **(3)** применяется ***метод вариации произвольных постоянных.***

Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения ***n-го*** порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации для уравнения второго порядка ***y''+py'+qy=f(x)*** заключается в следующем.

Пусть известна фундаментальная система решений y_1, y_2 .

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

, где функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам:

$$C_1(x) = \int \frac{y_2 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}; C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}$$

в силу чего ***y(x)*** можно сразу определить по формуле:

$$y(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}$$

здесь $W(y_1, y_2)$ - вронскиан решений y_1, y_2

Рассмотрим решения линейных однородных и неоднородных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

1. Найти общее решение уравнения $y''-7y'+6y=0$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$; его корни $k_1=6; k_2=1$

Следовательно, e^{6x}, e^{x} - частные линейно независимые решения, а ***общее решение*** имеет вид

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$$

2. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=0$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$; его корни $k_1=k_2=1$

Следовательно, e^{x}, xe^{x} - частные линейно независимые решения, а ***общее решение*** имеет

$$y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$$

3. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+13y=0$

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$; его корни $k=2\pm 3i$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, а поэтому им соответствуют ***частные решения*** $e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x$, а ***общее решение*** имеет вид

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

4. Найти общее решение уравнения $y''-2y'-3y=e^{4x}$

Решение:

Составим характеристическое уравнение $k^2-2k+-3=0$; его корни $k_1=3; k_2=-1$

Следовательно, e^{3x}, e^{-x} - частные линейно независимые решения, а общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

Частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y = Ae^{4x}$ (так как в правой части отсутствует синус и косинус, коэффициентом при показательной функции служит многочлен нулевой степени, т. е. ***m=n=0*** и ***r=0***, поскольку $\alpha = 4$ не является корнем характеристического уравнения).

Итак

$$+\begin{vmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{cases} y = Ae^{4x} \\ y' = 4Ae^{4x} \\ y'' = 16Ae^{4x} \end{cases}$$

$$y'' - 2y' - 3y = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x} \Rightarrow A = 1/5$$

Следовательно, *общее решение* данного уравнения:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$$

5. Найти общее решение уравнения $y''+y= 3\sin x$

Решение

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$; имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, а поэтому ***общее решение*** однородного уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Частное решение следует искать в виде:

$$y = x(A\cos x + B\sin x)$$

(в данном случае так как ***i*** является простым корнем характеристического

уравнения, то **m=n=0** и **r=1**, имеем:

Итак

$$+\left|\begin{array}{c}1\\0\\1\end{array}\right|\begin{cases} y=(A\cos x+B\sin x)x \\ y'=(-A\sin x+B\cos x)x+(A\cos x+B\sin x) \\ y''=2(-A\sin x+B\cos x)+(-A\cos x-B\sin x)x \end{cases}$$

$$y''+y=-2A\sin x+2B\cos x\equiv 3\sin x \Rightarrow A=-3/2; B=0$$

Следовательно, ***общее решение*** данного уравнения $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\sin 3x^{4x}$

6. Найти общее решение уравнения $y''+y=tgx$

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$; имеет корни $k_{1,2}=\pm i$

а поэтому общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Частное решение исходного уравнения методом неопределенных коэффициентов искать нельзя (функция ***f(x),*** в отличие от предыдущего имеет другую структуру), а поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение уравнения в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, где функции $C_1(x), C_2(x)$ нужно искать из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tgx \end{cases} \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}; C_2'(x) = \sin x$$

$$C_1(x) = -\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx + A = \sin x - \ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + A; C_2 = -\cos x + B$$

Таким образом, ***общее решение*** исходного уравнения:

$$y = A\cos x + B\sin x - \cos x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)^{4x}$$