Лекция 15

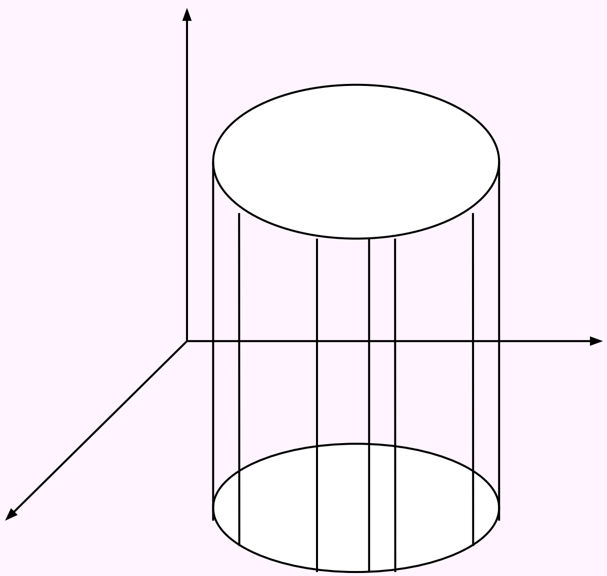
Двойные интегралы. Свойства двойных интегралов. Способы вычисления двойных интегралов. Двойной интеграл в прямоугольных декартовых и полярных координатах.

1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл.

Рассмотрим задачу об определении объема цилиндрического тела

<u>Определение</u>

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью *D* плоскости *OXY*, поверхностью *z=f(x,y)*, где функция *f(x,y)* непрерывна и неотрицательна в области *D* и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси *OZ* и направляющей – границей области *D*.



Область D –основание цилиндрического тела. Граница области состоит из одной или нескольких замкнутых кусочно-гладких линий.

В частных случаях боковая цилиндрическая поверхность может отсутствовать.

Например, тело, ограниченное плоскостью ОХУ и верхней полусферой:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Объем тела можно представить как сумму или разность объемов цилиндрических тел. Принципы, лежащие в основе определения объема тела следующие:

1. Если разбить тело на части, то его объем будет равен сумме объемов всех частей;

2. Объем прямого цилиндра, то есть цилиндрического тела, ограниченного плоскостью параллельной плоскости ОХУ, равен площади основания умноженной на высоту тела.

Обозначения:

V - искомый объем цилиндрического тела;

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$- частичные области, получаемые при разбиении области D на n замкнутых областей произвольной формы;

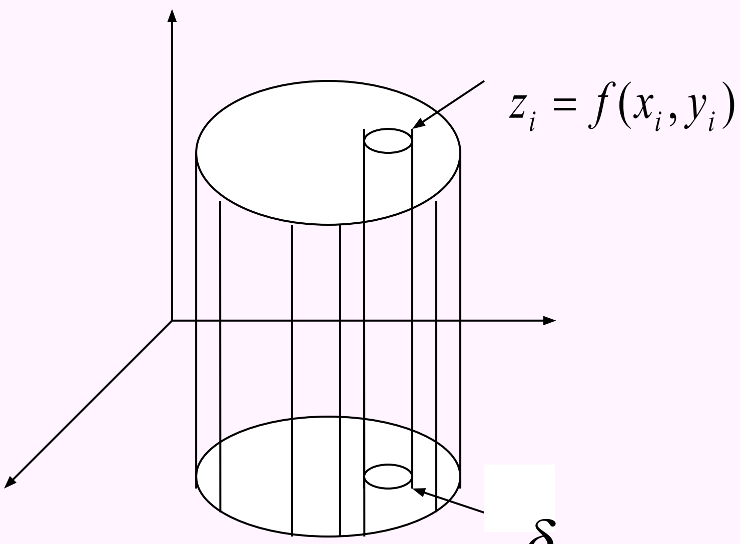
$\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \ldots, \Delta\delta_n$ - площади частичных областей

Через границу каждой области проведем цилиндрическую поверхность с образующей параллельной *OZ*. Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность $z=f(x,y)$ на n кусков, соответствующих n частичным областям. Цилиндрическое тело разбивается на n частичных цилиндрических тел.

δ_i

Выберем в каждой частичной области δ_i произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой равной $z_i = f(x_i, y_i)$. В результате получим n – ступенчатое тело, объем которого равен

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta\delta_1 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i$$



Принимая V данного цилиндрического тела, приближенно равным объему построенного n – ступенчатого тела, будем считать, что V_n точнее выражает V, чем больше n меньше каждая из частичных областей.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, будем требовать, чтобы не только площадь каждой частичной области стремилась к 0, но чтобы стремились к 0 все ее размеры. Если назвать диаметром замкнутой ограниченной области наибольшее расстояние между точками ее границы, то высказанное требование означает, что диаметры частичных областей стремятся к 0, а области стягиваются в точку.

Таким образом $V = \lim V_n = \lim_{n\to\infty} f(x_1, y_1)\Delta\delta_1 + ... + f(x_n, y_n)\Delta\delta_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i$

(при стремлении к 0 наибольшего размера частичных областей при).

К отысканию подобных сумм для функции двух переменных приводят и другие задачи.

Рассмотрим вопрос в общем случае

Пусть

f(x,y)–функция, ограниченная в некоторой замкнутой ограниченной области *D*.

δ_i - частичная область области *D*.

$\Delta\delta_i$ - площадь частичной области .

$P_i(x_i, y_i) \in \delta_i, f(x_i, y_i)$ значение функции в точке $P_i(x_i, y_i)$.

Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i$ (*)

Сумма (*) называется <u>интегральной суммой</u> для функции *f(x,y)* в области *D*, соответствующей данному разбиению области *D* на *n* – частичных областей.

<u>Определение</u>

Двойным интегралом от функции *f(x,y)* по области *D* называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к 0 наибольшего диаметра частичных областей

Запись

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i = \iint_D f(x,y)d\delta$$

«Двойной интеграл от функции *f(x,y)* по области *D*»

$f(x,y)d\delta$ - подынтегральное выражение;

f(x,y) – подынтегральная функция;

$d\delta$ - элемент площади;

D – область интегрирования.

Таким образом, объем цилиндрического тела, рассмотренного выше выражается двойным интегралом от функции *f(x,y)*, взятым по области, являющейся основанием цилиндрического тела $V = \iint_D f(x,y)d\delta$

Теорема существования двойного интеграла

Если *f(x,y)* непрерывна в замкнутой ограниченной области *D*, то ее интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к 0 наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, то есть $\iint\limits_D f(x,y)d\delta$ не зависит от способа разбиения области на частичные области δ_i и выбора в них точек $P_i(x_i,y_i)$.

Свойства двойных интегралов

Замечание

Свойства двойного интеграла почти такие же как соответствующие свойства определенного интеграла.

1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций: $\iint\limits_D [f_1(x,y)+\ldots+f_n(x,y)]d\delta = \iint\limits_D f_1(x,y)d\delta+\ldots+\iint\limits_D f_n(x,y)d\delta$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за символ двойного интеграла: $\iint\limits_D cf(x,y)d\delta = c\iint\limits_D f(x,y)d\delta$

3. Если область *D* разбита на две области без общих внутренних точек, то:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\delta = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\delta + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\delta$$

4. Если во всех точках области *D* функция $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$

то: $\iint\limits_D f(x,y)d\delta \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)d\delta$

<u>Следствие</u>

Если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет своего знака, то двойной интеграл от функции того же знака, что и функция.

Свойство 3 и следствие свойства 4 позволяют уточнить геометрический смысл двойного интеграла

Если объему цилиндрического тела, расположенному над плоскостью *OXY* приписываем знак «+», а расположенного под плоскостью *OXY* – знак «-», если *z=f(x,y)* – уравнение ограничивающей поверхности, тогда $\iint\limits_D f(x,y)d\delta$ - алгебраическая сумма объемов тел, соответствующих положительным и отрицательным значениям функции *f(x,y)*.

Если *f(x,y)=1*, то $\iint\limits_D d\delta = S$, где S – площадь области интегрирования.

Двойной интеграл выражает объем прямого цилиндра с высотой равной 1, то есть объем численно равен площади основания.

5. Значение двойного интеграла заключено между произведениями наименьшего (m) и наибольшего (M) значений подынтегральной функции в области D на площадь области интегрирования: $mS \le \iint_D f(x,y)d\delta \le MS$, где S - площадь области D.

6. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, то есть: $\iint_D f(x,y)d\delta = f(\alpha,\beta)S$,-- $f(\alpha,\beta)$ - <u>среднее значение</u>

<u>функции</u> $f(x,y)$ в области D.

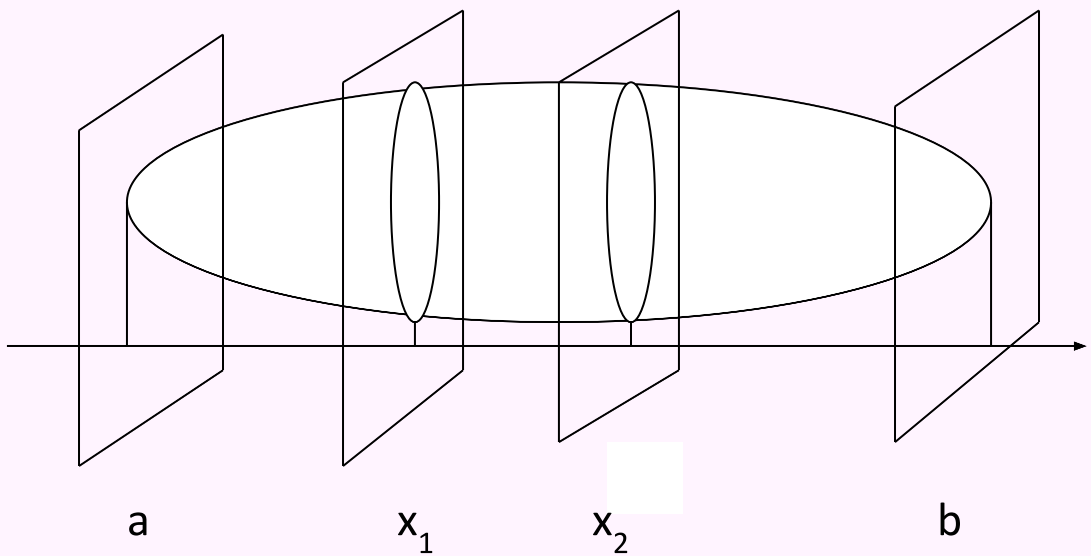
<u>Вычисление двойных интегралов</u>

При вычислении $\iint_D f(x,y)d\delta$ элемент $d\delta$ удобнее представлять в следующем виде.

Область D в плоскости OXY разбивается на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x=const$, $y=const$. Эти прямые соответственно параллельны OX и OY. Частичные области прямоугольники. Площадь каждой частичной области не примыкающей к границе D, будет равна произведению $\Delta x \cdot \Delta y$. Поэтому запишем $\iint_D f(x,y)d\delta = \iint_D f(x,y)dxdy$ (*)

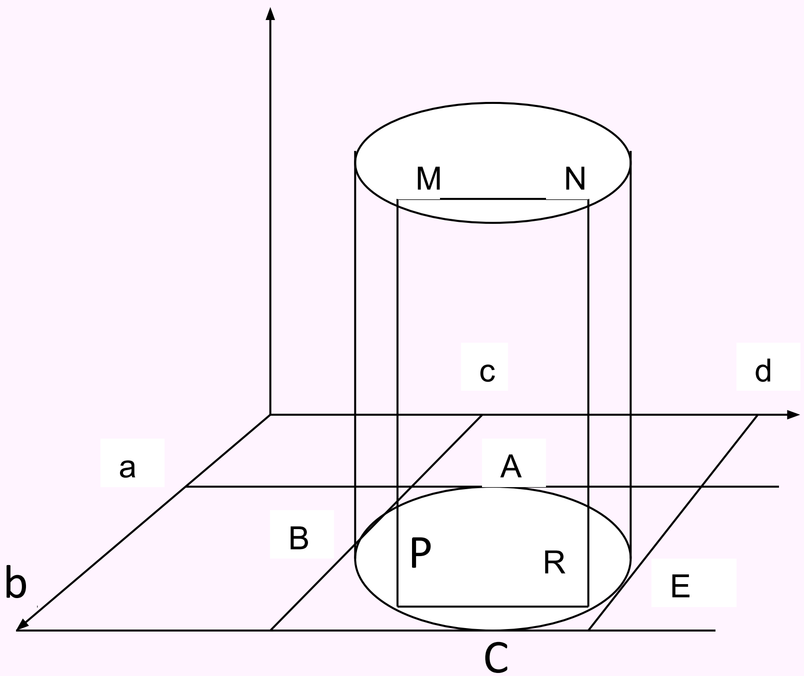
x_2

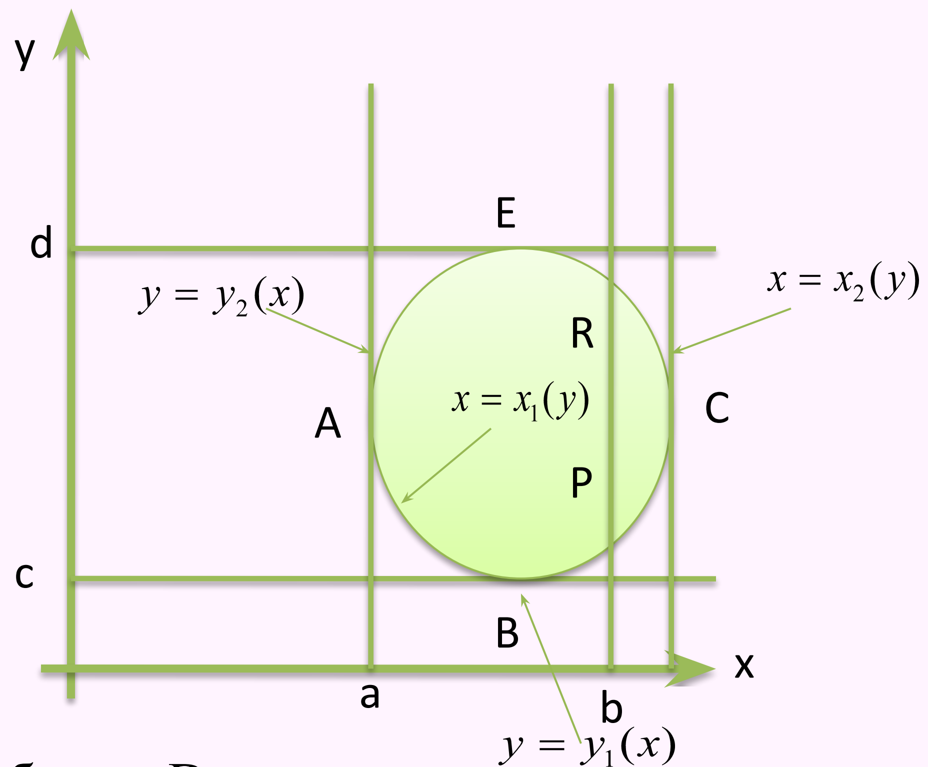
При вычислении (*) опираемся на то, что он выражает объем V цилиндрического тела с основанием D,ограниченного поверхностью $z=f(x.y)$. Для вычисления V имеет место другая формула, а именно $V=\int_a^b S(x)dx$ (**), где $S(x)$ – площадь поперечного сечения тела плоскостью перпендикулярной OX, а $x=a$, $x=b$ уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело. Соответствующий рисунок



Применим эту формулу к вычислению двойного интеграла $\iint_D f(x,y)dxdy$

Предположим, что область интегрирования D удовлетворяет следующему условию: любая прямая параллельная оси OX или оси $OУ$ пересекает границу области не более чем в двух точках. Соответствующее цилиндрическое тело изображено на рисунке





Область D заключена внутри прямоугольника $a \le x \le b, c \le y \le d$

A,B,C,E – точки касания. Интервал *[a,b]* – ортогональная проекция области *D* на ось *OX*. Интервал *[c,d]* ортогональная проекция области *D* на ось *OY*.

Точками A и C граница разбивается на две линии: $y = y_1(x) \to (ABC)$

$$y = y_2(x) \to (AEC)$$

Аналогично точками B и E граница разбивается на две линии: $x = x_1(y) \to (BAE)$

$$x = x_2(y) \to (BCE)$$

Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью параллельной плоскости *OYZ*, то есть *x=const*, где $a \le x \le b$. В сечении получим криволинейную трапецию *PMNR*, площадь которой выражается интегралом от функции *f(x,y),* рассматриваемой как функция от одной переменной *y*, причем *y* изменяется от ординаты точки *P* до ординаты точки *R*; *x=const* в области *D* (*P* – точка входа, *R* - точка выхода). Из уравнений линий *ABC* и *AEC* следует, что ординаты этих точек при взятом *x* соответственно равны $y_1(x), y_2(x)$.

Следовательно, интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ дает выражение для площади плоского сечения *PMNR*. Ясно, что величина этого интеграла зависит от выбранного значения *x*, то есть площадь рассматриваемого поперечного сечения является некоторой функцией от *x*. Обозначим

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Согласно формулы (**) объем всего тела будет равен интегралу от *S(x)* в интервале изменения x $a \le x \le b$

Тогда после замены S(x) выражением, получим $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy]dx$

Более удобна форма $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ (***)

Меняя роли *x* и *y*, то есть, рассматривая сечение тела плоскостью *y=const* $c\le y\le d$, находим площадь *Q(y)* такого сечения $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ где *y* считается величиной постоянной. Интегрируя затем *Q(y)* в пределах интегрирования $c\le y\le d$ получаем второе выражение для двойного интеграла, то есть

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \quad (****)$$

Формулы (***) и (****) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов. Нужно помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных принимается при интегрировании за постоянную величину.

Правые части формул (***) и (****) называются повторными (или двухкратными) интегралами – сам процесс расстановки пределов интегрирования – приведением двойного интеграла к повторному.

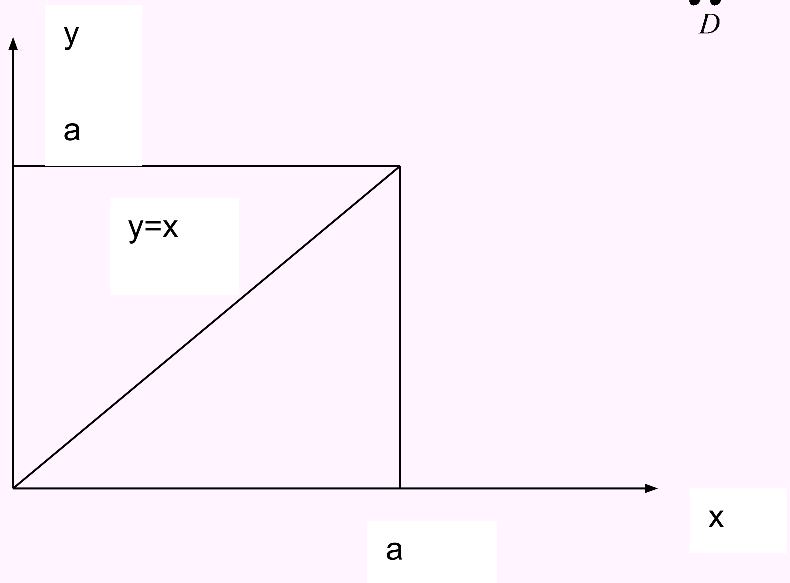
Если область D – прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, то есть имеет вид, представленный на рисунке, то пределы интегрирования – постоянные величины $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx$

В других случаях для сведения двойного интеграла к повторному необходимо прежде всего построить область интегрирования, удобнее изображать ее прямо в области *ОХУ*. Затем нужно установить порядок интегрирования, то есть определить по какой переменной будет производиться внутреннее интегрирование, а по какой внешнее, и расставить пределы. В следующих примерах показано, как производится расстановка пределов интегрирования.

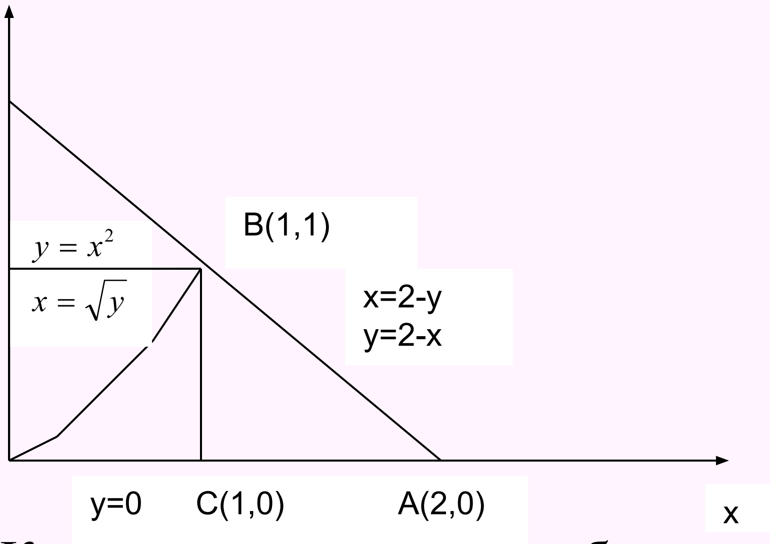
1. Привести к повторному двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если

область D – треугольник, ограниченный прямыми $y=o$, $y=x$, $x=a$.

Если интегрировать сначала по *y*, а потом по *x*, то внутреннее интегрирование производится от линии *y=0* до линии *y=x*, а внешнее от точки *x=0* до точки *x=a*. Тогда $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)dx$



2. Привести к повторному двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$, если область *D*, ограниченна линиями $y=0, y=x^2, x+y=2$



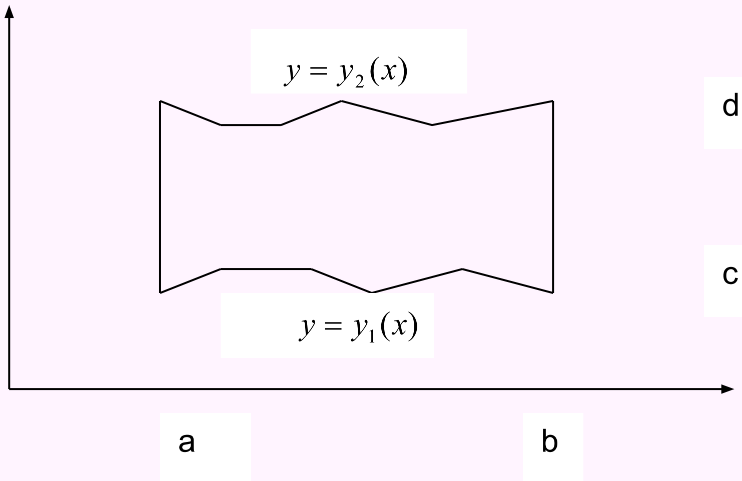
Как видно из рисунка удобнее интегрировать вначале по x, затем по y

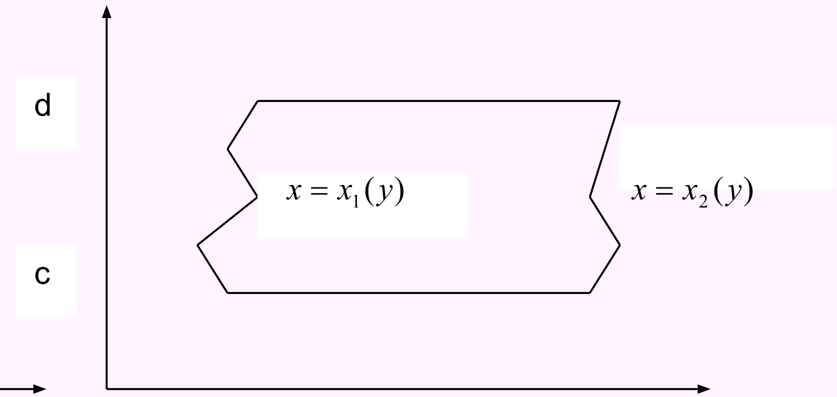
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

Если изменить порядок интегрирования, то необходимо поступить следующим образом. Линия OBA представлена двумя уравнениями. Разбиваем область D на две области: OBC и CBA. Получаем

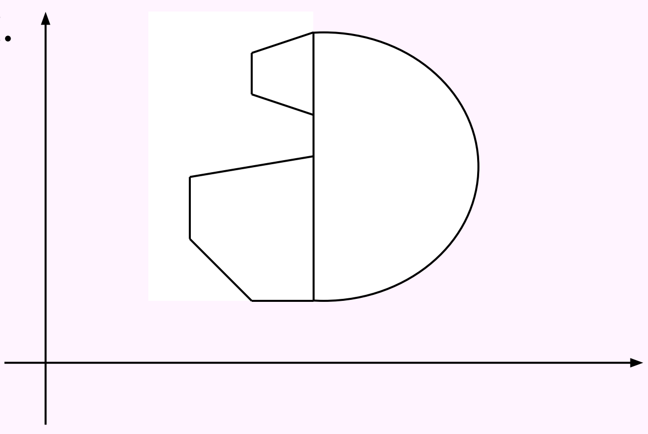
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

Формулы (***) и (****) можно использовать и в случае областей более общего вида. Так (***) и (****) применимы к областям следующего вида





Области боле сложной формы обычно можно разбить на конечное число более простых областей и вычислить двойные интегралы по этим простым областям, используя формулы (***) и (****). Например, таким образом, будет вычислен двойной интеграл по данной области.



Примеры вычисления двойных интегралов

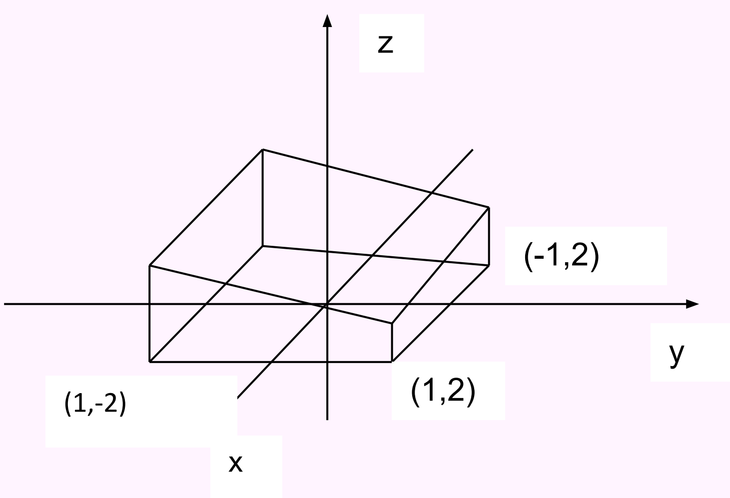
1. Найти двойной интеграл от функции $z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$ по прямоугольной области D $(-1 \le x \le 1; -2 \le y \le 2)$

$$I = \iint_D (1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y)dxdy$$

Решение Геометрически I выражает объем четырехугольной призмы, основанием которой служит прямоугольник D, усеченный плоскостью.

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = 1$$

Фигура изображена на следующем рисунке.



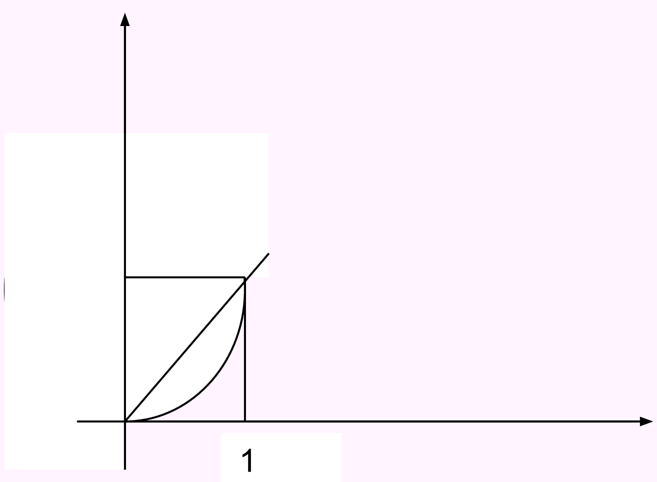
Вычислим повторный интеграл сначала по *y*, затем по *x*

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} (1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y)dy = \int_{-1}^{1} (y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2) \Big|_{-2}^{2} dx = \int_{-1}^{1} (4 - \frac{4}{3}x)dx = (4x - \frac{2}{3}x^2) \Big|_{-1}^{1} = 8$$

Аналогичный результат получаем, интегрируя сначала по *x*, затем по *y*

$$I = \int_{-2}^{2} dy \int_{-1}^{1} (1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y)dx = \int_{-2}^{2} (x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}xy) \Big|_{-1}^{1} dy = \int_{-2}^{2} (2 - \frac{1}{2}y)dy = (2y - \frac{1}{4}y^2) \Big|_{-2}^{2} = 8$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по области *D*, ограниченной линиями $y=x$ и $y = x^2$



Решение

А) Интегрируем сначала по *y*, затем по *x*

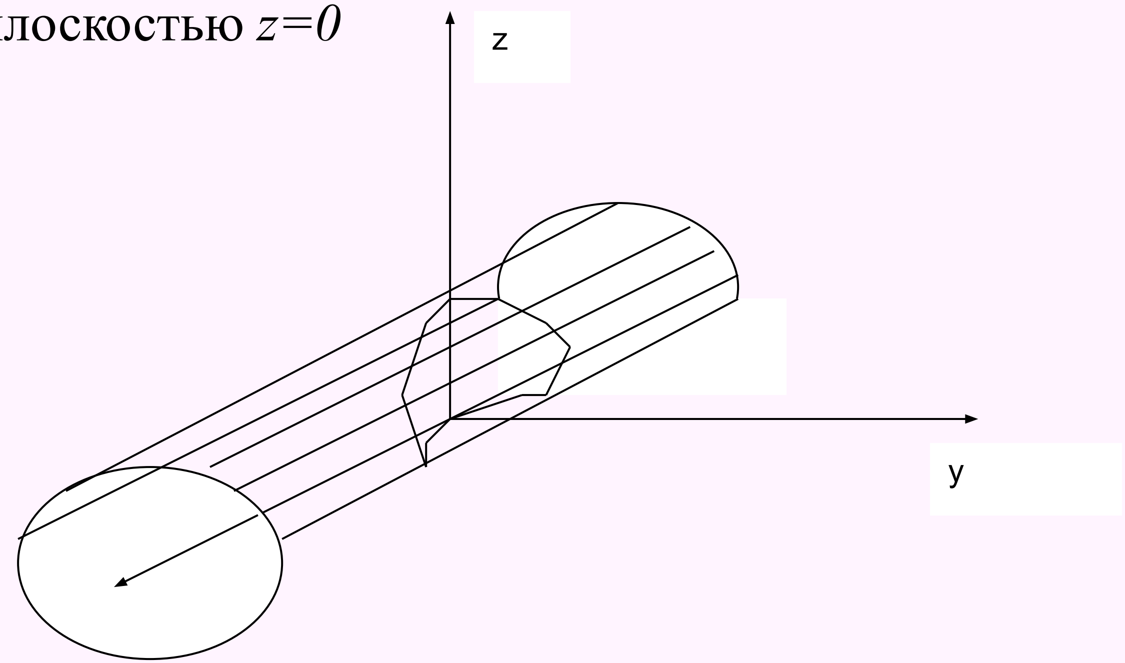
$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})dx = (\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10})\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

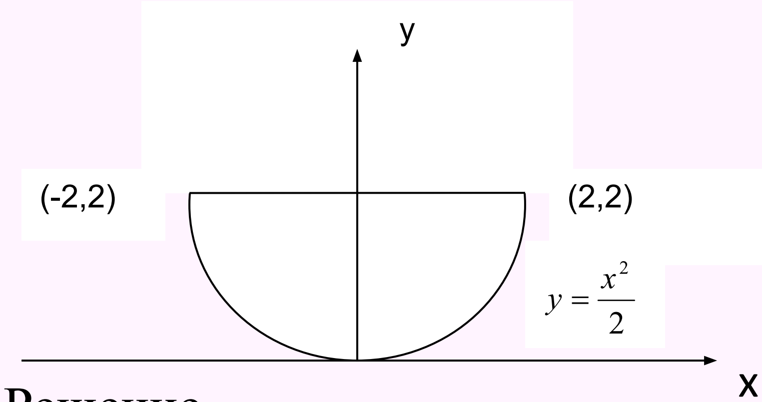
В) Интегрируем сначала по *x*, затем по *y*

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} (x+y)dx = \int_0^1 [\frac{x^2}{2} + xy]\Big|_{y}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{3y^2}{2})dy = (\frac{y^2}{4} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{2})\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями

$z = 4 - y^2, y = \dfrac{x^2}{2}$ и плоскостью $z=0$





Решение

Поверхность, ограничивающая тело сверху имеет уравнение . Область интегрирования D получается в результате пересечения параболы $y = \frac{x^2}{2}$ с линией пересечения цилиндра $z = 4 - y$ и плоскости *z=0*, то есть с прямой *y=2*. В виду симметрии тела относительно плоскости *OYZ* вычисляем половину искомого объема

$$\frac{1}{2}V = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} (4 - y^2)dy = \int_0^2 (4y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{2} dx = \int_0^2 (8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24})dx = (\frac{16}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{168}) \Big|_0^2 = \frac{128}{21}$$

$$V = \frac{256}{21} \approx 12{,}2$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z = 1 - 4x^2 - y^2$ и плоскостью *OXY*.

Заданное тело – сегмент эллиптического параболоида, расположенного над плоскостью OXY. Параболоид пересекается с плоскостью OXY по эллипсу $4x^2 + y^2 = 1$.

Следовательно, необходимо вычислить объем тела, имеющего своим основанием внутреннюю часть указанного эллипса и ограниченного параболоидом. В силу симметрии относительно плоскостей OXZ и OYZ можно вычислить объем четвертой его части, заключенной в первом октанте.

Область интегрирования $4x^2 + y^2 \le 1, x \ge 9, y \ge 0$ (см. рисунок)

Интегрируем сначала по y, затем по x

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2)dy = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \{2x = \sin t\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{16}$$

$$V = \frac{\pi}{4}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Полярные координаты

При вычислении определенных интегралов важную роль играет правило замены переменной, согласно которому при соблюдении соответствующих условий имеет место $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$

Обычно функция $x = \varphi(u)$ монотонна; тогда она осуществляет взаимнооднозначное соответствие между точками интервала $[u_1, u_2]$ изменения переменной *u* и точками интервала $[x_1, x_2]$ изменения переменной *x*.

Заменяя $x = \varphi(u) \Rightarrow dx = \varphi'(u)du, \to x_1 \Rightarrow u_1, x_2 \Rightarrow u_2$ Правило замены переменной в двойном интеграле достаточно сложное. Приведем формулу замены.

При переходе в двойном интеграле от переменных *x,y* к новым переменным *u,v*: *x=x(u,v), y=y(u,v)* (*) формула замены такова.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f[x(u,v), y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

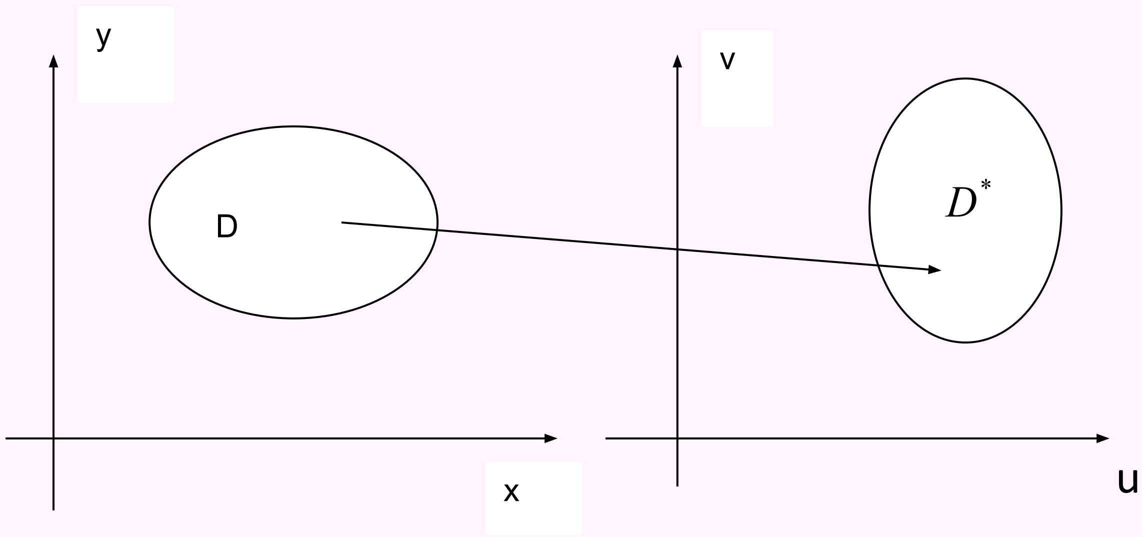
, где

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{dv} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Есть функциональный определитель Якоби (Якобиан) составленный из частных производных функций (*), то есть $d\delta = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

Старая область интегрирования D заменяется на новую область D^* по переменным *u,v*. Новое выражение для называется элементом площади в координатах *u,v*.

При удачной замене переменных преобразованный интеграл может оказаться проще чем исходный, например, пределы интегрирования могут оказаться постоянными.



Двойной интеграл в полярных координатах

Применим формулу (**) к преобразованию с помощью полярных координат (обозначения общепринятые)

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi (-\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

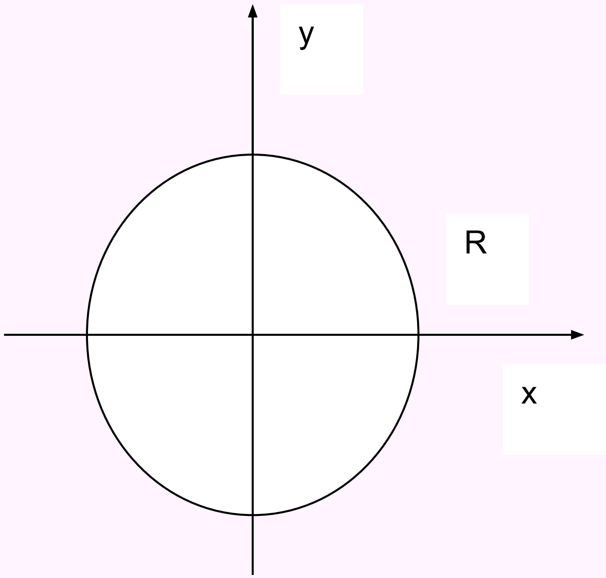
Якобиан будет равен $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\cdot r\cdot\cos\varphi - (-r\cdot\sin\varphi)\cdot\sin\varphi = r$

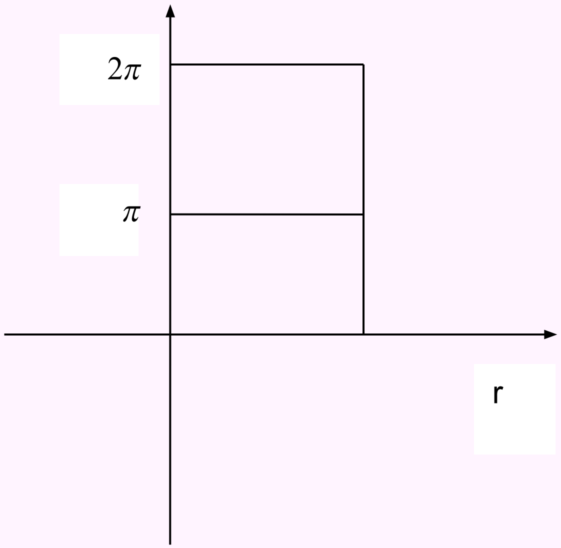
Тогда $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ (***), где D и - соответствующие друг другу области в плоскостях OXY и $O_1r\varphi$ (здесь r и φ рассматриваются как декартовы координаты точки).

Например, пусть D - полукруг радиуса R, расположенный в полуплоскости $y \geq 0$. Во вспомогательной плоскости $O_1r\varphi$ ему соответствует прямоугольник $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi$ (здесь точке (0,0) плоскости OXY соответствует отрезок $[0,\pi]$ на оси в плоскости $O_1r\varphi$. Это нарушение взаимной однозначности происходит на границе области D^*, при этом формулы преобразования сохраняются).

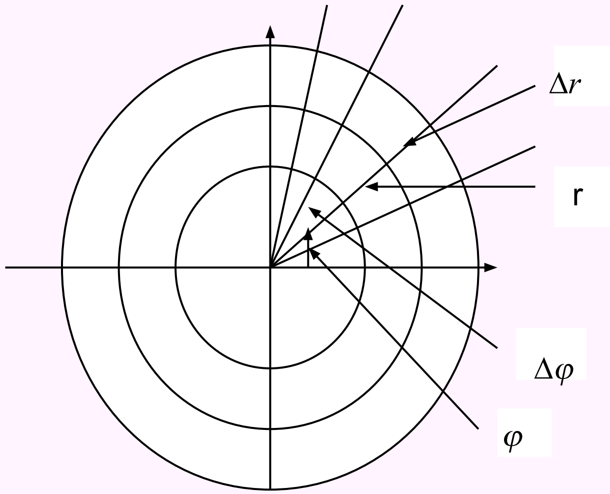
Если D - весь круг радиуса R, то ему соответствует прямоугольник

$$0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$





Формулу для элемента площади в полярных координатах можно получить из геометрических соображений. Построим в плоскости *OXY* координатные линии для полярной системы координат: $r=const$, $\varphi = const$. Они разбивают плоскость на криволинейные четырехугольники, ограниченные дугами концентрических окружностей и их радиусами.



Рассмотрим выделенный четырехугольник.

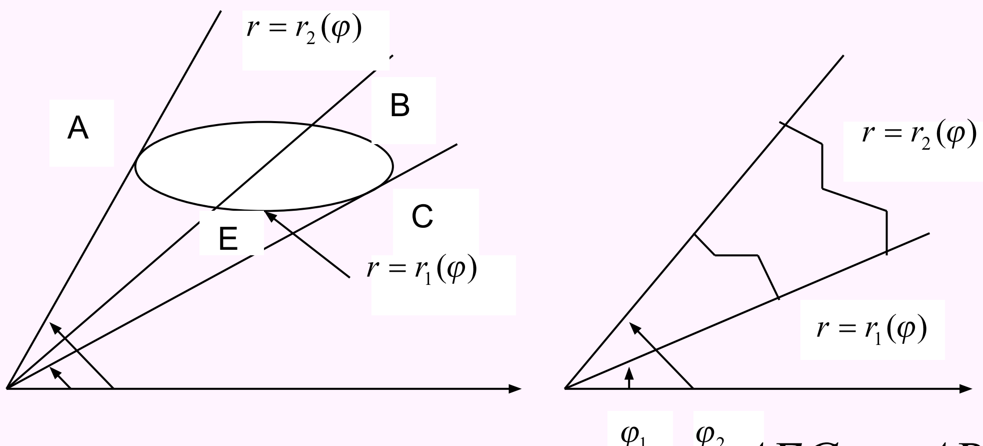
Его площадь $\Delta\delta = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2} r^2 \varphi = r\Delta r \Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\varphi$

Второе слагаемое – бесконечно малая величина более высокого порядка, чем первое слагаемое. Отбрасывая его получим приближенное равенство $\Delta\delta = r\Delta r\Delta\varphi \Rightarrow d\delta = r dr d\varphi$, а это приводит к формуле (***).

Замечание Чтобы привести двойной интеграл в полярных координатах к повторному, обычно нет необходимости строить область D^*, во вспомогательной плоскости $O_1 r\varphi$ а можно просто руководствоваться следующими правилами:

1. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования *D*, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ и линии $\varphi = const$ встречают ее границу не более чем в двух точках.

Возможны такие области



Полярными уравнениями кривых AEC и ABC пусть будут $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$.
Обе функции непрерывны в замкнутом интервале $[\varphi_1, \varphi_2]$.

Интегрируя сначала по r в пределах его изменения при постоянном φ, то есть от $r = r_1(\varphi), \to r = r_2(\varphi)$, а затем по φ от $\varphi_1 \to \varphi_2$

получим $$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

Интегрирование в обратном порядке, то есть сначала по φ, а затем по r обычно не встречается.

Если линия *ACE* (левый рисунок) стягивается в точку 0, то $r = r_1(\varphi) = 0$

В частном случае, когда областью интегрирования служит часть кругового $r_1 \le r \le r_2, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ кольца пределы интегрирования постоянны по обеим Переменным $$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования. Полярный радиус пересекает границу в одной точке. Интегрируя сначала по *r*, затем по φ, получаем $$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$, где $r = r(\varphi)$ - полярное уравнение границы области.

В частности, когда $r = r_1(\varphi) = const = R$, то есть, когда область интегрирования есть круг с центром в полюсе, получаем

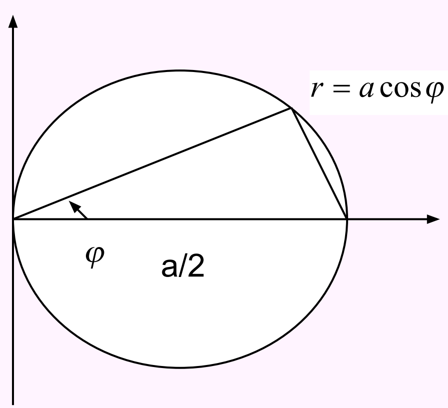
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

Примеры

1. Расставить пределы интегрирования в полярных координатах, если D – круг $x^2 + y^2 \le ax$

Решение. Переходя к полярным координатам, получим уравнение окружности в виде $x = r\cos\varphi$. Тогда $r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = a\cos\varphi$. Пределы изменения по φ от $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Получаем следующий интеграл $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$



2. Вычислить объем общей части шара радиуса *a* и кругового цилиндра радиуса *a/2* при условии, что центр шара лежит на боковой поверхности цилиндра.

<u>Решение</u>

Система координат расположена следующим образом: ось *OZ* лежит на боковой поверхности цилиндра, ось *OX* совпадает с диаметром цилиндра и радиусом шара. В силу симметрии измеряемого тела относительно плоскостей *OXY* и *OXZ*, можно вычислить четвертую часть объема, заключенного в первом октанте. Получаем $\frac{1}{4}V = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где *D* – полукруг, являющийся половиной основания цилиндра. Удобно преобразовать двойной интеграл к полярным координатам. Полярное уравнение полуокружности, ограничивающей область D – $x = r\cos\varphi$ (см. предыдущий пример). Сначала интегрируем по *r*, затем по φ.

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\,rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] \Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$