

Лекция 7. Неопределенный интеграл. Основные свойства. Основные методы интегрирования.

Первообразная функция

Пусть $f(x)$ определена на некотором множестве M , которое является конечным или бесконечным интервалом.

Определение 1

$F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на множестве M , если она дифференцируема в каждой точке $x \in M$ и $F'(x) = f(x), \forall x \in M$

Примеры:

$$f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 \quad f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x \quad f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то $F(x)+C$ также первообразная для $f(x)$ $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

Теорема Если $F_1(x), F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C, \forall x \in M, C = \text{const}$

Доказательство

Пусть $F_1(x) - F_2(x) = G(x) \Rightarrow G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in M$, тогда $G(x) = \text{const}, \forall x \in M$, то есть $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$

Замечание: Если $F(x)$ одна из первообразных для $f(x)$ на множестве M , то любая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на множестве M представима в виде $\Phi(x) = F(x) + C, C = \text{const}$

Определение 2

Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ на множестве M называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

$\int$ - знак интеграла;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$f(x)$ – подынтегральная функция.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на множестве M , то

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (1)$$

Пример $\int \cos dx = \sin + c, -\infty < x < +\infty$

Замечание Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на M , то в формуле(1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции $F(x)$. Действительно

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ Будем считать по определению, что

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx \quad (2)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Свойства вытекают из определения неопределенного интеграла

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Имеем $d \int f(x) dx = f(x) dx$ (1) и $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

В самом деле пусть $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x) dx$ (2), где $\varphi'(x)$ непрерывна. Функция $\varphi'(x)$ очевидно является первообразной для $\varphi(x)$. Поэтому из (2) имеем

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$$

Замечание. В формулах (1) и (2) знаки d и $\int$, следующие друг за другом в том или ином порядке, взаимно уничтожают друг друга. В этом смысле дифференцирование и интегрирование являются взаимобратными математическими операциями.

3. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. То есть, если $A \neq 0$, то $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$ (3)

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, тогда в силу определения неопределенного интеграла имеем $A \int f(x)dx = A[F(x) + c] = AF(x) + c_1$ (4), где $c_1 = Ac$, при $A \neq 0$. Но $AF(x)$ – первообразная для $Af(x)$, так как $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, то есть, если $f(x), g(x), h(x)$ – непрерывны в интервале (a, b) , то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx \text{ при } x \in (a, b)$$

Пусть $F(x), G(x), H(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x), g(x), h(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$ $x \in (a, b)$

На основании определения неопределенного интеграла имеем

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx = [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] - [H(x) + c_3] = [F(x) + G(x) - H(x)] + c \quad (6),$$

где $c = c_1 + c_2 - c_3$. Но $F(x) + G(x) - H(x)$ – первообразная для $f(x) + g(x) - h(x)$, так как $[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, следовательно

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = F(x) + G(x) - H(x) + c \quad (7). \text{ Тогда из (6) и (7) вытекает равенство (5).}$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

Имеем соотношения $dF(x) = f(x)dx$ $\int f(x)dx = F(x) + c$

Обобщая формулы дифференцирования, получим

№ п/п	Дифференциал	Неопределенный интеграл
1	$d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m dx$	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$
2	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
3	$d(e^x) = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + c$
4	$d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5	$d(\sin x) = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
6	$d(-\cos x) = \sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
7	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

8	$d(-ctgx) = \frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
9	$d(\arcsin x) = d(-\arccos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
10	$d(arctgx) = d(-arcctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c$
11		$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$
12		$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + c$
13		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+a} \right + c$
14		$\int shx dx = chx + c$
15		$\int chx dx = shx + c$

Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента

Приведенная таблица полностью сохраняет свое значение, если под x (независимая переменная) понимать любую непрерывно дифференцируемую функцию от независимой переменной.

Пусть $f(x)$ непрерывная функция на данном промежутке, $F(x)$ -ее первообразная. Имеем $\int f(x)dx = F(x) + c$ (1). Полагаем $u = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ - некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим интеграл $\int f(u)du = \int f(u)u' dx$ (2). В таком случае сложная функция $F(u) = F(\varphi(x))$ (3) является первообразной для подынтегральной функции интеграла. Действительно в силу независимости дифференциала первого порядка от выбора независимой переменной получим

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$ (4) и следовательно

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)u' \quad (4') \quad \text{поэтому} \quad \int f(u)du = F(u) + c \quad (5), \text{ где } F'(u) = f(u)$$

Таким образом, из справедливости формулы (1) получаем справедливость формулы (5). На основании этого свойства получаем обобщенную таблицу неопределенных интегралов, то есть

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c (m \neq -1) \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \quad \text{и так далее.}$$

u – любая непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной.

Выбирая различным образом функцию u можно существенно расширить таблицу простейших интегралов.

Пример

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ Заменяя x на $\sin x$, получаем

$$\int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c \quad \text{или} \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

Или $x \rightarrow \ln x$

$$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + c \quad \text{или} \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Отсюда становится понятной важность умения приводить данное дифференциальное выражение $f(x)dx$ к виду $f(x)dx = g(u)du$, где u – функция от x , и $g(u)$ более простая для интегрирования функция, чем $f(x)$.

Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для вычисления неопределенных интегралов:

$$1) \quad dx = d(x + b), b = \text{const}$$

$$2) \quad dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$$

$$3) \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a \neq 0, b = \text{const}$$

$$4) \quad x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$5) \quad \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$6) \quad \cos x dx = d(\sin x)$$

$$\text{В общем случае } \underline{f'(x)dx = d(f(x))}$$

Примеры

$$1. \quad \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax + b)}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c (a \neq 0)$$

$$2. \quad \int \sqrt{x - 2} dx = \int (x - 2)^{\frac{1}{2}} d(x - 2) = \frac{(x - 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (x - 2) \sqrt{x - 2} + c$$

$$3. \quad \int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$5. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + c$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \pm \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \pm \arcsin \frac{1}{x} + c$$

$$9. \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Основные методы интегрирования

Для вычисления данного интеграла необходимо тем или иным способом свести его к табличному интегралу и таким образом найти искомый интеграл

Наиболее важными методами интегрирования являются:

1. Метод разложения.
2. Метод подстановки.
3. Метод интегрирования по частям.

Метод разложения

Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, тогда на основании свойства (4) имеем

$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$. По возможности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

Примеры:

$$1 \quad \int (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \int dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c = x - \frac{4}{3} x \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$2 \quad \int \frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x - 5}{x^2} dx = \int (x^2 - 6x + 8 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 9 \ln|x| + \frac{5}{x} + c$$

$$3 \quad \int \sin x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin 4x d(4x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

(так как $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$)

Метод подстановки (метод введения новой переменной)

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α, β) ; причем функция φ отображает интервал (α, β) в интервал (a, b) .

На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента и учитывая, что $dx = \varphi'(t)dt$, получим формулу замены в неопределенном интеграле.

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (1)$$

Примеры

1 $\int x \sqrt{x-5} dx$ Полагаем $\sqrt{x-5} = t, x-5 = t^2, x = t^2 + 5, dx = 2t dt$

Производя подстановку получаем

$$\int x \sqrt{x-5} dx = \int (t^2 + 5) 2t dt = \int (2t^4 + 10t^2) dt = 2 \int t^4 dt + 10 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{5} (x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} (x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx (a > 0)$$

Выполним тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$

Следовательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + c$$

Делая обратную замену

$$\sin t = \frac{x}{a}, t = \arcsin \frac{x}{a}, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Окончательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Иногда формулу (1) полезно применять справа налево, то есть:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) \quad (2) \quad \text{или} \quad \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(t) dt, t = \varphi(x)$$

Примеры:

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx \quad \text{Полагая} \quad t = 1 + \operatorname{ctg} x, dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad \text{получаем}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx = - \int (1 + \operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{3}} d(1 + \operatorname{ctg} x) = - \int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{4} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\frac{4}{3}} + c$$

2. $\int (\ln x + \frac{1}{\ln x}) \frac{dx}{x}$ так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ получаем

$$\int (\ln x + \frac{1}{\ln x}) \frac{dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln |\ln x| + c$$

Метод интегрирования по частям

Пусть u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x .

На основании формулы дифференциала произведения имеем

$d(uv) = u dv + v du$. Отсюда $u dv = d(uv) - v du$. Интегрируя, получаем

$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$ или окончательно $\int u dv = uv - \int v du$ Это и есть формула интегрирования по частям. Выведенная формула показывает, что интеграл более простым или даже табличным.

Примеры:

$$1. \int \ln x dx = \left\{ u = \ln x, dv = dx, du = d(\ln x) = \frac{dx}{x}, v = x \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - x + c$$

$$2. \int x \cos x dx = \left\{ u = x, dv = \cos x dx, du = dx, v = \sin x \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

$$3. \int x \cdot \arctg x dx = \frac{1}{2} \int \arctg x \cdot d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctg x - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) d(\arctg x) =$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c$$

Интегрирование рациональных дробей с квадратичным знаменателем

Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$, где $P(x)$ – целочисленный

многочлен; a, b, c – постоянные величины $a \neq 0$

Разделив $P(x)$ на знаменатель, получаем в частном некоторый многочлен $Q(x)$ и в остатке – линейный многочлен $mx + n$. Отсюда

$$\frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = Q(x) + \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$$

Интеграл от многочлена $Q(x)$ находится непосредственно. Рассмотрим способы вычисления интеграла вида $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ (1)

Рассмотрим интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} (a \neq 0) \quad \text{Имеем} \quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

Тогда $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

К интегралам I и II присоединим еще один интеграл

III.
$$\int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + c$$

Примеры

1.
$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + c$$

2.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + c$$

Замечание Основным прием вычисления интеграла (1) состоит в следующем: квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$

дополняется до полного квадрата. После этого, если коэффициент $m=0$, то интеграл (1) сводится к интегралу I или II. Если же $m \neq 0$ то интеграл (1) сводится к интегралам I и II, или к интегралам II и III.

3.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 16} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{(x-5)-3}{(x-5)+3} \right| + c = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-8}{x-2} \right| + c$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 4} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}) + (4 - \frac{9}{4})} = \int \frac{d(x + \frac{3}{2})}{(x + \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c$$

$$5. \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1) - 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$6. \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} dx = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}) dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + c$$

Замечание Если выражение $ax^2 + bx + c$

имеет действительные и различные корни, то для вычисления интеграла

(1) можно воспользоваться разложением подынтегральной функции на

простейшие дроби $\frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$ (2) A, B – неопределенные

коэффициенты, которые находятся путем приведения тождества (2)

целому виду и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в правой и левой частях полученного равенства.

Примеры:

$$1. \int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx \quad \frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} \Rightarrow x+2 = A(x+6) + B(x-1) \Rightarrow x+2 = (A+B)x + (6A-B)$$

Приравнявая коэффициенты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = 6A - B \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{7}, B = \frac{4}{7} \quad \text{На основании полученного разложения исходный}$$

$$\text{интеграл} \quad \int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx = \frac{3}{7} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{4}{7} \int \frac{d(x+6)}{x+6} = \frac{3}{7} \ln|x-1| + \frac{4}{7} \ln|x+6| + c = \frac{1}{7} \ln\{(x-1)^3(x+6)^4\} + c$$

Интегрирование иррациональностей

Рассмотрим способы вычисления интегралов, содержащих простейшие иррациональности.

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}, (a \neq 0)$, то применяется подстановка $t = \sqrt[n]{ax+b}$

Пример

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left\{ t = \sqrt[3]{x+1}, x = t^3 - 1, dx = 3t^2 dt \right\} = \int \frac{(t^3 - 1)3t^2 dt}{t} = 3 \int (t^4 - t) dt = 3 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) + c = \frac{3}{5} (x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2. Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{этот интеграл с помощью дополнения выражения}$$

$ax^2 + bx + c$ до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов

$\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm x^2}}$. Рассмотрим эти интегралы:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ Применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2 + a} = t - x$,

где t — новая переменная.

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow a = t^2 - 2tx \Rightarrow d(a) = d(t^2 - 2tx) = 2tdt - 2xdt - 2tdx \Rightarrow tdx = (t - x)dt$$

отсюда $\frac{dx}{t - x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + c$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} = \int \frac{d(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 + 4}} = \ln |x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}| + c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + c = \arcsin \frac{2x + 1}{\sqrt{5}} + c$

3. Интеграл от иррациональности

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Заменой $x-\alpha = \frac{1}{t}$ он сводится к интегралу вида **2**).

Действительно $x = \frac{1}{t} + \alpha, dx = -\frac{dt}{t^2}, ax^2 + bx + c = \left(\frac{1}{t} + \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{t} + \alpha\right) + c = \frac{(c + \alpha^2 + \alpha)t^2 + (2\alpha + 1)t + 1}{t^2}$

После всех замен получаем $\int \frac{dt}{-\sqrt{(c + \alpha^2 + \alpha)t^2 + (2\alpha + 1)t + 1}}$

4. Интеграл от иррациональности

$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ Этот интеграл можно разбить на два интеграла, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один интеграл вычисляется как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида **2**)

5. Иррациональность вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx$

Выделяем полный квадрат, а затем полученный интеграл

$\int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx$ вычисляем по методу – интегрирование по частям.

$u = \sqrt{x^2 + A}, dv = dx, du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}}, v = x$, тогда

$$\int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx - \int \frac{A dx}{\sqrt{x^2 + A}} =$$

$$x\sqrt{x^2 + A} - A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| - \int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx$$

Окончательно

$$\int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + A} + A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}|] + c$$

Замечание

$$\text{а) } \int \sqrt{1-x^2} dx = \{x = \sin t, dx = \cos t dt\} = \int \cos^2 t \cdot dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + c = \left\{ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2} \right\} = \\ \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$$

$$\text{б) } \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$$

При вычислении можно использовать гиперболические функции $x = \sinh t$, $dx = \cosh t$ (можно $x = \tanh t$, но более громоздко).

6. Иррациональность вида

$$\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, \dots) dx \quad (1) \text{ где } R - \text{рациональная функция относительно}$$

переменной интегрирования x и различных радикалов из x .

Обозначим через n – наименьшее кратное всех показателей $k, m, \dots$. Тогда

$$\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{m} = r_2, \dots$$

Замена переменной $x = t^n, dx = nt^{n-1} dt$ позволяет получить интеграл от рациональной функции.

Интеграл (1) примет вид

$$\int R(t^n, t^{r_1}, t^{r_2}, \dots) n t^{n-1} dt$$

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ замена $x = t^6, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$

$$\text{Тогда } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 6 \ln|t+1| + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

Замечание

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, \dots) dx$ вычисляется с помощью замены

$$\frac{ax+b}{px+q} = t^n, x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}, dx = \frac{aq - pb}{(a - pt^n)^2} n t^{n-1} dt$$