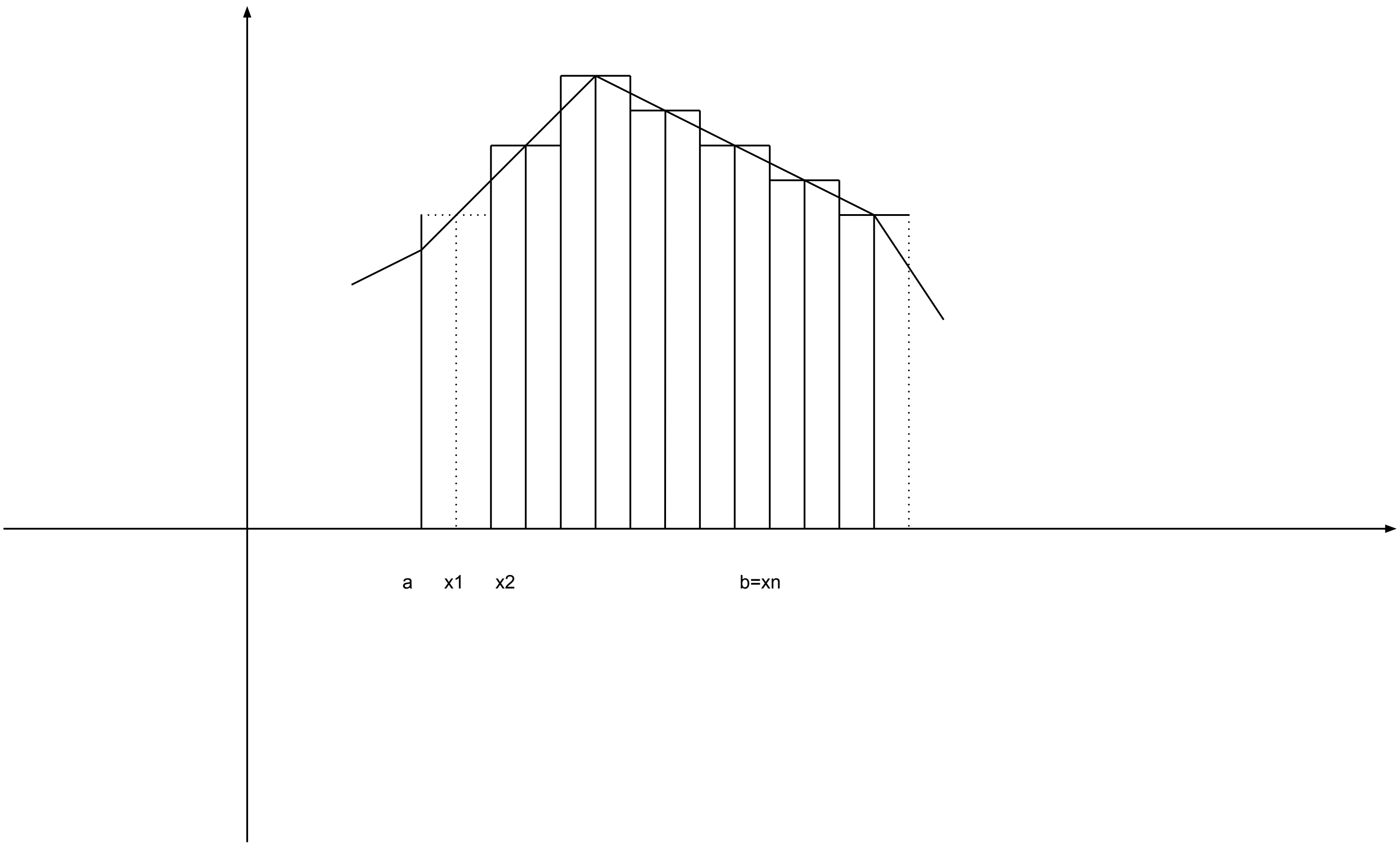
Лекция 9.
Определенный интеграл. Общее определение. Основные свойства. Основные методы вычисления определенных интегралов.

К понятию определенного интеграла приводят такие задачи, как:

- задача о площади криволинейной трапеции;
- задача о вычислении длины прямолинейного пути по заданной скорости;
- задача о вычислении объемов;
- задача о вычислении массы прямолинейного стержня и т.д.

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции



Рассмотрим криволинейную трапецию *aABb*, то есть плоская фигура, ограниченная графиком функции *y=f(x),* отрезками *aA, вB*, прямыми *x=a, x=b* и осью *OX*.

Разобьем отрезок *[a,b]* точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

на *n* произвольных отрезков , то есть $[a, x_1][x_1, x_2]...[x_{n-1}.b]$

Длину каждого отрезка обозначим через $\Delta x_k, k = 1,2,...,n$ На каждом отрезке Δx_k построим прямоугольник высотой $f(x_k^{'})$, где $x_k^{'} \in [x_{k-1}, x_k]$

$f(x_k^{'})$ - значение функции в этой точке.

$f(x_k^{'})\Delta x_k$ - площадь такого прямоугольника.

Составим сумму таких произведений $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$(1) – интегральная сумма для функции *f(x)* на отрезке *[a,b]*

Интегральная сумма (1) выражает площадь ступенчатой фигуры и приближенно заменяет площадь криволинейной трапеции *aABb*

Функция y=f(x) – непрерывная и площадь построенной фигуры при достаточно малых Δx_k ”почти совпадает” с площадью рассматриваемой криволинейной трапеции. Можно для [a,b] выбирать различные Δx_k и $x_k^{'} \in [x_{k-1}, x_k]$ и таким образом получать последовательность разбиений и последовательность интегральных сумм. Можно доказать, что существует предел *S* переменной $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$, когда $n \to \infty$, а длина $\Delta x_k \to 0$

то есть $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x_k \to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$ Предел *S* – площадь криволинейной

трапеции.

<u>*Определение*</u>

Предел *S* интегральной суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$ для функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b],* когда число *n* отрезков неограниченно возрастает, а наибольшая длина отрезка $\Delta x_k \to 0$ называют определенным интегралом от функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b].*

Обозначение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{'})\Delta x_k$ (2)

a– нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования;

[a,b] – отрезок интегрирования;

f(x) – подынтегральная функция;

x – переменная интегрирования.

Функцию *f(x)* интегрируема на отрезке *[a,b],* если для нее существует предел (2).

<u>*Замечание*</u>

Если *f(x)* интегрируема на отрезке *[a,b],* то *f(x)* интегрируема и на $[c,d] \subset [a,b]$

Таким образом, возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, можно сказать, что она может быть вычислена с помощью определенного интеграла $S = \int_a^b f(x)dx$

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = ... = \int_a^b f(u)du$ и т.д.

Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенного интеграла основано на применении формулы Ньютона-Лейбница.

Пусть *f(x)* – интегрируема на отрезке *[a,b]* и *F(x)* – одна из первообразных функции *f(x),* то есть *f(x)=F'(x).* Тогда приращение первообразной на отрезке *[a,b],* то есть *F(b)-F(a)* равно значению определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Другая форма записи $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ - двойная подстановка от *a* до *b*

Таким образом, чтобы вычислить определенный интеграл, достаточно найти одну из первообразных подынтегральной функции и вычислить ее значение сначала при *x=b*, затем при *x=a* и из первого результата вычесть второй.

Пример $\int_1^3 2xdx = x^2\Big|_1^3 = 9-1=8$

Если F(x)= x^2+c , тогда $\int_1^3 2xdx = (x^2+c)\Big|_1^3 = 9+c-1-c=8$

Следовательно, от выбора первообразной значение интеграла не зависит.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть f(x0 непрерывна на отрезке [a,b]. Рассмотрим интеграл

$\int_a^x f(t)dt$ (1), где $t\in[a,x]\subset[a,b]$

(во избежании путаницы, переменная интегрирования обозначена другой буквой)

Если *F(x)* – первообразная функции *f(x),* то есть *F'(x)=f(x),* то согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем

$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$ (2), отсюда

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x)-F(a)] = F'(x)-(F(a))' = f(x)-0=f(x)$$

Следовательно

Производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (3)$$

Таким образом, интеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (4)

является первообразной для подынтегральной функции *f(x).*

Отметим, что из формулы (2) следует, что *Ф(a)=0*, то есть *Ф(x)* есть та первообразная для функции *f(x),* которая обращается в 0 при *x=a*.

Пример $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \sqrt{1+x^2}$

Рассмотрим определенный интеграл с переменным нижним пределом

$\int_x^b f(t)dt$, где $x \in [a,b]$

На основании формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(b) - F(x)] = (F(b))' - F'(x) = -f(x)$$

Таким образом, производная определенного интеграла с переменным нижним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела, взятому с обратным знаком.

Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла исходим из формулы Ньютона-Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (1), где *f(x)* – непрерывна на отрезке *[a,b]* , *f(x)=F'(x).*

Разобьем свойства определенного интеграла на группы.

А. Общие свойства

I. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \ldots = \int_a^b f(u)du$$

II. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0, то есть

$$\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a)=0$$

III. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный. Действительно, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (1), получим

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

Б. Свойство аддитивности

IV. Если отрезок интегрирования *[a,b]* разбить на конечное число частичных отрезков, то определенный интеграл, взятый по отрезку *[a,b]* равен сумме определенных интегралов, взятых по всем частичным отрезкам.

Пусть $[a,b,] = [a,c] \cup [c,b]$, где $a \le c \le b$

Полагая *F'(x)=f(x)*

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (3)$$

Замечание

Формула (3) справедлива, если *c* лежит вне отрезка *[a,b]* и *f(x)* непрерывна на отрезках *[a,c],[c,b].*

В. Свойства линейности

V. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

Пусть *F(x)* – первообразная для *f(x)* на *[a,b],* где *A* – постоянная величина, тогда *AF(x)* – первообразная для *Af(x),* так как *[AF(x)]'=AF'(x)=Af(x).* Получаем

$$\int_b^a Af(x)dx = AF(x)\,|_a^b\ AF(b) - AF(a) = A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)dx$$

VI. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

Рассмотрим алгебраическую сумму функций *f(x)+g(x)-h(x)* (4),

где *f(x),g(x),h(x)* – непрерывные функции.

F(x), G(x), H(x) – их первообразные, то есть *F'(x)=f(x), G'(x)=g(x), H'(h)=h(x)*, тогда *F(x)+G(x)-H(x)* – первообразная для *f(x)+g(x)-h(x),* так как *[F(x)+g(x)-H(x)]'=F'(x)+G'(x)-H'(x)=f(x)+g(x)-h(x)*

Отсюда получаем

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx = [F(x) + G(x) - H(x)]\,|_a^b = [F(b) + G(b) - H(b)] - [F(a) + g(a) - H(a)] =$$

$$[F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] - [H(b) - H(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

Г. Свойства монотонности

VII. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

Пусть $f(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$. Так как F'(x)=f(x) ≥ 0, то F(x) – неубывающая функция. В таком случае при $b \geq 0$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$$

VIII. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать поэлементно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Пусть $f(x) \leq g(x)$ при $a \leq x \leq b$, *f(x),g(x)* – непрерывные функции на отрезке *[a,b].*

Так как $g(x) - f(x) \geq 0$, то в силу свойств **VI** и **VIII** имеем

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$, отсюда $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Замечание

Пусть *f(x)* – знакопеременная непрерывная функция на отрезке *[a,b]*, где *b>a*.

$$f(x) \le 0, a \le x \le \alpha$$

$$f(x) > 0, \alpha < x < \beta$$

$$f(x) \le 0, \beta \le x \le b$$

В силу свойства аддитивности **IV** и учитывая геометрический смысл интеграла имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3, \Rightarrow S_1, S_2, S_3$$ - площади соответствующих криволинейных трапеций.

Таким образом, определенный интеграл, в общем случае при *a<b* представляет собой алгебраическую сумму площадей, соответствующих криволинейных трапеций, где площади трапеций, расположенных выше оси *OX*, берутся со знаком +, а площади трапеций, расположенных ниже оси *OX*, - со знаком -.

Теорема о среднем

<u>Теорема</u>

Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента.

<u>Доказательство:</u>

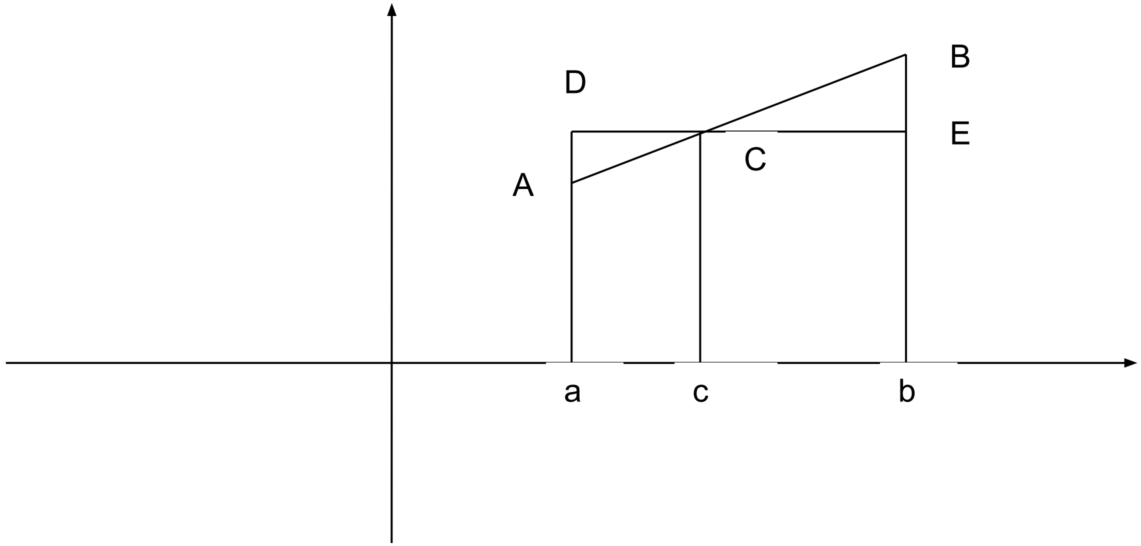
В силу формулы Ньютона-Лейбница имеем

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (1), где $F'(x)=f(x)$

Применяя к разности первообразных теорему о конечном приращении функции получим $(\Delta f(x) = \Delta x \cdot f'(\gamma))$, где $\gamma \in \Delta x$

$F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c)$, где $a<c<b$, отсюда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ (2), где $a<c<b$

Геометрическая интерпретация



В формуле (2):
<u>*Левая часть*</u> – площадь криволинейной трапеции *aABb*
<u>*Правая часть*</u> – площадь прямоугольника с основанием *b-a* и высотой *f(c)*

Таким образом, формула (2) геометрически означает, что можно всегда подобрать на дуге *AB* такую точку *C* с абсциссой *c*, заключенной между *a* и *b*, что площадь соответствующего прямоугольника *aDEb* с высотой *cC* будет в точности равна площади криволинейной трапеции *aABb.*

Число $f(c)=\mu$ - называется средним значением функции *f(x)* на отрезке *[a,b].*

Из (2) имеем $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (3)

Следствие

Пусть $m=\min f(x), a\le x\le b$ и $M=\max f(x), a\le x\le b$. Так как $m\le f(x)\le M$, при a<b из (2) имеем $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ (4)

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть *u(x)* и *v(x)* непрерывные дифференцируемые функции на отрезке *[a,b].* Имеем *d[u(x)v(x)]=v(x)du(x)+u(x)dv(x)*. Интегрируя, это равенство в пределах от *a* до *b* и учитывая, что *du(x)=u'(x)dx* и *dv(x)=v'(x)dx* находим

$$u(x)v(x)\,|_a^b=\int_a^b v(x)u'(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (1)$$

Для краткости употребляется выражение $u(b)v(b)-u(a)v(a)=u(x)v(x)\,|_a^b$

Пример

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx = \{u = x; du = dx; dv = \cos x dx; v = \sin x\} = x\sin x\,|_0^{2\pi} - \int \sin x dx = 2\pi \sin 2\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\,|_0^{2\pi} = 0$$

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ (1), где f(x) непрерывна на отрезке [a,b].

Ввели новую переменную *t*, связанную с *x* соотношением $x=\varphi(t),(\alpha \le t \le \beta)$ (2)

$\varphi(t)-$ непрерывная дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha,\beta]$

Если при этом

1. При изменении *t* от α до β переменная *x* меняется от *a* до *b*, то есть

$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ (3)

2. Сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$

Тогда справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (4)

Доказательство

Рассмотрим сложную функцию $F(\varphi(t))$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Следовательно функция $F(\varphi(t))$ - первообразная для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

Отсюда, на основании формулы Ньютона-Лейбница, учитывая равенство (3), получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi(t)dt = F(\varphi(t))\,|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Замечание

При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно ввести новые пределы интегрирования по формулам (3).

Пример

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\cdot dx = \{t=\sqrt{1+x}; x=t^2-1; dx=2tdt; x=0 \Rightarrow t=1; x=3 \Rightarrow t=2\} = \int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt =$$

$$2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 2\left(\frac{31-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right) = \frac{62}{5}-\frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}$$

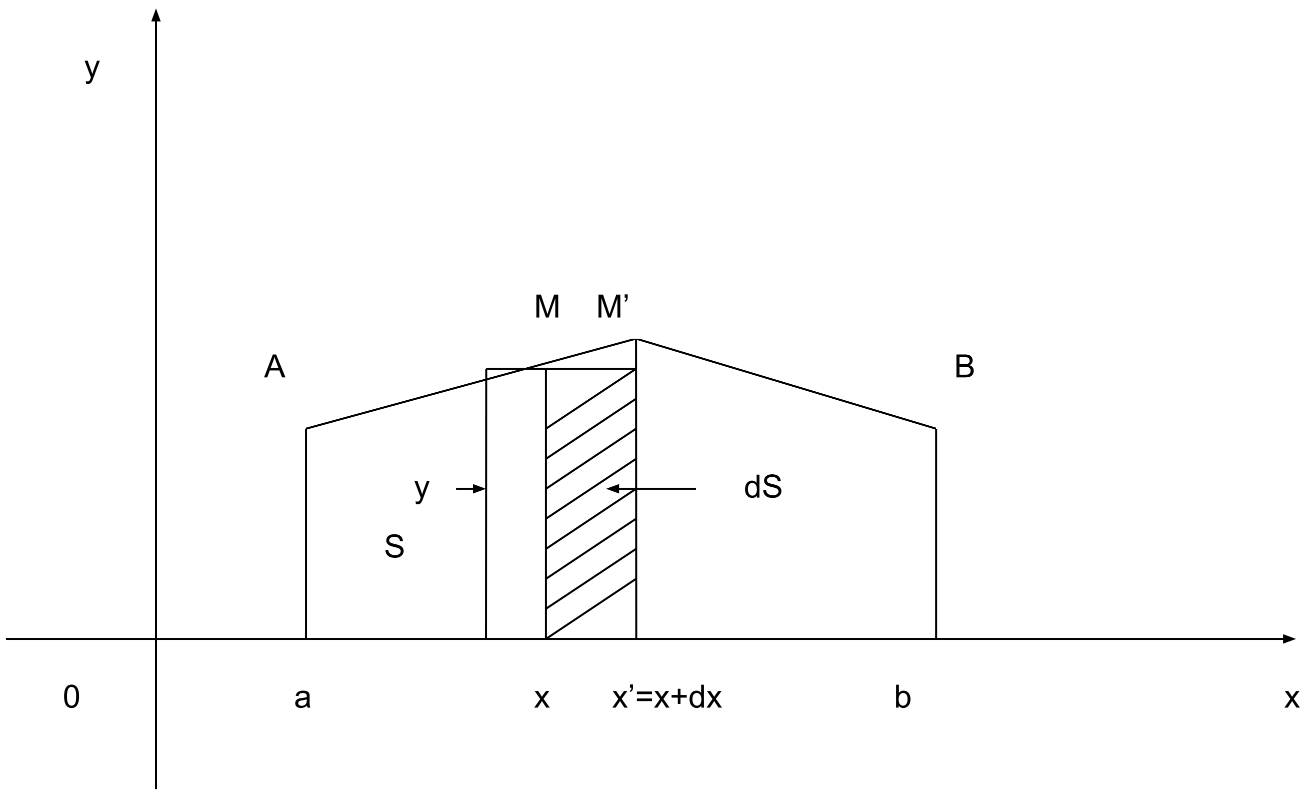
Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл можно применять в следующих задачах:

- вычисление площадей, ограниченных некоторыми линиями;
- вычисление длин дуг линий;
- вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений;
- вычисление объемов тел вращения;
- вычисление поверхностей тел вращения;
- вычисление координат центра тяжести плоской фигуры;
- вычисление моментов инерции линии, круга, цилиндра и т.д.

Площадь в прямоугольных координатах

<u>*Задача 1*</u> Найти площадь *S* криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной анной непрерывной линией *y=f(x),* отрезком *[a,b]* ооси *OX* и двумя вертикалями *x*=a и *x=b*, если $f(x) \geq 0, x \in [a,b].$



Решение

На основании геометрического смысла определенного интеграла имеем

$S = \int_a^b y dx$ (1), где *y=f(x)* – данная функция

Рассмотрим другой способ обоснования формулы (1).

Будем рассматривать площадь *S* как переменную величину, образованную перемещением текущей ординаты *xM=y* из начального положения *aA* в конечное положение *bB*. Давая текущей абсциссе *x* приращение $\Delta x = dx$ получим приращение площади ΔS представляющее собой площадь вертикальной полосы *xMM'x'*, заключенной между ординатами в точках *x* и $x' = x + \Delta x$

Дифференциал площади *dS* есть главная линейная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$ и очевидно равен площади прямоугольника с основанием *dx* и высотой у. Поэтому *dS=ydx* (2)

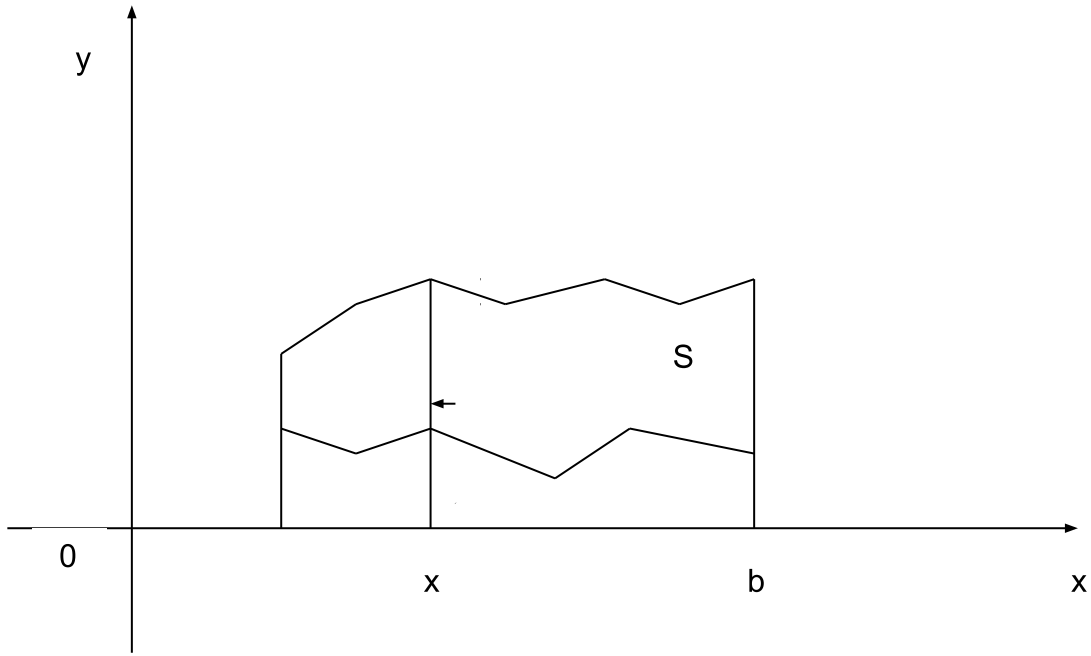
Интегрируя равенство (2) в пределах от *x=a* до *x=b* получаем формулу (1)

$$S = \int_a^b y dx$$

В этом случае показано применение <u>*метода дифференциала*</u> , сущность которого заключается в том, что сначала из элементарных соображений составляется дифференциал искомой величины, а затем после интегрирования в соответствующих пределах находится значение самой искомой величины.

Задача 2

Найти площадь обрасти, ограниченной двумя непрерывными линиями $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), (y_2 \geq y_1)$ и двумя вертикалями *x=a* и *x=b.*



Решение.

Будем предполагать, что $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$

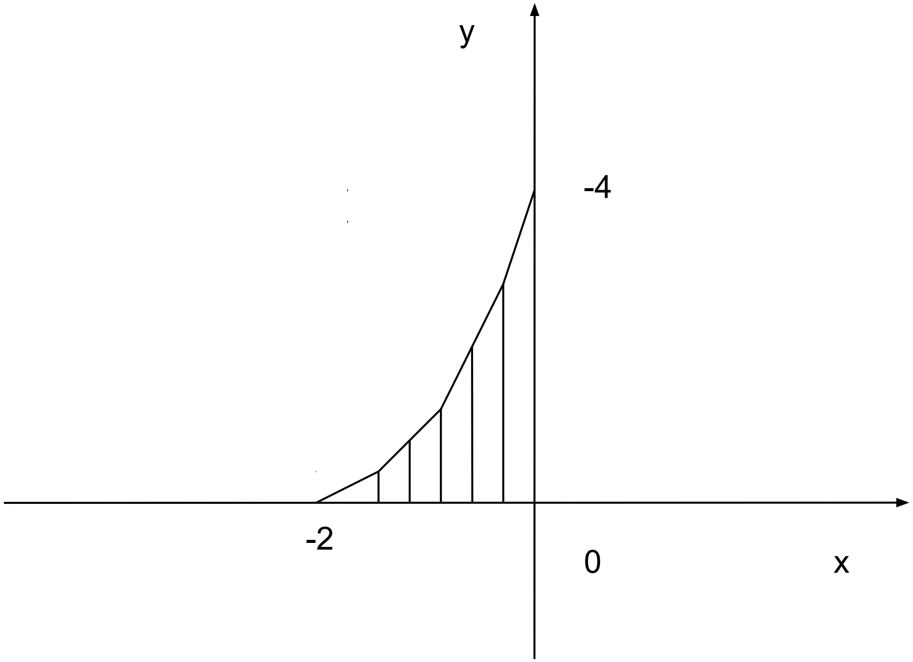
- неотрицательные функции на отрезке [a,b].

Искомую площадь S можно рассматривать, как разность площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных данными линиями. Поэтому

$$S = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx = \int_a^b (y_2 - y_1) dx \qquad (3)$$

Примеры

1. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y=(x+2)^2; y=0; x=0$

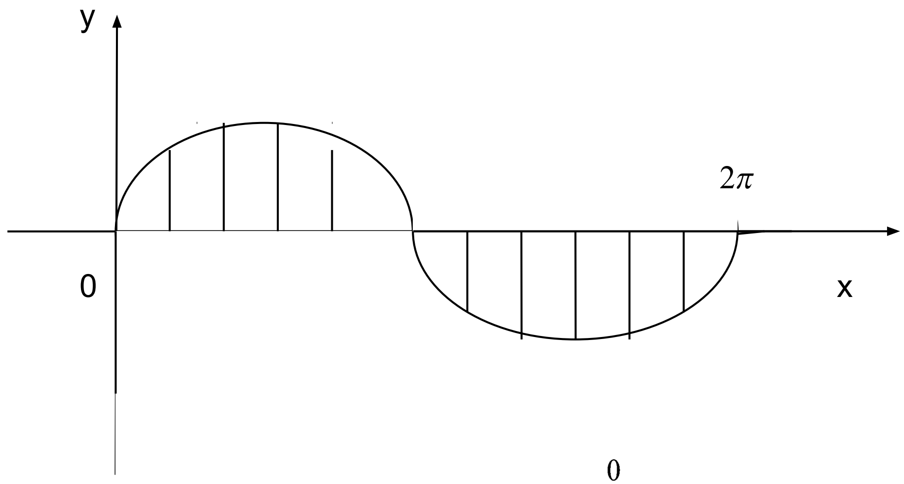


Решение

Отрезок интегрирования [-2,0], тогда

$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx=\frac{1}{3}(x+2)^3\ |_{-2}^{0}=\frac{1}{3}[(0+2)^3-(-2+2)^3]=\frac{8}{3}$$

2. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 - 2x; y = 0$



Решение

Отрезок интегрирования [0,2], тогда $S = |\int\limits_{-2}^{0}(x^2 - 2x)dx| = |\frac{1}{3}x^3 - x^2 \,|_0^2| = |\frac{8}{3} - 4| = \frac{4}{3}$

3. Вычислить площадь, ограниченную графиком функции *y=sinx* на отрезке $[0;2\pi]$ и *OX*.

Решение

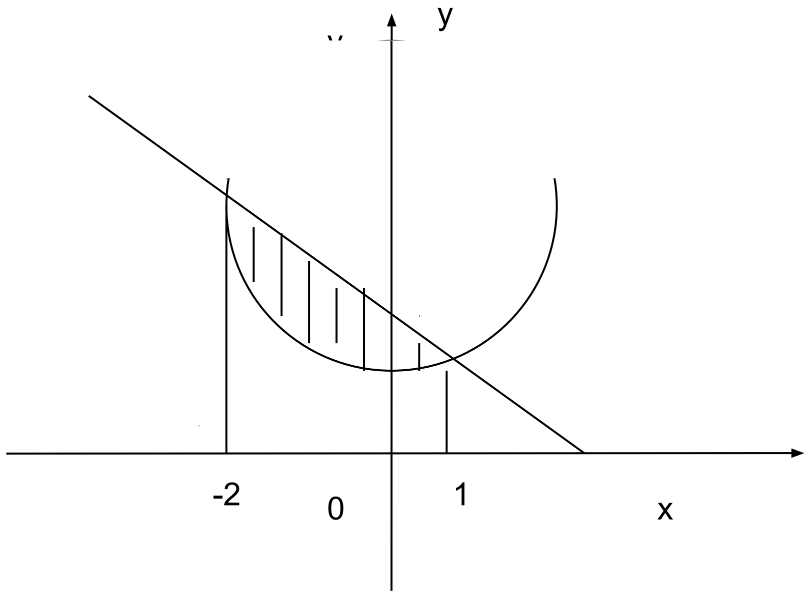
Отрезок интегрирования $[0;2\pi]$ разбиваем на два отрезка и $S = S_1 + S_2$

где $S_1 = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \,|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

$S = S_1 + S_2$=2+2+4

$$S_2 = |\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \,| = |-\cos x \,|_{\pi}^{2\pi}| = |-\cos 2\pi + \cos\pi| = |-1 - 1| = 2$$

4. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 1$ и прямой *x+y=3.*



Решение

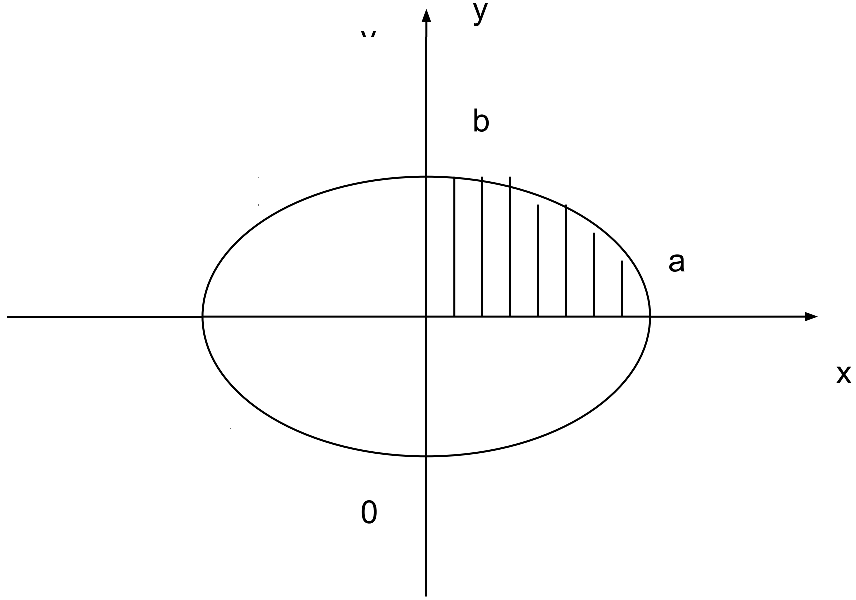
Отрезок интегрирования $[-2;1]$, так как точки пересечения линий $x_1 = -2; x_2 = 1$ определяются при решении системы уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

На основании формулы (3) находим

$$S = \int_{-2}^{1} [(3 - x) - (x^2 + 1)]dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = (2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{1} = 2(1 + 2) - \frac{1}{2}(1 - 4) - \frac{1}{3}(1 + 8) = 4\frac{1}{2}$$

5. Найти площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

В виду симметрии можно ограничиться вычислением ¼ площади.



Решение

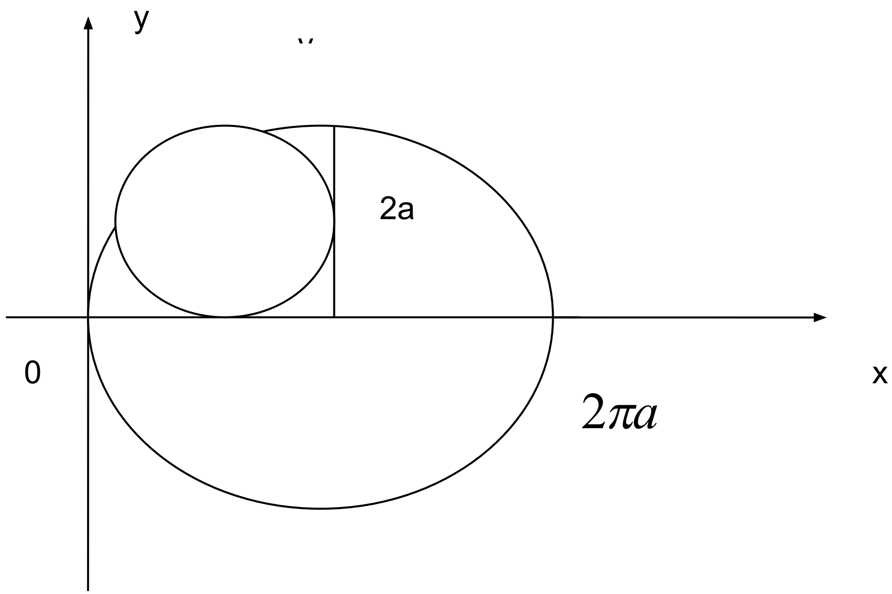
Отрезок интегрирования $[0;a]$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};\frac{1}{4}S=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\{x=a\sin t;dx=a\cos tdt;x=0\Rightarrow t=0;x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\}=$$

$$\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 a}\cdot a\cos tdt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{ab}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}$$

Тогда $S=\pi ab.$

6. Найти площадь, ограниченную первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$



Решение

Отрезок интегрирования $[0;2\pi a]$

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \{dx = a(1-\cos t)dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2\pi a; t = 2\pi\} = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt =$$

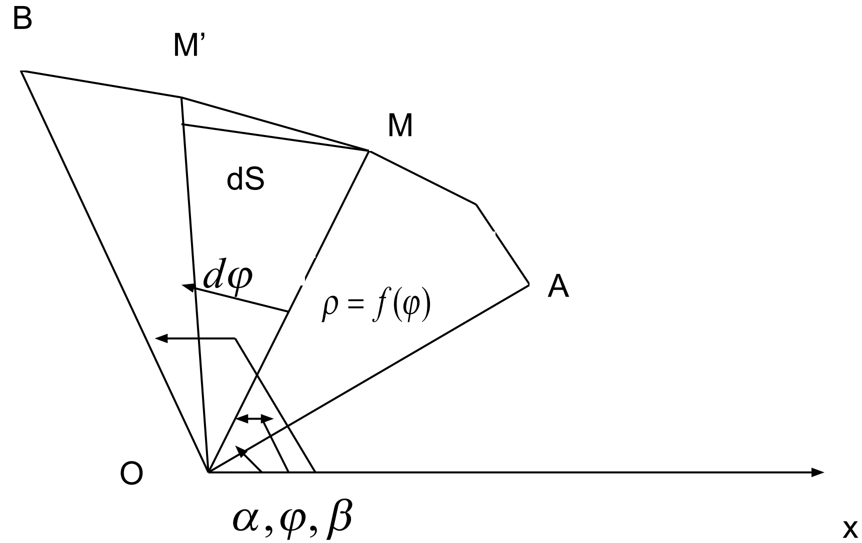
$$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2[(t - 2\sin t)|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt] = a^2[2\pi + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{2\pi}] =$$

$$a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$$

$d\varphi$

Площадь в полярных координатах

Задача Найти площадь *S* сектора *OAB*, ограниченного данной непрерывной линией $\rho = f(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha; \varphi = \beta$, где ρ, φ - полярные координаты.



Для решения задачи используется метод дифференциала.

Представим, что площадь *S* возникла в результате перемещения полярного радиуса $\rho = f(\varphi)$ при изменении угла $\varphi = \alpha; \varphi = \beta$ (см. рисунок).

Если текущий полярный угол φ получает приращение $d\varphi$

то приращение площади $\Delta S = пл.OMM'$

Дифференциал *dS* – главная линейная часть ΔS при $d\varphi \to 0$ и *dS=пл.OMN* (площадь кругового сектора *OMN* радиуса $\rho = f(\varphi)$ с центральным углом $d\varphi$

Поэтому $dS = \frac{1}{2} MN \cdot OM = \frac{1}{2} \rho d\varphi \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$ (1)

Это элемент площади в полярных координатах. Интегрируя (1) в пределах $\varphi = \alpha; \varphi = \beta$ получим искомую площадь $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$ где $\rho = f(\varphi)$ - данная функция

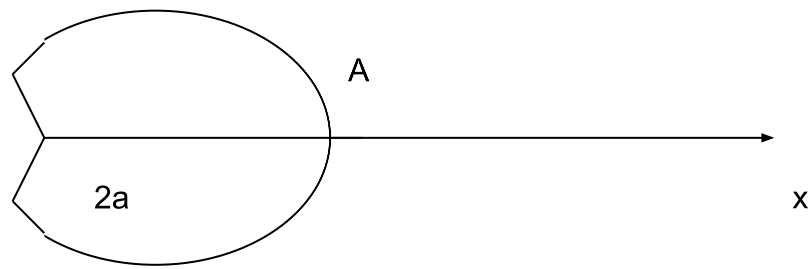
Пример.

Найти площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

Составляя таблицу значений, получим

φ	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{2\pi}{3}$	$\pm \frac{5\pi}{6}$	$\pm \pi$
ρ	2a	$\approx 1{,}9a$	$\approx 1{,}5a$	a	0,5a	$\approx 0{,}1a$	0

Построим кривую



$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi \Rightarrow S = \int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 (\int_0^{\pi} d\varphi + 2\int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi) =$$

$$a^2((\varphi + \sin\varphi)|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi) = a^2(\pi + 0 + \frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)|_0^{\pi}) = \frac{3\pi}{2}a^2$$