Вычисление длин дуг. Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений. Вычисление объемов тел вращения. Несобственные интегралы.

Лекция 10

- **O1**

Под длиной дуги *AB* понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

- **O2**

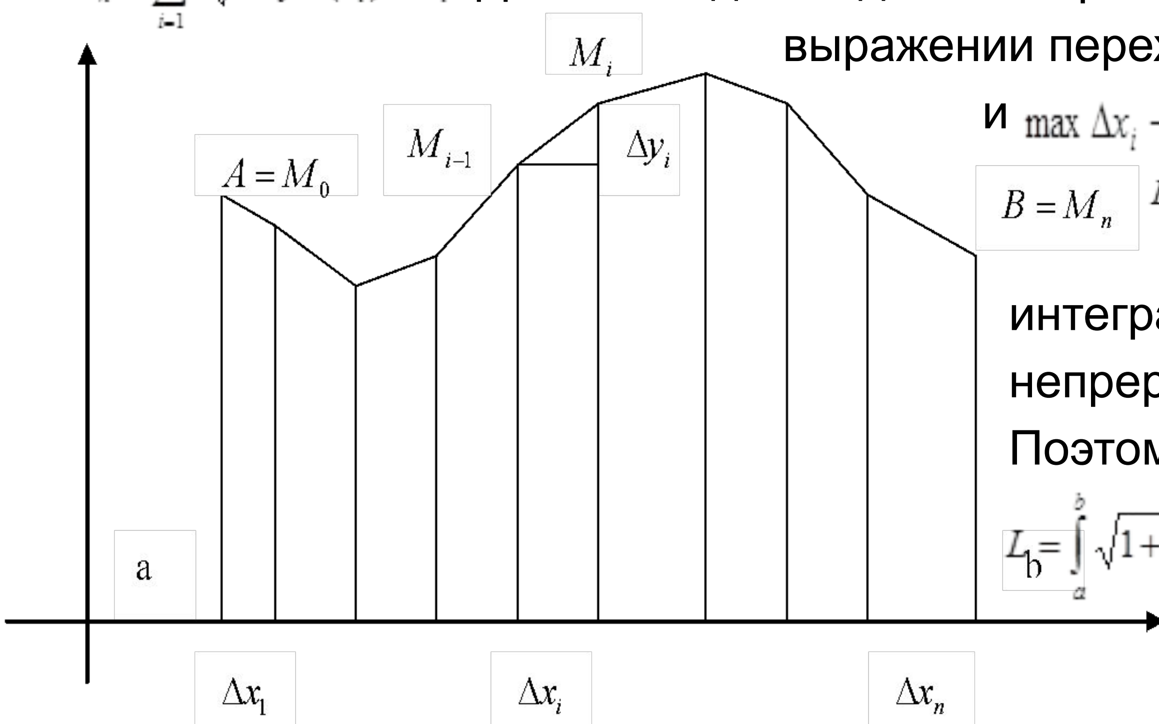
Кривая называется гладкой, если она непрерывна и в каждой точке имеет касательную, непрерывно меняющую свое положение от точки к точке.

Кривая задана уравнением $y = f(x), (a \le x \le y)$ (1) *f'(x)* – непрерывна на отрезке *[a,b].*

Теорема Всякая гладкая кривая (1) имеет определенную конечную длину дуги.

Док-во:

Впишем в данную гладкую кривую (1) ломаную линию $M_0M_1M_2...M_n$ $M_0 = A(a, f(a)); M_n = B(b, f(b))$ Проектируя звенья $M_{i-1}M_i (i = 1,2,...n)$ ломаной на ось *OX,* получим разбиение отрезка *[a,b]* на систему отрезков Δx_i. Пусть Δy_i- приращение функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b].* По теореме Пифагора имеем $M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении функции, получим $\Delta y_i = \Delta x_i \cdot f'(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_i$ - некоторая промежуточная точка отрезка Δx_i. Отсюда $M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)} \cdot \Delta x_i$. Длина всей ломаной линии $M_0M_1M_2...M_n$ (то есть ее периметр) равна $П_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)} \cdot \Delta x_i$. Для нахождения длины *L* кривой (1) в последнем выражении переходим к пределу при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$. Таким образом



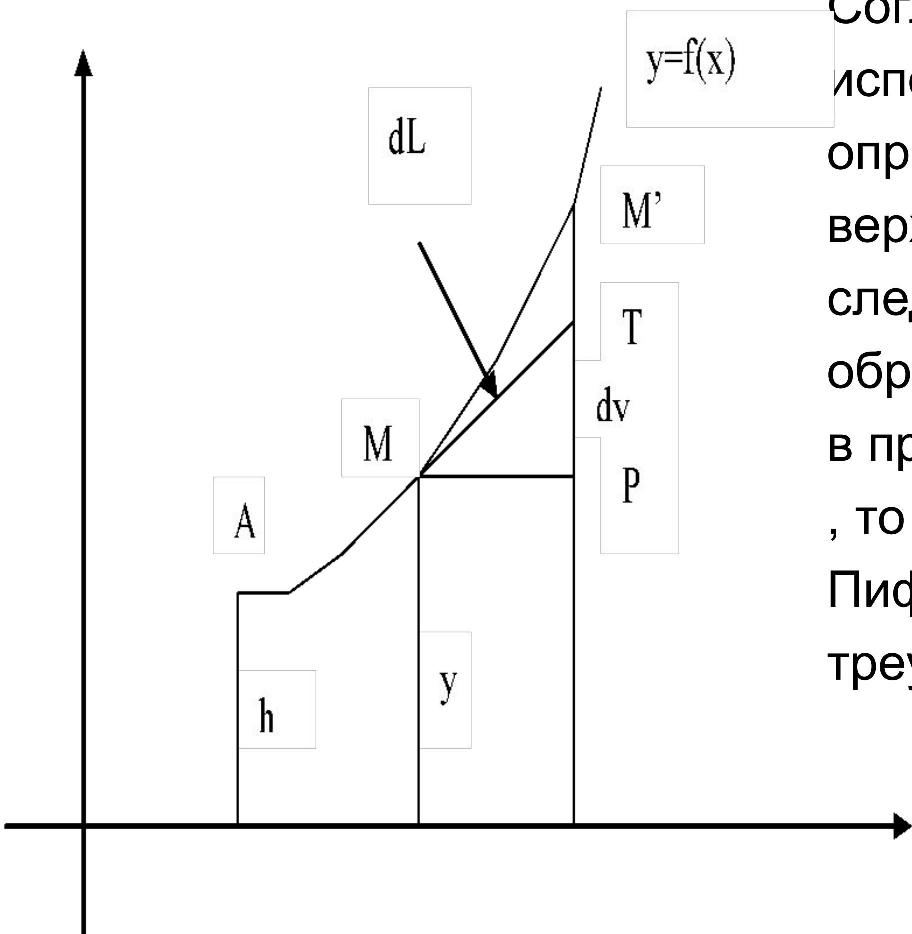
$$L = \lim_{\max \Delta x \to 0_i} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)} \cdot \Delta x_i$$

Получаем предел интегральной суммы для непрерывной функции $F(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$

Поэтому $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$ или

$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$ (2), где *y'=f'(x)*

Дифференциал дуги в прямоугольных координатах

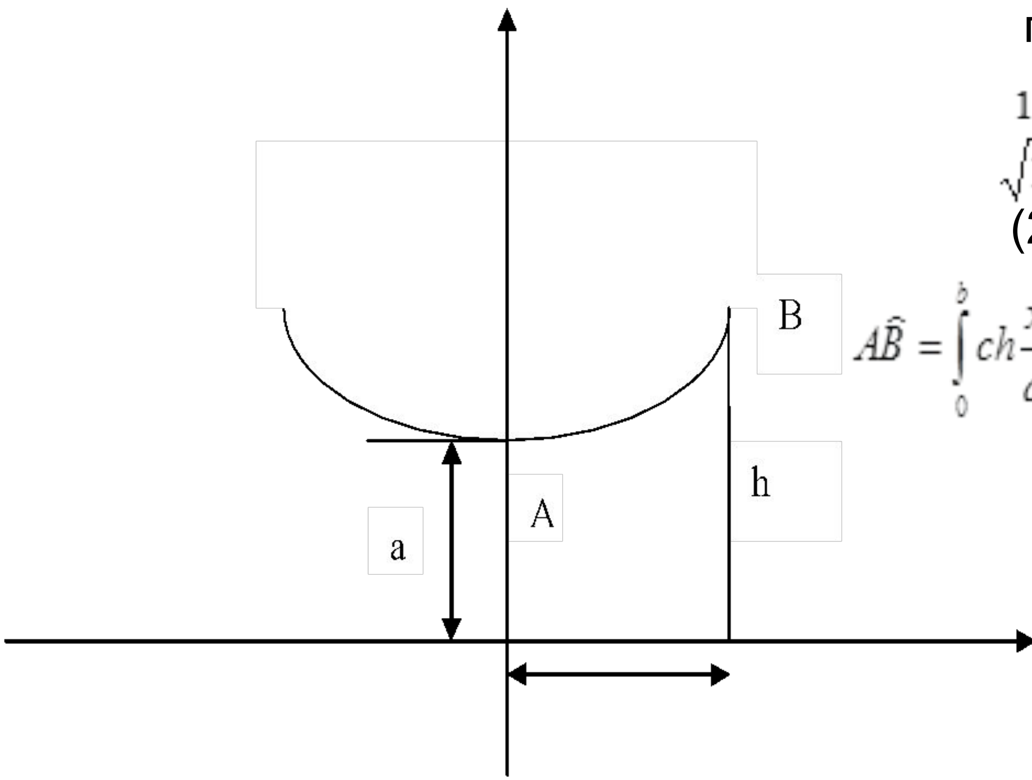


Пусть точка *A(a,h)* – фиксирована, а точка *M(x,y)* – переменная. В таком случае длина дуги *L=AM* есть некоторая функция от *x*. Согласно (2) имеем $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$ Отсюда, используя теорему о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом, получим $L' = \sqrt{1 + y'^2}$ и следовательно $dL = L'dx = \sqrt{1 + y'^2}dx$, таким образом $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ - дифференциал дуги в прямоугольных координатах. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (3). Это теорема Пифагора для бесконечно малого треугольника *MTP*.

Пример

Вычислить длину дуги отрезка цепной линии. Так называется линия, форму которой принимает тяжелая нить, закрепленная в двух точках. Уравнение линии $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ (4), где *a* – параметр цепной линии, *a>0*. Или проще $y = ach\frac{x}{a}$ (4’) – гиперболический косинус.

b – абсцисса точки *B*; *h* – ордината точки *B*.



Дифференцируя уравнение (4’) получаем $y' = sh\frac{x}{a}$. Далее $1 + y'^2 = 1 + sh^2\frac{x}{a} = ch^2\frac{x}{a}$. Тогда $\sqrt{1 + y'^2} = ch\frac{x}{a}$. Согласно формулы (2), имеем

$$\widehat{AB} = \int_0^b ch\frac{x}{a}dx = a\int ch\frac{x}{a}d(\frac{x}{a}) = ash\frac{x}{a}\Big|_0^b = a(sh\frac{b}{a} - sh0) = ash\frac{b}{a}$$

Нахождение длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

Пусть L – длина дуги кривой $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $[t_0 \le t \le T]$, $\varphi(t), \psi(t)$ -

непрерывно дифференцируемые функции на заданном отрезке.

Формула (3) для дифференциала дуги справедлива и в этом случае *dx=x'dt; dy=y'dt*. Имеем $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

Интегрируя последнее выражение в пределах от $t = t_0$ до *t=T* получим длину дуги $L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot dt$ (5)

Пример

Найти длину дуги окружности, заданной параметрическими уравнениями

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ от t=0 до t=T

Решение

Здесь *dx=-asintdt; dy=acostdt*. Поэтому $dL = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = adt$ и, следовательно $L = \int_0^T adt = aT$

Пример

Найти длину дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

Запишем уравнение астроиды в следующем виде $(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$

Замена $x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos t;\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin t$.

Получаем параметрические ура-ния астроид

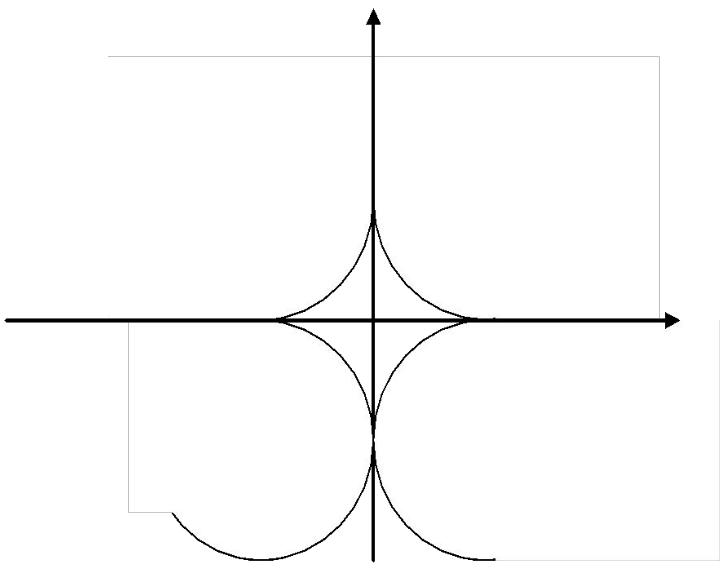
$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi \qquad (6).$$

Кривая (6) симметрична, поэтому находим $\frac{1}{4}L$ при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Получаем $dx=-3a\cos^2 t\cdot\sin t\cdot dt;\ dy=3a\sin^2 t\cdot\cos t\cdot dt$

Отсюда $dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=3a\sin t\cos t dt$

Интегрирую в пределах от t=0 до $t=\frac{\pi}{2}$,



получим

$$\frac{1}{4}L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=\frac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{4}(1+1)=\frac{3}{2}a\Rightarrow L=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$$

Длина дуги в полярных координатах

Выведем сначала формулу для дифференциала *dL* дуги в полярных координатах на основании формулы (3)

$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$; где *x,y* – прямоугольные декартовы координаты точки дуги.

Формулы перехода:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \Rightarrow dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi,\ dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi$$

$$(dx)^2 = \cos^2\varphi(d\varphi)^2 - 2\rho\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi + \rho^2\sin^2\varphi(d\varphi)^2$$

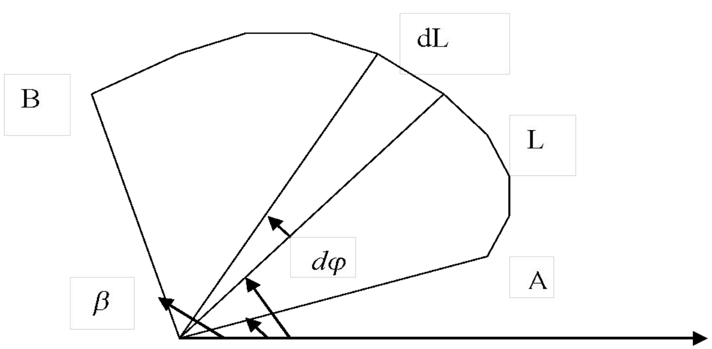
$$(dy)^2 = \sin^2\varphi(d\varphi)^2 - 2\rho\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi + \rho^2\cos^2\varphi(d\varphi)^2$$

Отсюда $(dL)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2$, следовательно $dL = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2}$ или

$dL = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$ (1), где $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$

Задача

Найти длину дуги L непрерывно дифференцируемой кривой $\rho = f(\varphi)$ между точками $A(\alpha, f(\alpha))$ и $B(\beta, f(\beta))$, где ρ, φ - полярные координаты.



Интегрируя равенство (1) в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$ получаем длину дуги в полярных координатах $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$, где $\rho = f(\varphi)$

$\rho' = f'(\varphi)$ - производная

Пример

Вычислить полную длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$

Решение

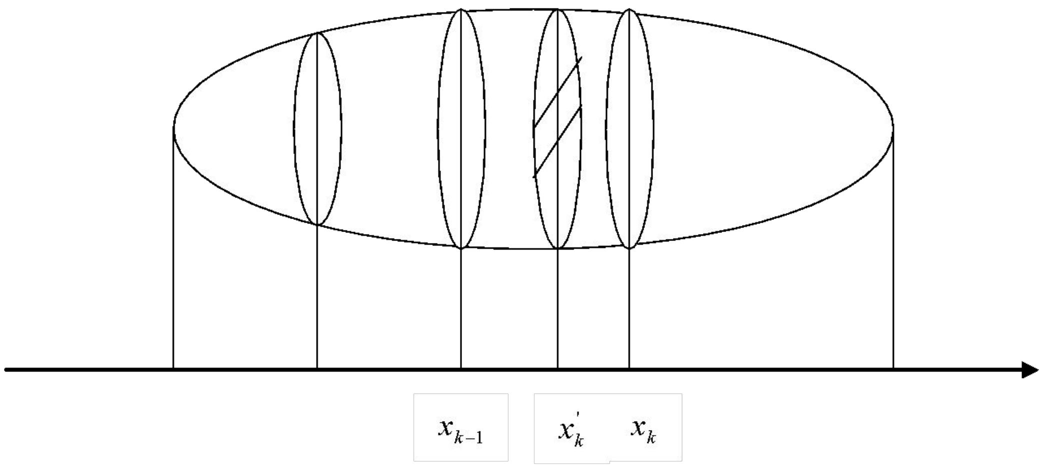
Имеем $\rho' = -a\sin\varphi$, тогда $\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = a^2(2+2\cos\varphi) =$
$2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, отсюда $\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = 2a\,|\cos\frac{\varphi}{2}|$

$$\frac{1}{2}L = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d(\frac{\varphi}{2}) = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a \Rightarrow L = 8a$$

Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

<u>Задача</u>

Зная закон изменения площади поперечного сечения тела, найти объем этого тела.



Пусть *OX* некоторое выбранное направление и *S(x)* – площадь поперечного сечения плоскостью перпендикулярной оси *OX* в точке с абсциссой *x*. Функцию *S(x)* будем предполагать известной и непрерывно меняющейся при изменении *x*. Проектируя тело на ось *OX*, получим некоторый отрезок *[a,b],* дающий линейные размеры тела в направлении оси *OX.*

Разобьем данное тело на элементарные слои плоскостями, перпендикулярными оси *OX*. Точки пересечения этих плоскостей с осью *OX* соответственно $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$.

Каждый элементарный слой, ограниченный плоскостями, пересекающимися в точках $x_{k-1}, x_k\ (k=1,2,\ldots,n)$ заменяем цилиндром с высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и площадью основания $S(x_k'), x_k' \in [x_{k-1}, x_k]$. Объем данного цилиндра выражается формулой $\Delta V_k = S(x_k')\Delta x_k$. Составим сумму всех таких произведений $V_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k$. Эта сумма является интегральной для данной функции *S=S(x)* на отрезке *[a,b].* Она выражает объем ступенчатого тела, состоящего их элементарных цилиндров и приближенно заменяющего данное тело.

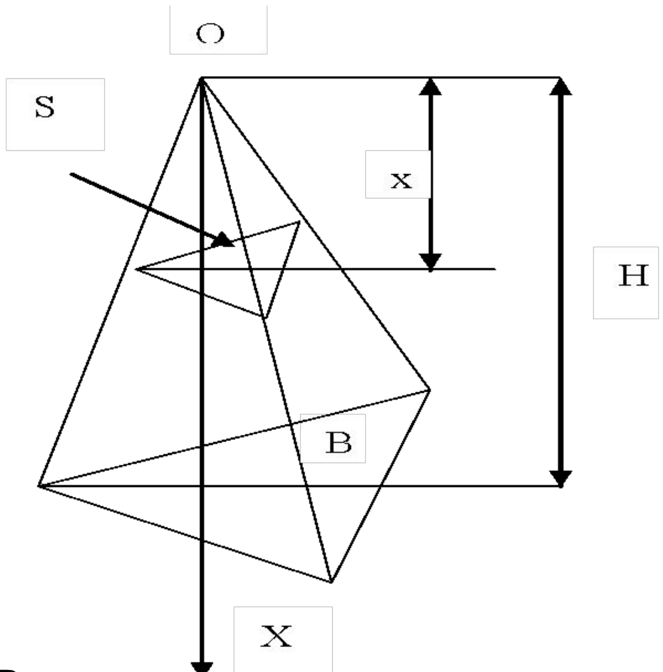
Объемом тела называют предел объема указанного ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное тело, при $\lambda \to 0, \lambda = \max \Delta x_k\ (k=1,2,\ldots,n)$ - длина наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$.

По определению $V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k$ с другой стороны $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx$. Из двух последних равенств получаем формулу вычисления объема тела по заданным поперечным сечениям.

$V = \int_a^b S(x)dx$ (1)

Пример

Найти объем пирамиды с основанием *B* и высотой *H*



Решение

Ось *OX* перпендикулярна поверхности *B* и направлена из точки *O.* *S* – площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии *x* от вершины. Так как площади поперечных сечений пирамиды относятся как квадраты расстояний их от вершины, то имеем

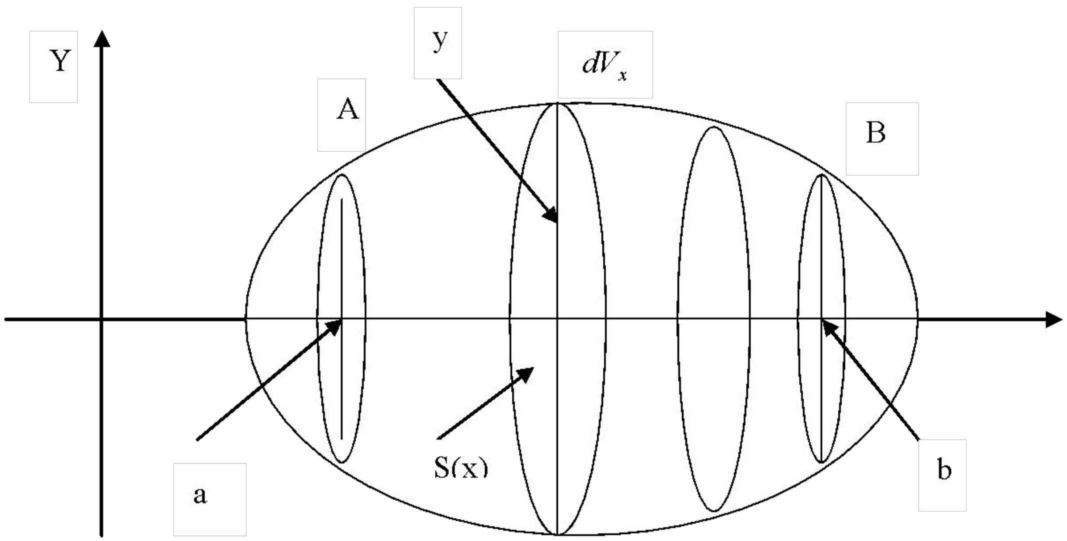
(известная формула)

$$\frac{S}{B}=\frac{x^2}{H^2}\Rightarrow S=\frac{B}{H^2}x^2\Rightarrow V=\int_0^H Sdx=\frac{B}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{B}{H^2}\frac{H^3}{3}=\frac{1}{3}BH$$

Объем тела вращения

Задача

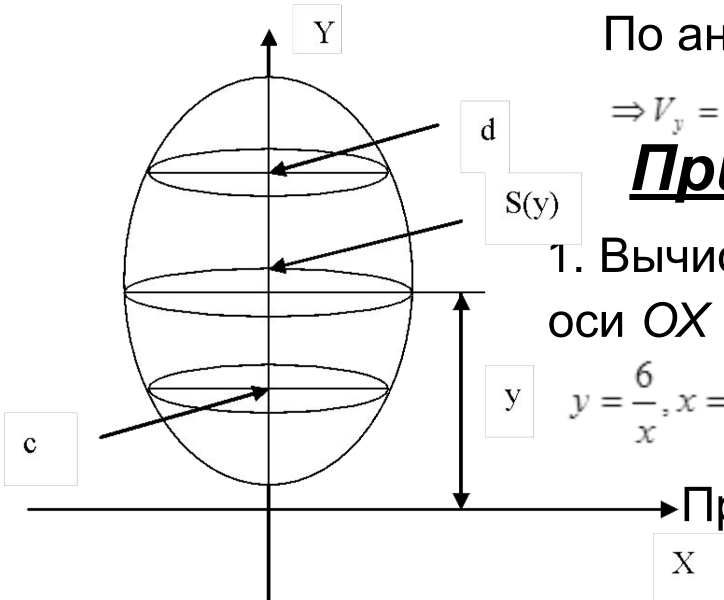
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции *aABb,* ограниченной данной непрерывной линией $y = f(x), (f(x) \geq 0)$, отрезком $a \leq x \leq b$ оси *OX* и двумя вертикалями *x=a, x=b*



Эта задача – частный случай задачи, рассмотренной выше. Здесь площадь переменного поперечного сечения S=S(x), соответствующего абсциссе x, есть круг радиуса y, поэтому $S(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и формула (1) примет вид $$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \qquad (2)$$

Задача

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* криволинейной трапеции *cCDd,* ограниченной данной непрерывной линией $x = g(y), (g(y) \geq 0)$, отрезком $c \leq y \leq d$ оси *OY* и двумя горизонталями *y=c, y=d*



По аналогии с формулой (2) $S(y) = \pi r^2 = \pi x^2 = \pi g^2(y)$

$$\Rightarrow V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d g^2(y)dy \quad (3)$$

Примеры

1. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{6}{x}, x = 1, x = 6$

Решение

Пределы интегрирования *a=1,b=6*, функция $y = f(x) = \frac{6}{x}$

$$V = \pi\int_1^6 y^2dx = \pi\int_1^6 \frac{36}{x^2}dx = -36\pi\frac{1}{x}\Big|_1^6 = -36\pi(\frac{1}{6} - 1) = 30\pi$$

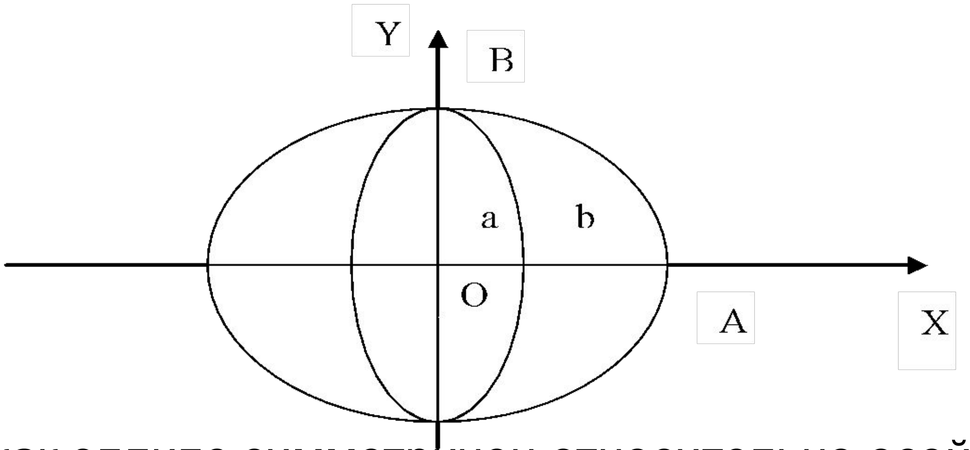
2. Вычислить объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной линией , осями координат и прямой *x=1*

Решение

Пределы интегрирования *a=0,b=1*, функция $y = f(x) = x^2 + 1$

$$V = \pi\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1 (x^2+1)^2dx = \pi(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x)\Big|_0^1 = \pi(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{28}{15}\pi$$

3. Определить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси *OX* (и *OУ*)



Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти объем, образованный вращением вокруг оси *OX* площади *OAB*, равной ¼ площади эллипса, и полученный результат удвоить.

$$\frac{1}{2}V_x=\pi\int_0^a y^2dx=\pi b^2\int_0^a(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_0^a=\pi b^2(a-\frac{a^3}{3a^2})=\frac{2}{3}\pi ab^2$$

Окончательно $V_x=\frac{4}{3}\pi ab^2$ и соответственно $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2b$

Несобственные интегралы

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (1) предполагалось, что:

1) Отрезок интегрирования *[a,b]* – конечен;
2) f(x) определена и непрерывна на отрезке *[a,b].*

Такой определенный интеграл называется *собственным* (название опускается).

Если нарушается по крайней мере одно из двух условий 1) или 2), то (1) называется ***несобственным определенным интегралом.***

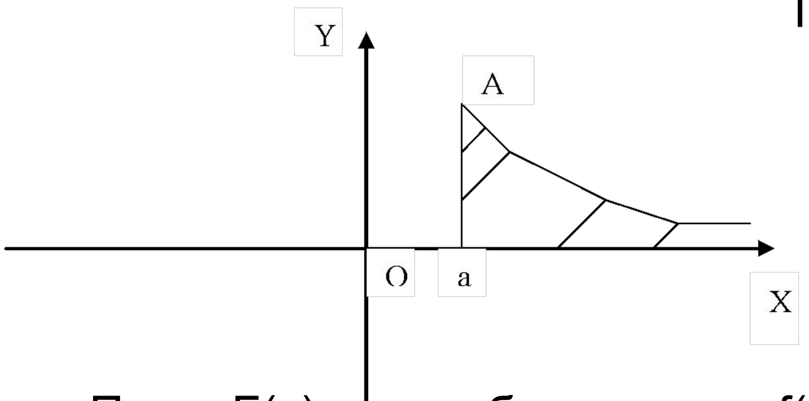
Рассмотрим смысл этого понятия для двух простейших случаев

I. Пусть f(x) непрерывна при $a \le x < +\infty$. Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Если предел (2) существует, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования, стоящий в левой части равенства (2), называется сходящимся и его значение определяется формулой (2); в противном случае равенство (2) теряет смысл, несобственный интеграл, стоящий слева, называется расходящимся и ему не приписывается никакого числового значения.

Геометрическая интерпретация



Геометрически для неотрицательной на $[a,+\infty)$ функции *f(x)* несобственный интеграл (2) представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной данной линией *y=f(x),* осью *OX* и вертикалью *x=a*.

Пусть F(x) первообразная для f(x). На основании формулы (2) имеем $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]$. Если ввести условное обозначение $F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b)$, то получим для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом обобщенную формулы Ньютона-Лейбница

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$ (3), где F'(x)=f(x).

Примеры

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx|_0^{+\infty} = arctg(+\infty) - arctg0 = \frac{\pi}{2}$

2) Установить, при каких значениях интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится и при каких расходится

Решение Так как при $\alpha \neq 1$, $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} |_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$ то $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$. Следовательно , можно сделать следующие выводы:

Если $\alpha > 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ - интеграл сходится;

Если $\alpha < 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ - интеграл расходится;

Если $\alpha = 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x |_1^\infty = \infty$ - интеграл расходится;

3.Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (второй интеграл равен $\frac{\pi}{2}$ (см. Пример 1)).

Вычислим $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} arctgx |_{-\infty}^0 = \lim_{a\to-\infty} (arctg0 - arctga) = \frac{\pi}{2}$

следовательно $\int^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, оценить его значение. Для этого могут быть полезны следующие теоремы.

Теорема 1

Если для любого x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ также сходится , при этом $\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty \varphi(x)dx$

4. Исследовать, сходится ли интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Решение

При $x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1 \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ сходится и его значение меньше или равно 1.

Теорема 2

Если для любого x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и если $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ также расходится.

5. Исследовать, сходится ли интеграл $\int_1^{\infty}\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^3}}$

Решение

При $x \geq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^{b} = +\infty$ следовательно расходится и данный интеграл.

Для функции меняющий знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

Теорема 3

Если интеграл $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$. В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

6. Исследовать, сходится ли интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x dx}{x^3}$

Решение

При $x \geq 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{b} = \frac{1}{2}$ следовательно сходится и данный интеграл.

II. Интеграл от разрывной функции

Пусть функция *f(x)* непрерывна при $a \le x < b$ и имеет точку разрыва при *x=b*. Тогда соответствующий несобственный интеграл от разрывной функции определяется формулой.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

Если предел, стоящий справа существует, то интеграл называется несобственным сходящимся, иначе расходящимся. Если *f(x)* имеет разрыв в левом конце отрезка *[a,b],* то есть при *x=a*, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

Если *f(x)* имеет разрыв в некоторой точке , то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

, если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части равенства существуют.

Пример 1 Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

Решение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c \to 1-0} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{c \to 1-0} 2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^c = -\lim_{c \to 1-0} 2(\sqrt{1-c} - 1) = 2$$

Пример 2 Вычислить $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

Решение Так как внутри отрезка интегрирования существует точка *x=0*, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл нужно представить как сумму двух слагаемых:

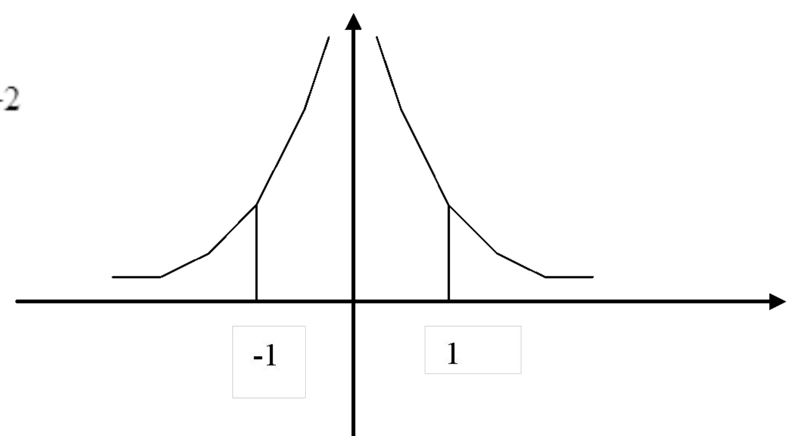
$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}$ Вычислим данные интегралы

$\lim_{\varepsilon_1\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1}=\lim_{\varepsilon_1\to-0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{-1}\right)=\infty$. Следовательно, на участке *[-1;0]* интеграл расходится

$\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon_2\to-0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty$. Следовательно, на участке *[0;1]* интеграл расходится. Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке *[-1;1].*

Отметим, что, если бы стали вычислять интеграл, не учитывая разрыв подынтегральной функции в точке x=0, то получили бы неверный результат.

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-(\frac{1}{1}-\frac{1}{-1})=-2$



Замечание Если *f(x),* определенная на *[a,b],* имеет внутри этого интеграла конечное число точек разрыва $a_1, a_2, ..., a_n$, то интеграл от *f(x)* на *[a,b]* определяется следующим образом:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_n}^b f(x)dx$, если каждый интеграл в правой части равенства сходится. Если же, хотя бы один из этих интегралов расходится, то расходится и исходный интеграл.

Имеют место теоремы

Теорема 1 Если на *[a,b]* функции $f(x), \varphi(x)$ разрывны в точке *b*, причем во всех точках *[a,b]* выполняется неравенство $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$ и если $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также сходится.

Теорема 2 Если на *[a,b]* функции $f(x), \varphi(x)$ разрывны в точке *b*, причем во всех точках *[a,b]* выполняется неравенство $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ и если $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также расходится.

Теорема 3 Если на *[a,b]* функции знакопеременна и разрывна в точке *b* и если $\int_a^b | f(x) | dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также сходится. В качестве функций, с которыми удобно сравнивать функции, стоящие под знаком интеграла, часто берут $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$. Легко проверить, что $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$

<u>Пример 3</u> Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}$

<u>Решение</u> Подынтегральная функция разрывна в точке x=0. Сравнивая ее с функцией $\frac{1}{\sqrt{x}}$ имеем $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ существует. Следовательно, интеграл от меньшей функции также существует.