спецификация

Множественная регрессия

L/O/G/O

www.themegallery.com

Множественная регрессия

- **Уравнение множественной регрессии в натуральном масштабе:**

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p$$

  - Где *Y* – зависимая переменная;
  - $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – независимые переменные;
    a и $b_1, b_2, \ldots, b_p$ – параметры (коэффициенты) модели

Напоминание:

- Y, x_1, $x_2 \ldots x_p$ – изучаемые показатели или явления;
- a, b_1, $b_2 \ldots b_p$ – числа, характеризующие связь между у и х,

рассчитываются по формулам или в столбце «Коэффициенты» пакета анализа «Регрессия» в Excel

Множественная регрессия

- **Регрессионная модель в стандартизованном масштабе :**

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \ldots + \beta_p t_{x_p} + \varepsilon$$

– Где $t_y, t_{x_1}, t_{x_2}, \ldots, t_{x_p}$ – стандартизованные переменные;

для которых среднее значение равно нулю, а среднее квадратическое отклонение равно единице:

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad t_{x_j} = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \quad j = \overline{1,n}$$

β_j – стандартизованные коэффициенты регрессии, или β – коэффициенты

Расчет:

$$
\begin{cases}
\beta_1 & + \beta_2 r_{x_2 x_1} & + \beta_3 r_{x_3 x_1} & + \beta_p r_{x_p x_1} & = r_{yx_1} \\
\beta_1 r_{x_1 x_2} & + \beta_2 & + \beta_3 r_{x_3 x_2} & + \beta_p r_{x_p x_2} & = r_{yx_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\beta_1 r_{x_1 x_p} & + \beta_2 r_{x_2 x_p} & + \beta_3 r_{x_3 x_p} & + \beta_p & = r_{yx_p}
\end{cases}
$$

Частный случай: наличие 2х факторов x_1 и x_2

$$
\begin{cases}
\beta_1 + \beta_2 r_{x_1 x_2} = r_{yx_1} \\
\beta_1 r_{x_1 x_2} + \beta_2 = r_{yx_2}
\end{cases}
$$

$r_{x_1 x_2}$ r_{yx_1} r_{yx_2} - коэффициенты корреляции

Взаимосвязь уравнений в стандартизованном и натуральном масштабах:

В парной зависимости стандартизованный коэффициент регрессии есть линейный коэффициент корреляции *r*

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \ldots - b_p\bar{x}_p$$

$$b_j = \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}}$$

$$\bar{Э}_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$$

Интерпретация коэффициентов:

- **В модели множественной регрессии в натуральном и стандартизированном масштабах, а также по эластичности:**

$b_1, b_2 \ldots b_p$	показывают на сколько **единиц** изменится *y* при изменении x_i на 1 **единицу**, при неизменности прочих факторов
$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_p$	на сколько значений **с.к.о.** изменится в среднем *y*, если соответствующий фактор x_j изменится на одну **с.к.о**. при неизменном среднем уровне других факторов
$Э_1, Э_2 \ldots Э_p$	Эластичность показывает на сколько **%** в среднем изменится *y* при изменении x_i на 1**%**

Частная корреляция

Коэффициенты частной корреляции

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния других факторов, включенных в уравнение регрессии.

Задача состоит в том, чтобы:

найти «чистую» корреляцию между двумя переменными, исключив (линейное) влияние других факторов.

Связь с коэффициентом детерминации R2

$$r^2_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{R^2 - r^2_{yx_2}}{1 - r^2_{yx_2}}$$

- где r_{yx_2} - обычный коэффициент корреляции

В коэффициенте частной корреляции через точку указываются факторы, влияние которых устраняется

Расчет по рекуррентной формуле:

Влияние парной корреляции на коэффициент детерминации

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}$$

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}$$

$$R^2 = \beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2}$$

$$r^2_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{R^2 - r^2_{yx_2}}{1 - r^2_{yx_2}}$$

$$r^2_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{R^2 - r^2_{yx_1}}{1 - r^2_{yx_1}}$$

Тест на обоснованность исключения новых *k* факторов из модели

Гипотезы:

$$H_0: R_1^2 = R_2^2 \qquad H_1: R_1^2 > R_2^2$$

Наблюдаемое и критическое значение

$$F_{набл} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - p - 1}{k} \qquad F_{кр} = F(\alpha; k; n - p - 1)$$

Вывод:

Fнабл<Fкр = H0 (исключение **обоснованно**)

Fнабл>Fкр то H1 (исключение **не обоснованно**)

R_1 – коэффициент детерминации *до* исключения;

R_2 – коэффициент детерминации *после* исключения;

n – объем выборки;

p – количество независимых факторов *до* исключения;

k – количество исключаемых факторов

Тест на обоснованность включения новых *k* факторов в модель

Гипотезы:

$$H_0 : R_2^2 = R_1^2 \qquad H_1 : R_2^2 > R_1^2$$

Наблюдаемое и критическое значение

$$F_{набл} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{n - p - 1}{k} \qquad F_{кр} = F(\alpha; k; n - p - 1)$$

Вывод:

Fнабл<Fкр = H0 (включение **не обоснованно**)

Fнабл>Fкр то H1 (включение **обоснованно**)

R_1 – коэффициент детерминации *до* включения;
R_2 – коэффициент детерминации *после* включения;
n – объем выборки;
p – количество независимых факторов *после* включения;
k – количество включаемых факторов

Тест Чоу на наличие структурных сдвигов:

$$s_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$s_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2$$

$$s_2 = \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i^2$$

Гипотезы:

$$H_0 : s_0 = s_1 + s_2; \quad H_1 : s_0 > s_1 + s_2$$

Наблюдаемое и критическое значение

$$F_{набл} = \frac{s_0 - (s_1 + s_2)}{s_1 + s_2} \cdot \frac{n - 2p - 2}{p + 1} \qquad F_{кр} = F(\alpha; p+1; n-2p-2)$$

Вывод:

Fнабл<Fкр = H0 (структурных сдвигов **нет**)

Fнабл>Fкр то H1 (структурные сдвиги **есть**)

s_0 – сумма квадратов остатков всей выборки;
s_1 – сумма квадратов остатков первой подвыборки;
s_2 – сумма квадратов остатков второй подвыборки;
n – объем выборки;
p – количество независимых факторов в модели

Тест Спирмена на наличие гетероскедастичности:

Гипотезы:

$H_0 : r_{x,e} = 0$ $\qquad$ $H_1 : r_{x,e} \neq 0$

Наблюдаемое и критическое значение

$$t_{набл} = \frac{r_{x,e}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,e}^2}} \qquad t_{крит}(\alpha; n-2)$$

Вывод:

$t_{набл} < t_{кр}$ = H0 (гомоскедастичность)

$t_{набл} > t_{кр}$ то H1 (гетероскедастичность)

$$r_{x,e} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$\mathbf{r_{x,e}}$ – коэффициент ранговой корреляции Спирмена;

d – разность рангов x_i и модулей остатков $|e_i|$;

Тест Голдфелда – Квандта на наличие гетероскедастичности :

Гипотезы:

$$H_0 : s_1 = s_3; \quad H_1 : s_3 > s_1$$

Наблюдаемое и критическое значение

$$F_{набл} = \frac{s_3}{s_1} \qquad F_{кр} = F(\alpha; k - p - 1; k - p - 1)$$

Вывод:

Fнабл<Fкр = H0 (гомоскедастичность)

Fнабл>Fкр то H1 (гетероскедастичность)

$$s_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2$$

$$s_3 = \sum_{i=n-2k+1}^{n} e_i^2$$

***s*$_1$** – сумма квадратов остатков первой подвыборки;
***s*$_2$** – сумма квадратов остатков второй подвыборки;
k – объем подвыборки;
p – количество независимых факторов в модели

Тест Глейзера на гетероскедастичность

Тест основан на проверке статистической значимости коэффициентов регрессии моделей зависимости остатков от *x*

H0: b=0 ***p-значение > α*** **H1: b≠0** ***p-значение < α***

$|e| = a + bx$

$e = a + bx$

$\sqrt{e} = a + bx$

$e^2 = a + bx$

- Если хоть в одной из представленных моделей коэффициент регрессии статистически значим (***p-значение < α***), то существует гетероскедастичность

Корректировка гетероскедастичности
Метод взвешенных наименьших квадратов

- **Предпосылка:**

Пересчитываются коэффициенты модели линейной регрессии если известны дисперсии остатков для каждого наблюдения σ_i^2

.

Ввод новых переменных

$$y_i^* = \frac{y_i}{\sigma_i}; \quad x_i^* = \frac{x_i}{\sigma_i}; \quad z_i = \frac{1}{\sigma_i}$$

Оценка параметров регрессии

$$y^* = az + bx^*$$

*свободный член равен нулю (константа-ноль)

Возврат к исходной модели

$$y = a + bx$$

*модель гомоскедастична

Корректировка гетероскедастичности
<u>Обобщенный</u> метод наименьших квадратов

- **Предпосылка:**

Пересчитываются коэффициенты модели линейной регрессии, дисперсии остатков для каждого наблюдения не известны

.

Ввод новых переменных

$$y_i^* = \frac{y_i}{\sqrt{x_i}} \qquad z_i^* = \frac{1}{\sqrt{x_i}} \qquad x_i^* = \frac{x_i}{\sqrt{x_i}}$$

Оценка параметров регрессии

$$y^* = az^* + bx^*$$

*свободный член равен нулю (константа-ноль)

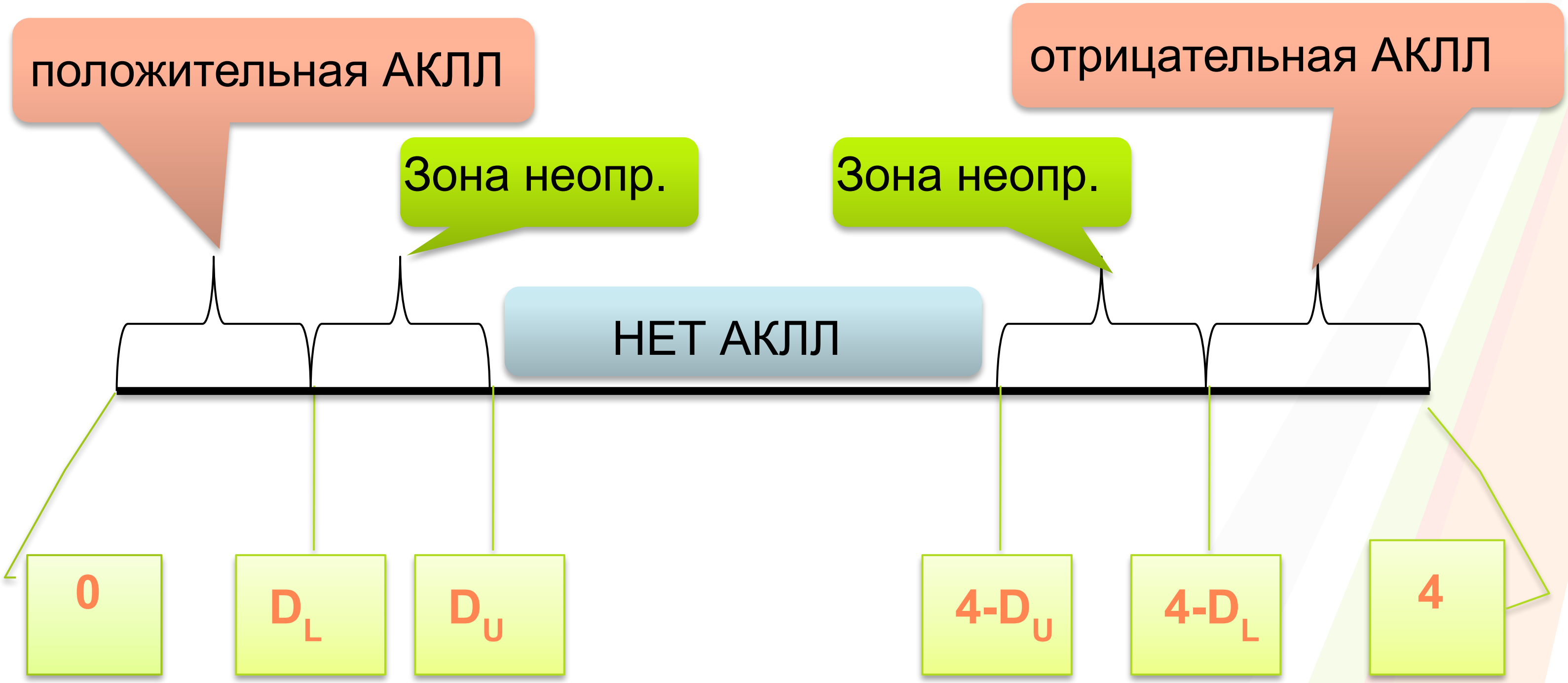
Возврат к исходной модели

$$y = a + bx$$

*модель гомоскедастична

Тест Дарбина – Уотсона на наличие автокорреляции :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$



Корректировка автокорреляции
Авторегрессионная схема первого порядка *AR(1)*

- **Предпосылка:**

Применяется для пересчета коэффициентов модели, если автокорреляция вызвана внутренними свойствами ряда $\{e_t\}$

Определение ρ и ввод новых переменных

$$e_t = \rho e_{t-1}$$

$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}; \quad x_t^* = x_t - \rho x_{t-1}$$

Оценка параметров регрессии

$$y_t^* = a^* + b x_t^*$$

Возврат к исходной модели

$$a = \frac{a^*}{1-\rho} \qquad y = a + bx$$