

# Математическая логика

## Лекция 1

### 1. Множества.

#### 1.1. Способы задания множеств.

#### 1.2. Подмножества.

#### 1.3. Операции над множествами.

### 2. Соответствия.

#### 2.1. Прямое произведение множеств.

#### 2.2. Понятие соответствия.

#### 2.3. Мощность множества.

### 3. Отношения.

#### 3.1. Свойства отношений.

# Историческая справка

Считается, что первые работы по логике появились в V в. до н. э.

Впервые как самостоятельную теорию ее оформил греческий философ Аристотель в своем труде «Аналитики», где систематизировал известные до него сведения, и эта система впоследствии стала называться формальной логикой.

С этого времени формальная логика просуществовала без особых изменений почти двадцать столетий.

Впоследствии возникла идея и о том, что, записав исходные рассуждения формулами, похожими на математические, можно заменить все цепочки логического вывода формальными «вычислениями».

В Средние века даже делались попытки создания машин «логического вывода».

Развитие математики выявило недостатки логики, разработанной Аристотелем, и потребовало дальнейшего ее развития.

Введение строения логики на математической основе была предложена немецким математиком Г. Лейбницем, который считал, что основные понятия логики возможно обозначить символами, соединяющимися по особым правилам, что позволит всякое рассуждение заменить вычислением.

Первая реализация идей Лейбница принадлежит английскому ученому Дж. Булю (середина XIX в.), создавшему алгебру, в которой буквами обозначены высказывания.

Его алгебра получила название алгебры высказываний. Введение в логику символических обозначений послужило основой для создания новой науки — математической логики.

Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и использовать вычислительный аппарат в решении задач, ранее практически недоступных человеческому мышлению, что существенно расширило область логических исследований.

Функции алгебры логики называются также булевыми функциями, двойчными функциями или переключательными функциями.

# Курсовая работа

## по дисциплине "Математическая логика"

Закрепление практических навыков при решении задачи синтеза комбинационных схем.

В качестве критерия эффективности синтезируемой схемы в рамках курсовой работы принята цена схемы по Квайну. Решение задач минимизации, факторизации и декомпозиции булевых функций.

Для решения задачи минимизации применяются два метода: метод Квайна-Мак-Класки, основанный на кубическом представлении булевых функций и являющийся формализованным, и метод минимизирующих карт (карт Карно), который в большой степени является интуитивным.

В курсовой работе в качестве исходной задается не полностью определенная булева функция от пяти переменных. Итогом курсовой работы являются комбинационные схемы, реализующие заданную функцию. Часть схем строится с учетом ограничения на коэффициент объединения по входам. Для каждой схемы определяются цена схемы по Квайну и задержка и проводится анализ схемы путем определения ее реакции на нескольких произвольных наборах входных сигналов.

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

## 1. Множества

**Множеством** называется собрание, совокупность объектов, объединенных по какому-нибудь общему признаку, свойству. *Например:* множество студентов одной группы, множество целых чисел.

- Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами**.
- Множества обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита. *Например:* A, B, C, ..., X, Y, ...
- Элементы множества обозначаются строчными (малыми) буквами латинского алфавита. *Например:* a, b, c, ..., x, y, ...,  $a_1, a_2, \dots$
- Множества бывают: конечные, бесконечные и пустые.
- *Например:* множество букв русского алфавита конечно. Множество целых чисел бесконечно. Множество целых корней уравнения  $2x + 5 = 0$  пустое.
- Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается знаком  $\emptyset$ .
- *Объекты, входящие во множество, определенные. Это означает, что для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет.*
- *Объекты, входящие во множество, различимы между собой. Следовательно, во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов.*
- *Все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое. Этим подчеркивается, что все объекты рассматриваются в совокупности, а от свойств отдельных объектов абстрагируются.*

## 1.1. Способы задания множеств

Конечное множество может быть задано перечислением входящих в него и разделенных запятой элементов, *например*:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , множество  $B$  решений уравнения  $x^2 - 6x + 5 = 0$  можно записать так:  $B = \{1, 5\}$ .

Любое множество может быть задано при помощи правила, позволяющего определить, является ли данный объект элементом множества или нет. *Например*: Множество целых чисел на отрезке от 1 до 5 запишется следующим образом:  $C = \{z \mid 1 \leq z \leq 5, z \in \mathbb{Z}\}$ . Множество натуральных чисел, больше 10:  $X = \{x \mid x > 10, x \in \mathbb{N}\}$ .

## 1.2. Подмножества

Множество  $B$  называется **подмножеством** множества  $A$ , если каждый элемент  $B$  одновременно является и элементом множества  $A$ , обозначается знаком  $\subset$  ( $B \subset A$ ). *Например*:  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{4, 6, 8\}$ .  $B$  есть подмножество  $A$ , т.е.  $B \subset A$ .

Множества, которые состоят из одних и тех же элементов называют **равными**. *Например*,  $C = \{x; y; z\}$ ,  $D = \{x; y; z\}$  и записывают  $C = D$ .

Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют **универсальным** или **универсумом**. Будем обозначать данное множество буквой **U**.

Наглядно отношения между множествами изображают (*рис. 1*) при помощи **кругов Эйлера** (или **диаграммами Эйлера – Венна**).

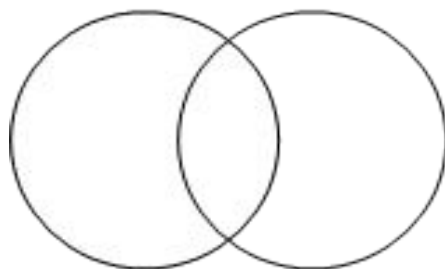


Рис. 1. Круги Эйлера

Универсальное множество будем изображать прямоугольником с буквой **U**, внутри которого будут размещаться те или иные множества (*рис. 2*).

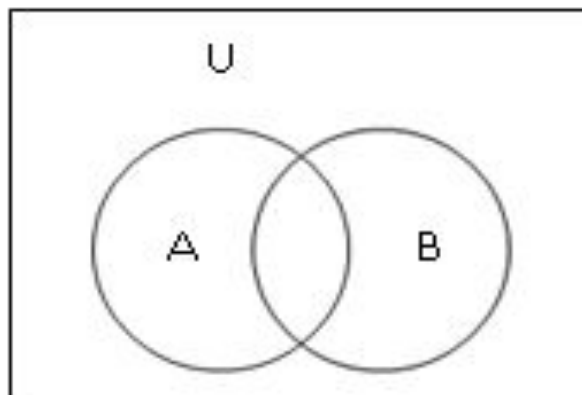


Рис. 2. Универсальное множество

### 1.3. Операции над множествами

Объединением двух множеств  $A$  и  $B$  называется такое множество  $C$ , которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ .

Обозначается:  $A \cup B$ , (рис. 3).

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

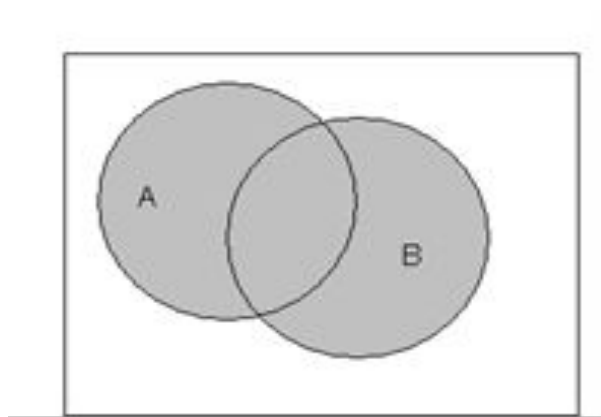


Рис. 3. Объединение множеств  $C = A \cup B$

*Например:*  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и

$B = \{x, y, z\}$ , то  $C = A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$ .

Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – несколько множеств, то их объединение это множество  $C$ , состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из них:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } x \in A_n\}.$$



**Пересечением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $D$ , состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам  $A$  и  $B$  одновременно. Обозначается:  $A \cap B$ , где символ  $\cap$  - знак пересечения множеств (рис. 4). Определение так же можно записать следующим образом:  $D = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ .

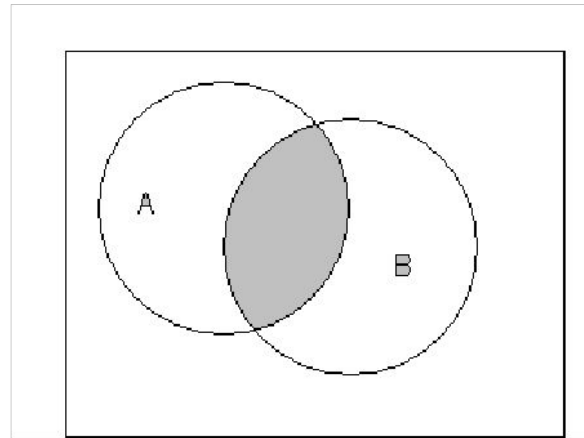


Рис. 4. Пересечение множеств  $D = A \cap B$

*Например:*  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и

$B = \{b, d, f, z\}$ , то  $D = A \cap B = \{b, d, f\}$ .

Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - несколько множеств, то их пересечение, это множество, представляющее их общую часть:

$$D = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in \forall A_i, i = \overline{1..n}\}.$$

**Разностью** двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ . Обозначается:  $F = A \setminus B$ , (рис. 5).

$$F = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

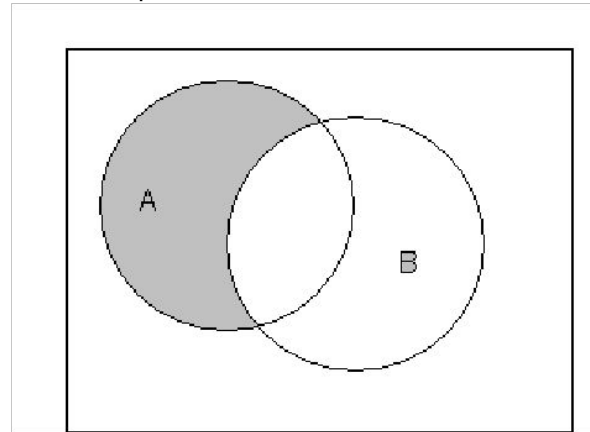


Рис. 5. Разность множеств  $F = A \setminus B$

*Например:*  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и  
 $B = \{b, d, f, z\}$ , то  $F = A \setminus B = \{a, c, e\}$ .

Пусть есть некоторое множество  $A$ . Говорят, что задано **разбиение** множества  $A$  на классы  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , если

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i \quad \text{и} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{для всех } i \text{ и } j.$$

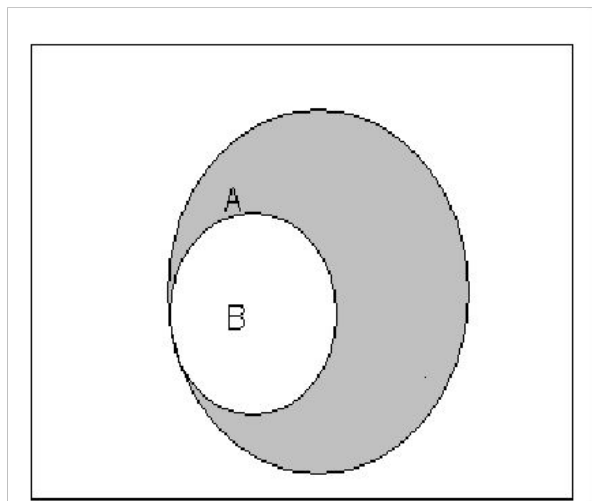


Рис. 1.4. Дополнение к  $B$  до  $A$   
 $(B \subset A) \setminus B = A \setminus B$

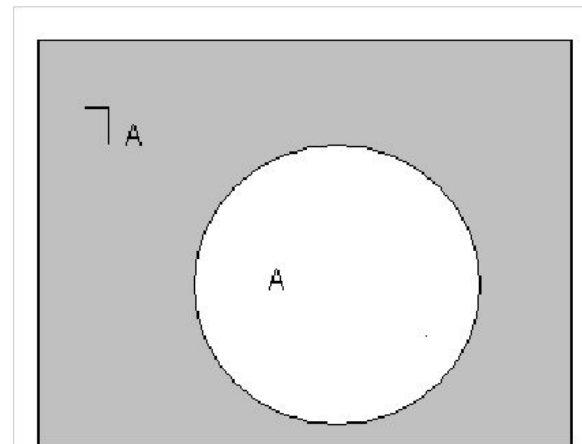


Рис. 1.5. Дополнение  $A$  до универсума,  
то есть  $\bar{A}$ .

### 1.3. Мощность множества

**Мощность** множества характеризует количество элементов этого множества. Число элементов в конечном множестве  $A$  называется **кардинальным числом** и обозначается  $|A|$ . *Например*, мощность множества  $A = \{3, 5\}$  равна  $|A| = 2$ . Подсчет элементов конечного множества заключается в установлении взаимно-однозначного соответствия между этими элементами и последовательностью натуральных чисел.

**Теорема.** Множества  $A$  и  $B$  имеют одинаковую мощность, если между этими множествами установлено взаимно-однозначное соответствие.

Множества **равномощны**, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Бесконечное множество  $A$  называется **счетным**, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

## Свойства операций над множествами

Перечисляемые ниже свойства операций над множествами справедливы для любых множеств, поэтому их часто называют законами, часть которых имеет специальные наименования.

1. Коммутативный или переместительный закон имеет место, как для операции объединения, так и для операции пересечения:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$$

2. Ассоциативный или сочетательный закон также имеет место и для операции объединения и для операции пересечения:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

Так как порядок выполнения операций несущественен, то скобки в записи опускают.

3. Дистрибутивный или распределительный закон:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

4. Закон идемпотентности:

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$$

5. Закон поглощения:

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

6. Закон двойственности де Моргана:

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$7. A \cup U = U, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$8. A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

$$9. \forall A: A \cup B = A \rightarrow B = \emptyset, \quad \forall A: A \cap B = A \rightarrow B = U.$$

$$10. \text{Если } A \cup B = U \text{ и одновременно } A \cap B = \emptyset \rightarrow B = \overline{A}.$$

$$11. \overline{\overline{U}} = \emptyset, \quad \overline{\overline{\emptyset}} = U$$

$$12. \overline{\overline{A}} = A.$$

**Прямое произведение множеств.** Прямым произведением двух множеств  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \times B$ ) называется множество, состоящее из всех тех и только тех пар, первая компонента которых принадлежит  $A$ , вторая  $B$ . Если первый сомножитель имеет  $n$  элементов, а второй -  $m$ , то их прямое произведение имеет  $nm$  элементов, каждый из которых - упорядоченная пара.

Например, если  $A = \{1,3\}$  и  $B = \{1,4,5\}$ , то  $A \times B = \{(1,1), (1,4), (1,5), (3,1), (3,4), (3,5)\}$ .  
В общем случае, если  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , то  $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), (a_2, b_1), \dots, (a_n, b_m)\}$ .

Если все множества  $A_i$  равны между собой, то есть  $A_1 = A_2 = \dots = A_n \equiv A$ , то прямое произведение множеств обозначается как  $A^n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A \times A \times \dots \times A = A^n.$$

Например: пусть  $\mathbb{R}$  - множество действительных чисел, тогда  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  - множество упорядоченных пар вида  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ . Геометрически  $\mathbb{R}$  - множество точек числовой оси, тогда  $\mathbb{R}^2$  - множество точек плоскости, где  $x$  и  $y$  - координаты этих точек. Поскольку координатное представление точек плоскости впервые было введено Р.Декартом (1596-1650), то прямое произведение часто называют декартовым произведением множеств.

## 1. Отношения

Подмножество прямого произведения  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  называется  **$n$ -местным отношением  $R$**  на множестве  $M$ , т.е.  $R \subset M$ . Это означает, что рассматриваются некоторые  $n$ -ки элементов из одного и того же множества  $M$  и эти элементы находятся между собой в отношении  $R$ . Отношения задаются чаще всего в высказывательной форме.

Если  $n=1$  ( $M=M_1$ ), то отношение называется **унарным**. Одноместное отношение есть подмножество  $M$ . Установить на  $M$  унарное отношение означает приписать некоторым его элементам признак  $R$ . Примеры унарных отношений: "быть студентом" на множестве людей, "быть целым числом" на множестве вещественных чисел. Если  $n=2$  ( $M = M_1 \times M_2$ ), то отношение называется **бинарным**. Эти отношения обычно записывают как  $\{x R y \mid x \in M_1, y \in M_2 \text{ или } x, y \in M\}$  и говорят, что элементы  $x$  и  $y$  из множества  $M$  находятся между собой в отношении  $R$ . *Например*: "быть сыном", "прямая  $a$  перпендикулярна прямой  $b$ ", " $x$  меньше  $y$ ".

Рассматривают тернарные ( $n=3$ ), тетрарные ( $n=4$ ), ...,  $n$ -арные отношения.

Отношение называется **обратным** к отношению  $R$  (обозначается  $R^{-1}$ ), если  $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$ . *Например*:  $R = \{(x, y) \mid x - y = 2, x, y \in \mathbb{R}\}$ .

$R^{-1} = \{(x, y) \mid y - x = 2, x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Композицией** двух отношений  $R$  и  $P$  называется отношение

$R \circ P = \{(x, z) \mid \text{существует такое } y, \text{ что } (x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in P\}$ .

## Свойства отношений

Отношение  $R$  называется **рефлексивным** на множестве  $X$ , если для любого  $x \in X$  выполняется  $x R x$ . *Например*, "жить в одном городе" на множестве людей. Это отношение рефлексивно, так как каждый живет в одном городе сам с собой.

Отношение  $R$  называется **антирефлексивным** на множестве  $X$ , если ни для какого  $x \in X$  не выполняется  $x R x$ . *Например*, "быть сыном" на множестве людей.

Отношение  $R$  называется **симметричным** на множестве  $X$ , если для любых  $x, y \in X$  из  $x R y$  следует  $y R x$ . *Например*, "учиться в одной группе" множество студентов. Это отношение симметрично, так как если  $x$  учится в одной группе с  $y$ , то и  $y$  учится в одной группе с  $x$ .

Отношение  $R$  называется **асимметричным** на множестве  $X$ , если для любых  $x, y \in X$  из двух соотношений  $x R y$  и  $y R x$  может выполняться не более одного. *Например*, "быть меньше" на множестве чисел.

Отношение  $R$  называется **антисимметричным** на множестве  $M$ , если для любых  $x, y \in X$  одновременно выполняются соотношения  $x R y$  и  $y R x$ , то  $x = y$ . *Например*, "быть  $\leq$ " на множестве чисел.

Отношение  $R$  называется **транзитивным** на множестве  $X$ , если для любых  $x, y, z \in X$  из  $x R y$  и  $y R z$  следует  $x R z$ . *Например*, "быть старше" на множестве людей. Это отношение транзитивно, так как если  $x$  старше  $y$  и  $y$  старше  $z$ , то  $x$  старше  $z$ .

Отношение  $R$  называется **отношением эквивалентности** на множестве  $X$ , если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно на множестве  $X$ . *Например*, "учиться в одной группе" на множестве студентов.



Пусть  $R$  – отношение эквивалентности на множестве  $X$  и  $x \in X$ . **Классом эквивалентности**, порожденным элементом  $x$ , называется подмножество множества  $X$ , состоящее из тех элементов  $y \in X$ , для которых  $x R y$ . Класс эквивалентности, порожденный элементом  $x$ , обозначается через  $[x]$ . Таким образом,  $[x] = \{y \in X \mid x R y\}$ .

Классы эквивалентности образуют **разбиение** множества  $X$ , т. е. систему непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которых совпадает со всем множеством  $X$ .

*Например,* Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов одной группы.

Отношение  $R$  называется **отношением частичного порядка** на множестве  $X$ , если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно на множестве  $X$ . Множество  $X$  в этом случае называют частично упорядоченным и указанное отношение обозначают символом  $\leq$ . Например, "быть делителем" на множестве целых чисел - частично упорядочено.

*Пример.* На множестве  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  задано бинарное отношение  $R = \{(x, y) \mid (x - y) \text{ делится на } 3; x, y \in A\}$ . Выяснить какими свойствами обладает это отношение.

*Решение.* Зададим отношение  $R$  перечислением всех элементов:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2)\}.$$

Отношение  $R$  рефлексивно, так как  $(x, x) \in R$  для любого  $x \in A$  (имеются пары:  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ ). Отношение  $R$  симметрично, так как  $(x, y) \in R$  и  $(y, x) \in R$  для любых  $x, y \in A$  (имеются пары:  $(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2)$ ). Отношение  $R$  транзитивно, так как для пар  $x, y$  и  $y, z$  есть пара  $x, z$  (для пар  $(1, 4), (4, 1)$  имеется пара  $(1, 1)$ , для пар  $(2, 5), (5, 2)$  имеется пара  $(2, 2)$ ).

Итак, отношение  $R$  обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности – это подмножества множества  $A$ :

$$[1] = \{1, 4\}, \quad [2] = \{2, 5\}, \quad [3] = \{3\}.$$

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

