

Тема **1.** Элементы теории вероятностей и статистики

Решение задач на доверительные интервалы

Интервальные оценки параметров

Выборочные оценки параметров являются СВ.

На основании выборочных оценок можно установить интервалы, внутри которых с некоторой вероятностью находятся истинные значения параметров.

Интервальной оценкой параметра ϑ называется интервал $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное значение параметра.

Интервал $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ называется доверительным интервалом, а вероятность γ – доверительной вероятностью (надежность доверительного интервала).

Вероятность $\alpha = 1 - \gamma$ называется уровнем значимости.

Интервальные оценки параметров

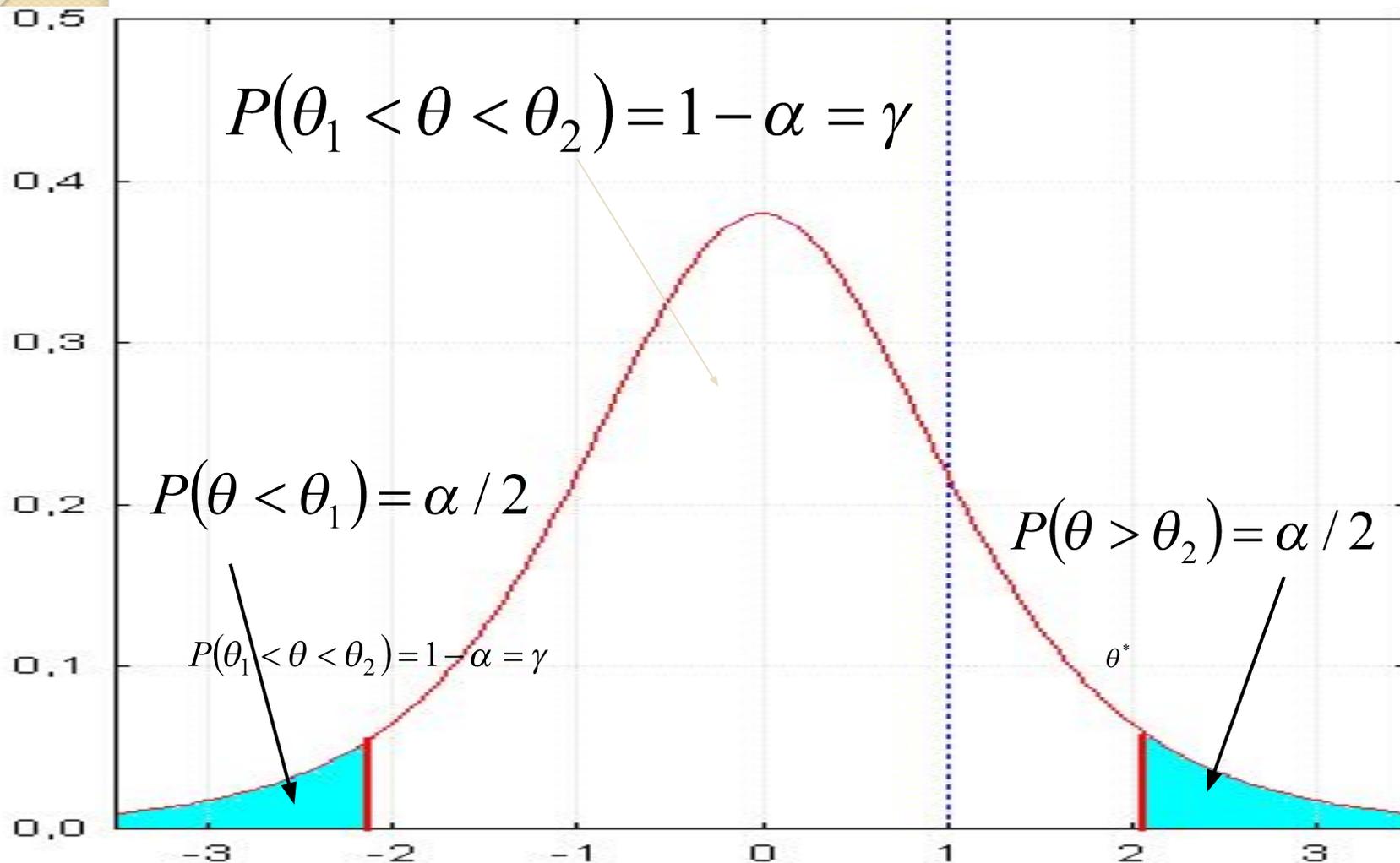
$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha = \gamma$$

$$P(\theta < \theta_1) = P(\theta > \theta_2) = \alpha / 2$$

$$\alpha = 1 - \gamma = 0,1; \quad 0,05; \quad 0,01$$

Доверительный интервал

$f(\theta^*)$



3 типа задач на доверительные интервалы (ДИ)

- 1. Построение ДИ для математического ожидания при **известной** генеральной дисперсии (СКО)
- 2. Построение ДИ для математического ожидания при **неизвестной** генеральной дисперсии (СКО), но известной исправленной выборочной дисперсии (СКО)
- 3. Построение ДИ для генеральной дисперсии (СКО) при известной выборочной исправленной дисперсии (СКО)

Доверительный интервал для МО нормальной СВ при известной генеральной дисперсии

1)

2) $X \sim N(m, \sigma)$

$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

3) $U = \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

4) $\bar{x} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

5) $\Phi(u_{\alpha/2}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$

Точность (предельная погрешность) оценки МО:

1)

$$\varepsilon = u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2)

Задача №1

$n=25, \quad X \sim N(m, 10).$

1. Находим критическую точку СНЗР

$$\Phi(u_{\alpha/2}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

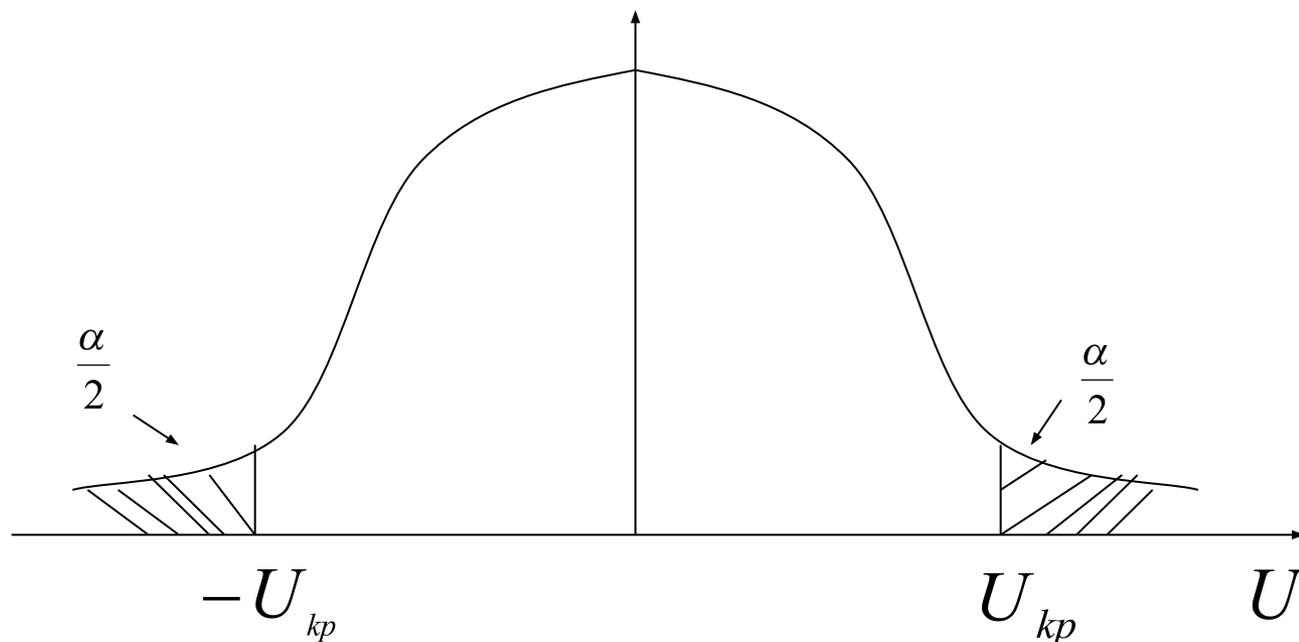
2. Вычисляем предельную ошибку для МО

$$\varepsilon = u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3. Определяем ДИ для МО

$$\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon$$

1. Вычисление критической точки СНЗР (двусторонняя критическая область)



$$U_{kp} = \text{НОРМСТОБР} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

2. Вычисление предельной ошибки

$$\varepsilon = \text{ДОВЕРИТ} (\alpha; \sigma; n)$$

2. Доверительный интервал для мат. ожидания нормальной СВ при неизвестной генеральной дисперсии

1) $X \sim N(m, \sigma)$

2) $m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S = \sqrt{S^2}$

3) $T = \frac{\bar{x} - m}{S / \sqrt{n}}$ - Распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

4) $\bar{x} - t(\alpha / 2, n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t(\alpha / 2, n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Точность (предельная погрешность) оценки МО:

1)

$$\varepsilon = t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

2)

$$t(\alpha / 2; n - 1) = \text{СТЪЮДРАСПОБР}(\alpha; n - 1)$$

Доверительный интервал для прогнозируемого МО нормальной СВ при неизвестной дисперсии

1) Задана выборка : (x_1, x_2, \dots, x_n)

Построить доверительный интервал для x_{n+1}

2) Доверительный интервал:

$$\bar{x} - t(\alpha / 2, n - 1) \cdot S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < x_{n+1} < \bar{x} + t(\alpha / 2, n - 1) \cdot S \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Задача №2

$n=55, \quad X \sim T(\alpha, n-1).$

1. Находим критическую точку РС

$$t(\alpha / 2, n - 1) = \text{СТЪЮДРАСПОБР}(\alpha, n - 1)$$

2. Вычисляем предельную ошибку для МО

$$\varepsilon = t_{\alpha / 2, n - 1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

3. Определяем ДИ для МО

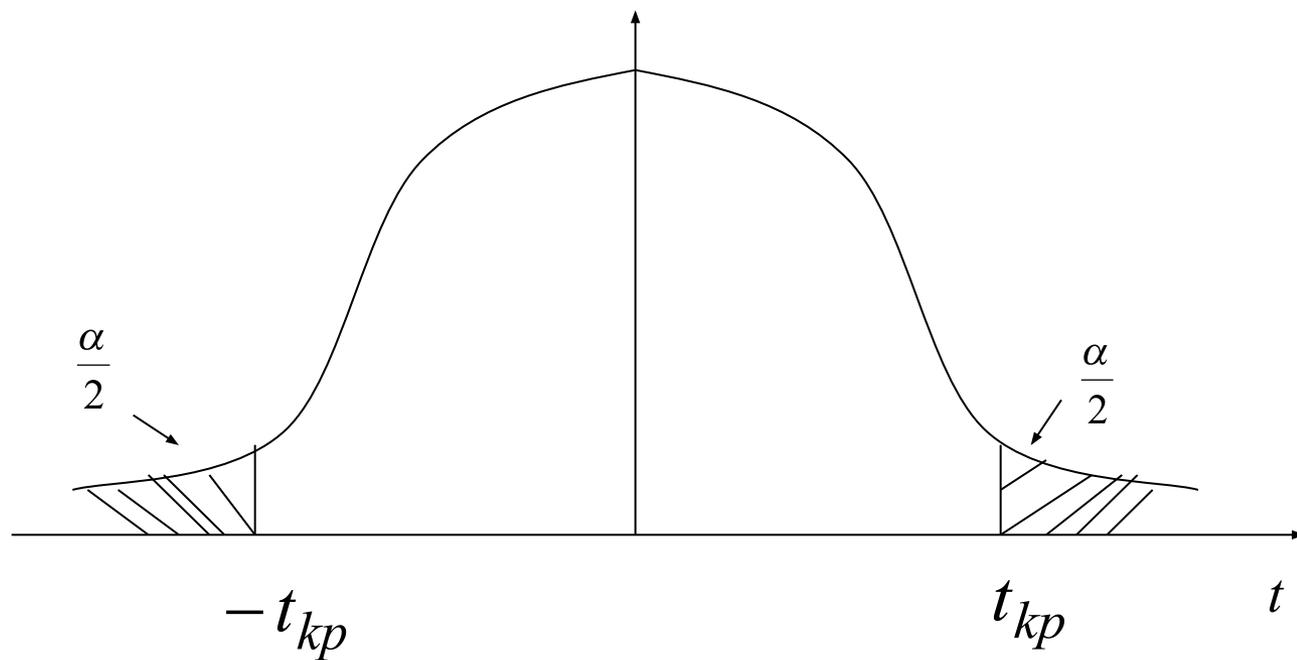
$$\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon$$

Задача №2

4. Вычисление прогноза

$$\bar{x} - t(\alpha / 2, n - 1) \cdot S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < x_6 < \bar{x} +$$
$$+ t(\alpha / 2, n - 1) \cdot S \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Вычисление критической точки РС (двусторонняя критическая область)



$$t_{kp} = \text{СТЮДРАСПОБР}(\alpha; n - 1) = t_{табл}(\alpha / 2, n - 1)$$

3. Доверительный интервал для дисперсии нормальной СВ при неизвестном МО

1) $X \sim N(m, \sigma^2)$

2) $m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

3) $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ - Распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы

4) $\frac{S^2(n-1)}{\chi^2(\alpha/2, n-1)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2(1-\alpha/2, n-1)}$

Задача №2

$n=10, \quad x \sim \chi^2(\alpha, n-1).$

1. Находим критические точки РХК

$$\chi^2(\alpha/2, n-1) = \text{ХИ2ОБР}(\alpha/2, n-1)$$

$$\chi^2(1-\alpha/2, n-1) = \text{ХИ2ОБР}(1-\alpha/2, n-1)$$

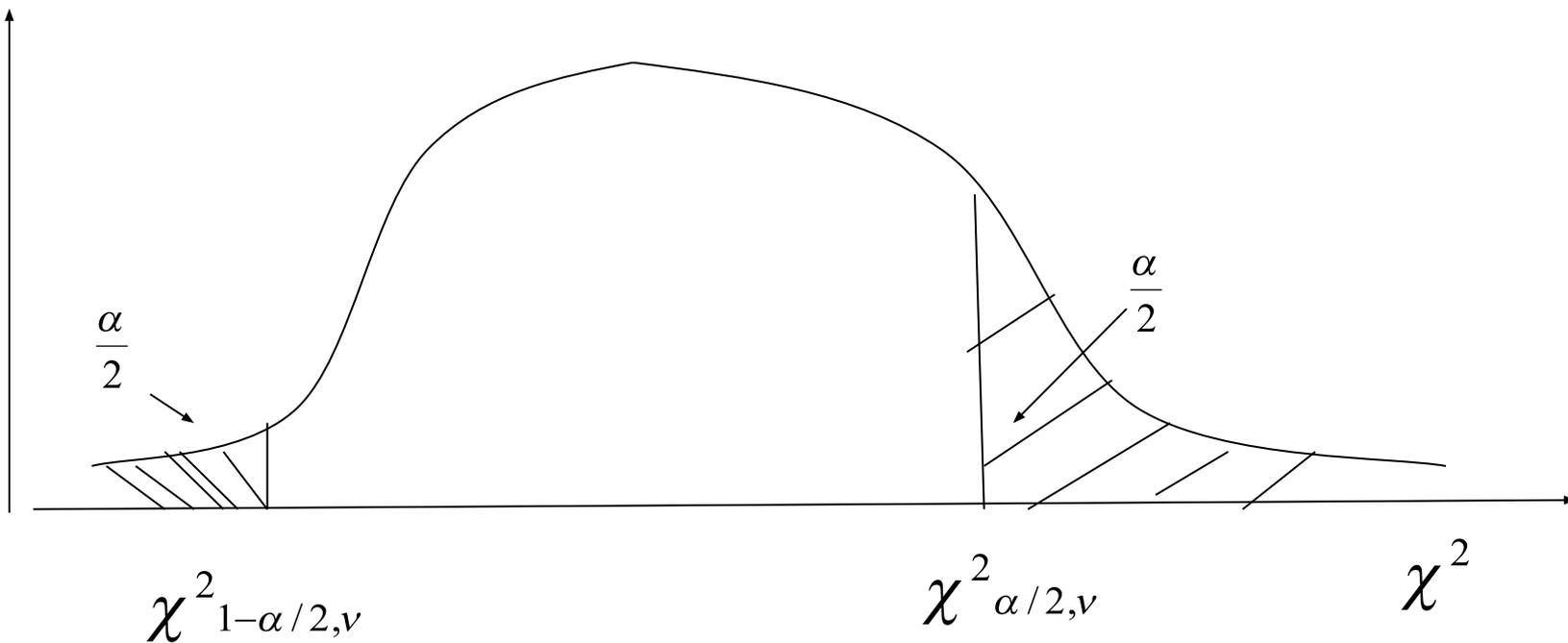
2. Определяем ДИ для дисперсии

$$\frac{S^2(n-1)}{\chi^2(\alpha/2, n-1)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2(1-\alpha/2, n-1)}$$

3. Определяем ДИ для СКО

$$\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\chi^2(\alpha/2, n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\chi^2(1-\alpha/2, n-1)}}$$

Вычисление критической точки ХИК (двусторонняя критическая область)



$$\chi_{кр}(\alpha; n-1) = \text{ХИ2ОБР}(\alpha; n-1)$$