Показатели вариации и анализ частотных распределений

Размер женской обуви (x)	**Число проданных пар % к итогу (d)**	**Накопленные частости (S)**
33	4	4
34	12	16
35	18	34
36	***26***	***60***
37	20	80
38	13	93
39	6	99
40	1	100
Итого:	**100**	-

$$Mo = x_0 + i\frac{f_{MO} - f_{MO-1}}{(f_{MO} - f_{MO-1}) + (f_{MO} - f_{MO+1})}$$

Где: x_0 и i – **соответственно нижняя граница и величина модального интервала**

F_{Mo} F_{Mo-1} F_{Mo+1} – **частоты (частости) модального, предмодального и послемодального интервалов**

Ставка по кредиту, % (x)	**Число банков (f)**	**Накопленная частота (S)**	**Середина интервала (x’)**	**x’f**
До 14	20	20	13	260
14-16	30	50	15	450
16-18	25	75	17	425
18-20	15	90	19	285
20 и более	10	100	21	210
Итого	**100**	**-**	**-**	**1630**

***14-16%** - модальный интервал*

Ширина интервала $i=2$

Нижняя граница $x_0=14$

Частота $f_{Mo}=30$

Предмодальная частота $f_{Mo-1}=20$

Послемодальная частота $f_{Mo+1}=25$

$$\boxed{Mo = 14 + 2\frac{30-20}{(30-20)+(30-25)} = 15{,}3\%}$$

При нечетном числе вариантов:

$$\boxed{Me = x_{m+1}}$$

При четном числе вариантов:

$$\boxed{Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}}$$

Пример:

1) 11 рабочих, имеющих тарифный разряд:

5, 4, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 6, 3, 5

Ранжирование по разряду:

2, 3, 3, 4, 4, **5**, 5, 5, 5, 6, 6

5ый разряд - центральный и медианный

Пример:

2) Если ранжированный ряд включает 12 рабочих:

2, 3, 3, 3, 4, **4**, **5**, 5, 5, 5, 6, 6

$$\Downarrow$$

$$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$ *разряда*

№ п/п	1	2	3	4	…	50	51	…	99	100
Усл. ед.	100	104	104	107	…	162	164	…	200	50000

Средний доход ***= 600-700 усл. ед.***

Медиана ***= 163 усл. ед.***

Положение медианы в ряду распределения:

$$\boxed{№_{Me} = \frac{n+1}{2}}$$

Где n – число единиц совокупности

$$\boxed{№_{Me} = \frac{100+1}{2} = 50{,}5}$$

$$Me = x_0 + i\frac{\frac{1}{2}\sum_{1}^{m} f_i - S_{Me-1}}{f_{Me}}$$

x_0 *и* i *– соответственно нижняя граница и величина медианного интервала*

f_{Me} *– частота медианного интервала*

S_{Me-1} *– накопленная частота предмедианного интервала*

Пример:

$$№_{Me} = \frac{100+1}{2} = 50{,}5\%$$

Интервал
16-18

$$Me = 16 + 2\frac{50-50}{25} = 16\%$$

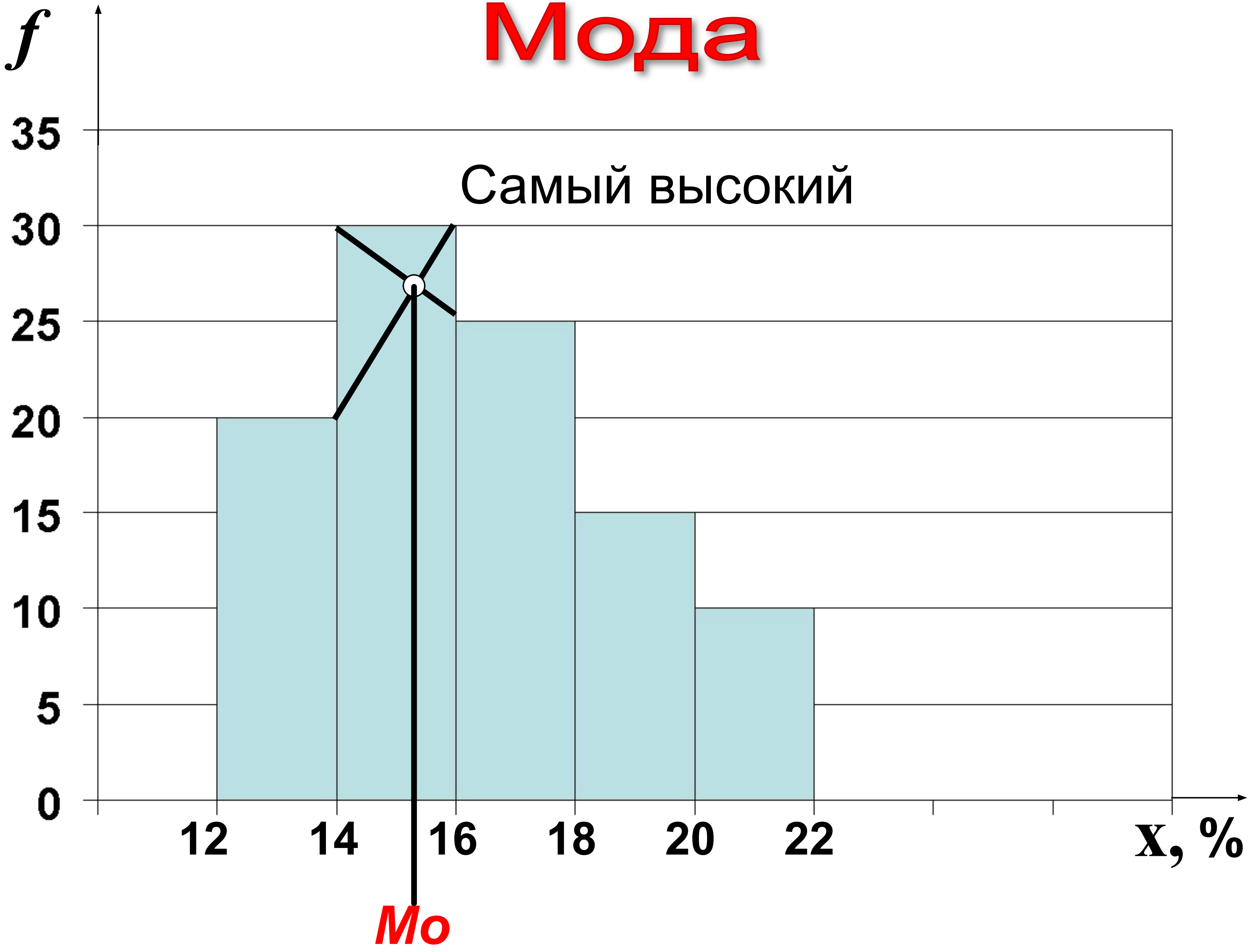
$$\boxed{3(\bar{x} - Me) \approx \bar{x} - Mo}$$

В приведенном примере:

$$\bar{x} = \frac{1630}{100} = 16{,}3\%$$

$$3(16{,}3 - 16) \approx 16{,}3 - 15{,}3$$

Мода



Медиана

Вариационный размах

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}}$$

Среднее линейное отклонение

Невзвешенная средняя

$$\bar{d} = \frac{\sum_{1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$$

Взвешенная средняя

$$\bar{d} = \frac{\sum_{1}^{m} \left| x_i - \bar{x} \right| f_i}{\sum_{1}^{m} f_i}$$

Группы нас. по разм. общ. жил. S на 1 чл.семьи, кв. м. (x_i)	Число семей, % к итогу (f_i)	Середина интервала (x'_i)	($x'_i f_i$)	$\| x_i - \bar{x} \|$	$\| x'_i - \bar{x} \| f_i$
До 10	30	9[1]	270[2]	3,06[3]	91,8[4]
10-12	25	11	275	1,06	26,5
12-14	26	13	338	0,94	24,4
14-16	9	15	135	2,94	26,5
16-18	4	17	68	4,94	19,8
18-20	3	19	57	6,94	20,8
Свыше 20	3	21	63	8,94	26,8
Итого	**100,0**		**1206**		**236,6**

Алгоритм расчета

1) Найдем середину интервалов (x'_i)

До 10 $\Rightarrow$ $$\frac{8+10}{2}=9$$

Алгоритм расчета

2) Определим произведения значений середины интервалов (x'_i) на соответствующие им веса

$$30 \times 9 = 270$$

Рассчитаем среднюю величину по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1206}{100} = 12{,}06 м^2$$

Алгоритм расчета

3) Найдем абсолютные отклонения середины интервалов, принятых в качестве вариантов признака (x_i) от средней величины ($\bar{x}$)

$$|9-12{,}06| = |3{,}06|$$

Алгоритм расчета

4) Вычислим произведения отклонений $|x'_i - \bar{x}|$ на их веса (f_i)

$$3{,}06 \times 30 = 91{,}8$$

Сумму произведений делим на сумму весов

$$\bar{d} = \frac{236{,}6}{100} = 2{,}366\text{м}^2$$

Отклонение от средней в целом небольшое

Алгоритм расчета

$$\bar{x} - \bar{d} = 12{,}06 - 2{,}366 = 9{,}694 \text{м}^2$$

Отличие от средней

Совокупность в отношении признака однородна, средняя - типична

Дисперсия

Простая (невзвешенная)

$$\delta^2 = \frac{\sum_{1}^{n}\left(x - \overline{x}\right)^2}{n}$$

Взвешенная

$$\delta^2 = \frac{\sum_{1}^{n}\left(x - \overline{x}\right)^2 f_i}{\sum_{1}^{m} f_i}$$

Среднее квадратическое отклонение

Простое (невзвешенное)

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

Взвешенное

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

№ Фирмы	Выпущено пром. продукции за год, млн.руб.	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	60	+10[2]	100[3]
2	52	+2	4
3	40	-10	100
4	60	+10	100
5	50	0	0
6	38	-12	144
Итого	**300**[1]		**448**

Алгоритм расчета

1) Определим среднюю величину по исходным данным по формуле средней арифметической простой (невзвешенной)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{300}{6} = 50_{\text{млн.руб.}}$$

Алгоритм расчета

2) Найдем отклонения

$$60 - 50 = 10$$

3) Возведем отклонения во 2ую степень

$$10^2 = 100$$

4) Разделив сумму отклонений на число единиц совокупности, получим дисперсию:

$$\delta^2 = \frac{448}{6} = 74{,}67$$

Алгоритм расчета

5) Извлечем из дисперсии корень 2ой степени, получим среднее квадратическое отклонение

$$\sqrt{74{,}67} = 8{,}64\,\textit{млн. рублей}$$

Степень вариации невелика, совокупность однородна

Относительные показатели вариации

- коэффициент осцилляции

$$V_R = \frac{R}{\bar{x}} \times 100\%$$

- линейный коэффициент вариации

$$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \times 100\%$$

или

$$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{Me} \times 100\%$$

Относительные показатели вариации

- коэффициент вариации (относит-й)

$$\boxed{V_\delta = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100\%}$$

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33 %

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i - A}{k}\right)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} k^2 - (\bar{x} - A)^2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{m}\left(\frac{x_i - A}{k}\right) f_i}{\sum_{1}^{m} f_i} k + A$$

Рост (x)	Кол-во (f_i)	Серед. интерв. (x_i)	x'_i - A	$\frac{x'_i - A}{k}$	$\frac{x'_i - A}{k} \times f_i$	$\left(\frac{x'_i - A}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x'_i - A}{k}\right)^2 \times f_i$
158-161	*1*	*159,5*	*-21*	*-7*	*-7*	*49*	*49*
161-164	*2*	*162,5*	*-18*	*-6*	*-12*	*36*	*72*
164-167	*8*	*165,5*	*-15*	*-5*	*-40*	*25*	*200*
167-170	*26*	*168,5*	*-12*	*-4*	*-104*	*16*	*416*
170-173	*65*	*171,5*	*-9*	*-3*	*-195*	*9*	*585*
173-176	*120*	*174,5*	*-6*	*-2*	*-240*	*4*	*480*
176-179	*181*	*177,5*	*-3*	*-1*	*-181*	*1*	*181*
179-182	*201*	*180,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
182-185	*170*	*183,5*	*3*	*1*	*170*	*1*	*170*
185-188	*120*	*186,5*	*6*	*2*	*240*	*4*	*480*
188-191	*64*	*189,5*	*9*	*3*	*192*	*9*	*576*
191-194	*28*	*192,5*	*12*	*4*	*112*	*16*	*448*
194-197	*10*	*195,5*	*15*	*5*	*50*	*25*	*250*
197-200	*3*	*198,5*	*18*	*6*	*18*	*36*	*108*
200-203	*1*	*201,5*	*21*	*7*	*7*	*49*	*49*
Итого	**1000**				**10***		**4064****

A=180,5 – середина (x'$_i$)

k=3 – шаг интервала

$$\boxed{*\,\bar{x}} = \frac{\sum_{1}^{m}\left(\frac{x_i - A}{k}\right)f_i}{\sum_{1}^{m} f_i} k + A =$$

$$= \frac{10}{1000} \times 3 + 180{,}5 = 180{,}53\text{см}$$

$$\boxed{**\delta^2} = \frac{\sum_1^m \left(\frac{x'_i - A}{k} \right)^2 f_i}{\sum_1^m f_i} k^2 - \left(\bar{x} - A \right)^2 =$$

$$= \frac{4064}{1000} \times 3^2 - (180{,}53 - 180{,}5)^2 = 36{,}5751$$

$$\boxed{\delta} = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{36{,}5751} = 6{,}05 см$$

Отклонение от ср-й

Измерение дисперсии альтернативного признака

p – *доля единиц в совокупности, обладающих данным признаком*

$$\boxed{p = \frac{m}{n}}$$

q – *доля единиц в совокупности, не обладающих данным признаком*

$$\boxed{p + q = 1}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1p + 0p}{p + q} = p}$$

Среднее значение альтернативного признака

Измерение дисперсии альтернативного признака

$$\delta^2 = \frac{(1-p)^2 p + (0-p)^2 q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq$$

$$\delta = \sqrt{pq}$$

Дисперсия альтернативного признака

Предельное значение $\delta^2 = 0{,}25$ при $p = 0{,}5$

Партия	Готовая продукция	Из них продукция:	
		Годная	Бракованная
1	1200	800	400
2	1000	840	160
3	1100	1000	100

*Средний % годной продукции

$$\boxed{p} = \frac{800+840+1000}{1200+1000+1100} = \frac{2640}{3300} = 0{,}8 \text{ или } 80\%$$

*Средний % браковой продукции

$$\boxed{q} = 1-0{,}8 = 0{,}2 \text{ или } 20\%$$

*Дисперсия удельного веса годной продукции

$$\boxed{\delta^2} = pq = 0{,}8\times 0{,}2 = 0{,}16$$

*Среднее квадратическое отклонение удельного веса годной продукции

$$\boxed{\delta} = \sqrt{pq} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$$

*Коэффициент вариации удельного веса годной продукции в общем выпуске продукции

$$\boxed{V\,\frac{\delta}{\bar{x}}} = \frac{\delta}{p} = \frac{0{,}4}{0{,}8} \times 100\% = 50\%$$

Виды дисперсий

1) Общая дисперсия

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_o\right)^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Виды дисперсий

2) Межгрупповая дисперсия

$$\delta_x^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(\overline{x}_j - \overline{x}_o\right)^2 n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}$$

k – число групп

n_j – число единиц в j-ой группе

x_j – частная средняя по j-ой группе

x_o – общая средняя по совокупности единиц

Виды дисперсий

3) Внутригрупповая дисперсия

$$\boxed{\delta_j^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \overline{x}_j \right)^2}{n_j}}$$

Виды дисперсий

3*) Средняя из внутригрупповых дисперсий

$$\overline{\delta}^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j^2 n_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} n_j}$$

Правило сложения дисперсий

$$\boxed{\delta_o^{\,2} = \overline{\delta}^{\,2} + \delta^2}$$

Эмпирический коэфициент детерминации

$$\boxed{\eta^2 = \frac{\delta^2}{\delta_o{}^2}}$$

Эмпирическое корреляционное отношение

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta_o{}^2}}}$$

Изменяется от 0 до 1

Пример:

Организация	Объем выполненных работ на предприятиях, млн.руб.	
	государственных	коммерческих
1	420	3980
2	690	6120
3	790	6030
4	950	7790
5	580	5050
Итого:	**3430**	**28970**

Алгоритм решения

1) Определим общую среднюю:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum x_i}{\sum n_i} = \frac{3430 + 28970}{5 + 5} =$$

$$= \frac{32400}{10} = 3240_{млн.руб.}$$

Алгоритм решения

2) Определим среднюю по каждой группе:

$$\bar{x}_1 = \frac{3430}{5} = 686 \text{ млн. руб.}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{28970}{5} = 5794 \text{ млн. руб.}$$

Алгоритм решения

3) Рассчитаем внутригрупповые дисперсии:

$$\delta_1^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}_1\right)^2}{n_1} =$$

$$\frac{(420-686)^2 + (690-686)^2 + (790-686)^2 +}{5}$$

$$\frac{+(950-686)^2 + (580-686)^2}{5} =$$

$$= \frac{162520}{5} = 32504$$

Алгоритм решения

3) Рассчитаем внутригрупповые дисперсии:

$$\delta_2^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_1)^2}{n_1} =$$

$$\frac{(3980 - 5794)^2 + (6120 - 5794)^2 + (6030 - 5794)^2 +}{5}$$

$$\frac{+ (7790 - 5794)^2 + (5050 - 5794)^2}{5} =$$

$$= \frac{7990120}{5} = 1598024$$

Алгоритм решения

4) Рассчитаем общую дисперсию:

$$\delta_0^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_0)^2}{n_0} =$$

$$\frac{(420-3240)^2 + (690-3240)^2 + (790-3240)^2 +}{10}$$

$$\frac{+(950-3240)^2 + (580-3240)^2 + (3980-3240)^2 +}{10}$$

$$\frac{+(6120-3240)^2 + (6030-3240)^2 + (7790-3240)^2 +}{10}$$

$$\frac{+(5050-3240)^2}{10} = \frac{73381800}{10} = 7338180$$

Алгоритм решения

5) Рассчитаем среднюю из внутригрупповых дисперсий:

$$\overline{\delta}^{\,2} = \frac{1598024 \times 5 + 32504 \times 5}{10} = 815264$$

Алгоритм решения

6) Рассчитаем межгрупповую дисперсию:

$$\delta^2 = \frac{(686 - 3240)^2 \times 5 + (5794 - 3240)^2 \times 5}{10} = 6522916$$

Алгоритм решения

7) Найдем общую дисперсию по приему сложения дисперсий

$$\delta_0^2 = 815264 + 6522916 = 7338180$$

Алгоритм решения

8) Рассчитаем коэффициент детерминации

$$\eta^2 = \frac{6522916}{7338180} = 0{,}889 \, или \, 88{,}9\%$$

9) Определим эмпирическое корреляционное отношение

$$\eta = \sqrt{0{,}889} = 0{,}94$$

Внутригрупповая дисперсия доли

$$\boxed{\delta^2_{Pi} = P_i \times (1 - P_i)}$$

P_i *– доля изучаемого признака в отдельных группах*

Средняя из внутригрупповых дисперсий

$$\overline{\delta}_{Pi}^{\,2} = \frac{\sum_i P_i \times (1 - P_i) n_i}{\sum_i n_i} = P_i \times (1 - P_i)$$

Межгрупповая дисперсия

$$\bar{\delta}^2_{Pi} = \frac{\sum_i (P_i - \bar{P})^2 n_i}{\sum_i n_i}$$

$$\bar{p} = \frac{\sum_i P_i n_i}{\sum_i n_i}$$

n_i – численность единиц в отдельных группах

$\bar{P}$ – доля изучаемого признака во всей совокупности

Общая дисперсия

$$\boxed{\delta_{\overline{P}}^{2} = \overline{P} \times (1 - \overline{P})}$$

Цех	**Удельный вес основ. рабочих, %, P_i**	**Численность рабочих, чел., n**
1	80	100
2	75	200
3	95	150
Итого:		**450**

1) Определяем долю изучаемого признака в совокупности в целом

$$\overline{P} = \frac{0,80 \times 100 + 0,75 \times 200 + 0,90 \times 150}{450} = 0,81$$

2) Определяем общую дисперсию доли

$$\delta^2_{\overline{P}} = 0,81 \times (1 - 0,81) = 0,154$$

3) Определяем внутригрупповые дисперсии

$$\delta^2_{P1} = 0,8 \times (1 - 0,8) = 0,16$$

$$\delta^2_{P2} = 0,75 \times (1 - 0,75) = 0,19$$

$$\delta^2_{P3} = 0,9 \times (1 - 0,9) = 0,09$$

4) Вычисляем среднюю из внутригрупповых дисперсий

$$\bar{\delta}^2_{Pi} = \frac{0,16 \times 100 + 0,19 \times 200 + 0,09 \times 150}{450} = 0,15$$

5) Определяем межгрупповую дисперсию

$$\bar{\delta}_{Pi}^{2} = \frac{(0,8-0,81)^2 \times 100 + (0,75-0,81)^2 \times 200 + (0,9-0,81)^2 \times 150}{450}$$

$$\bar{\delta}_{Pi}^{2} = 0,004$$

$$\text{Проверка}:$$

$$0,154 = 0,15 + 0,004$$

Расчет по интервальному вариационному ряду

$$Q_1 = x_{Q1} + i\frac{\frac{1}{4}\sum f - S_{Q1-1}}{f_{Q1}}$$

$$Q_3 = x_{Q3} + i\frac{\frac{3}{4}\sum f - S_{Q3-1}}{f_{Q3}}$$

x_{Q1} – *нижняя граница интервала, содержащего нижний квартиль (интервал определяется по накопленной частоте, 1ой превышающей 25%)*

x_{Q3} – *нижняя граница интервала, содержащего верхний квартиль (интервал определяется по накопленной частоте, 1ой превышающей 75%)*

i – *величина интервала*

S_{Q1-1} – накопленная частота интервала, предшествующего интервалу, содержащему нижний квартиль

S_{Q3-1} – накопленная частота интервала, предшествующего интервалу, содержащему верхний квартиль

f_{Q1} – частота интервала, содержащего нижний квартиль

f_{Q3} – частота интервала, содержащего верхний квартиль

Группы банков по срокам функционирования, лет, x	**Число банков, % к итогу**	**Накопленная частота, S**
1-2	10	10
2-3	15	25
3-4	21	46
4-5	25	71
5-6	12	83
6-7	7	90
7-8	5	95
Свыше 8	5	100
Итого:	**100**	

$$N_{Q1} = \frac{100+1}{4} = 25{,}3$$

$$N_{Q3} = \frac{100+1}{4} \times 3 = 75{,}8$$

$$\boxed{3 < Q_1 < 4} \qquad Q_1 = 3 + 1\frac{{}^{100}\!/_{4} - 25}{21} = 3\textit{года}$$

$$\boxed{5 < Q_3 < 6} \qquad Q_3 = 5 + 1\frac{{}^{100}\!/_{4} \times 3 - 71}{12} = 5{,}3\textit{года}$$

Децили

$$d_1 = x_{d1} + i\frac{{}^{1}\!/_{10}\sum f - S_{d1-1}}{f_{d1}}$$

$$d_2 = x_{d2} + i\frac{{}^{2}\!/_{10}\sum f - S_{d2-1}}{f_{d2}}$$

$$d_9 = x_{d9} + i\frac{{}^{9}\!/_{10}\sum f - S_{d9-1}}{f_{d9}}$$

Пример:

$$N_{d1} = \frac{100+1}{10} = 10{,}1$$

$$N_{d9} = \frac{100+1}{10} \times 9 = 90{,}9$$

$$\boxed{2 < d_1 < 3} \quad d_1 = 2 + 1\frac{100/10 - 10}{15} = 2\,года$$

$$\boxed{7 < d_9 < 8} \quad d_9 = 7 + 1\frac{100/10 \times 9 - 90}{5} = 7\,лет$$

Перцентильный ранг

$$P_n = L + (\frac{S}{f}) \times (i)$$

P_n – *обозначение n-ого перцентиля*

L – *нижняя граница интервала*

S – *число оценок, необходимое, чтобы попасть в точку на горизонтальной оси, которая соответствует данному перцентилю*

i – *расстояние от нижней границы L до верхней границы L+1 (шаг интервала)*

f – *число оценок, расположенных в интервале от L до L+1*

Пример:

$$\frac{17}{50} = 0{,}34 \Rightarrow$$

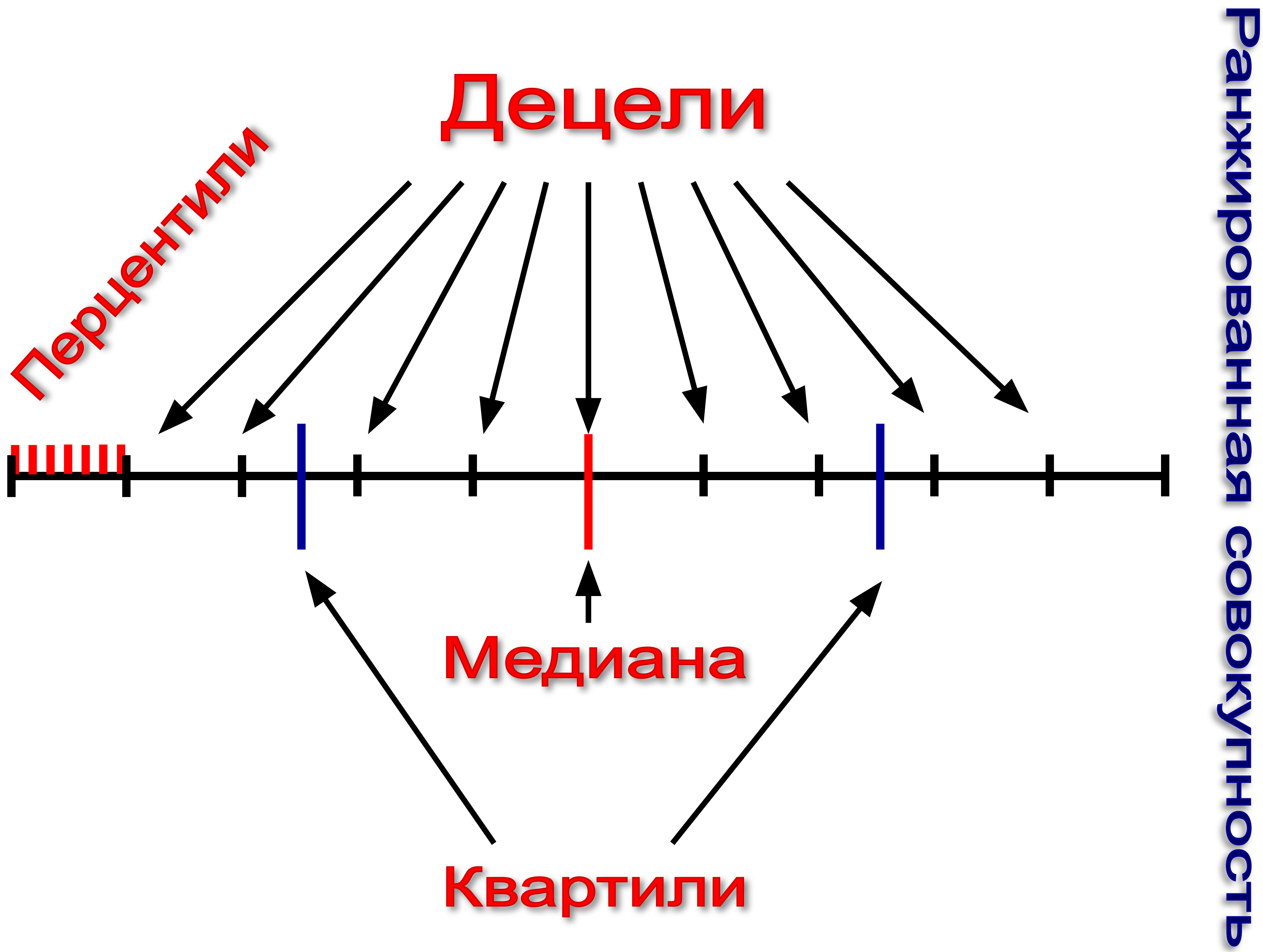
34% оценок в распределении ниже оценки студента Иванова

$$\frac{1}{50} = 0{,}02 \Rightarrow$$

2% от всех оценок распределения составляет оценка студента Иванова

$$34 + 2 : 2 = 35$$

Перцентильный ранг оценки студента Иванова


Децели
Перцентили
Медиана
Квартили
Ранжированная совокупность

Коэффициент дифференциации

$$K_V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_2} = \frac{1 - \dfrac{Q_1}{Q_3}}{1 + \dfrac{Q_1}{Q_3}}$$

$\boxed{V \approx K_V \times 1{,}5}$ *в большинстве случаев*

Децильный коэффициент дифференциации

$$\boxed{K_d = \frac{d_9}{d_1}}$$

Не совсем точен: сопоставляется min и max величины

Коэффициент фондовой дифференциации

$$K_{\Phi} = \frac{\overline{x}_{\max}}{\overline{x}_{\min}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_j x_j}{\frac{1}{n}\sum_s x_s} = \frac{\sum_j x_j}{\sum_s x_s}$$

$\sum_j x_j$ – сумма значений признака 10% самых крупных единиц в совокупности

n – число единиц совокупности самых крупных и мелких

$\sum_s x_s$ – сумма значений признака 10% самых мелких единиц в совокупности

Пример:

Капитал, млн.руб.:

1)	6,9	6)	3,7	11)	10,9	16)	8,1
2)	9,3	7)	5,1	12)	7,2	17)	2,1
3)	1,3	8)	2,9	13)	3,2	18)	4,3
4)	6,0	9)	1,4	14)	8,9	19)	4,5
5)	13,4	10)	1,6	15)	1,2	20)	11,5

$$\frac{1}{10} \times 20 = 2ед.$$

10% самых крупных и 10% самых мелких банков

$$K_Ф = \frac{(11{,}5 + 13{,}4)/2}{(1{,}2 + 1{,}3)/2} = \frac{12{,}45}{1{,}25} = 9{,}96\,раза$$

Уровень дифференциации достаточно высок

Моменты распределения

Момент k-ого порядка

$$M_k = (x - A)^k$$

Эмпирический момент k-ого порядка

$$M_k = \frac{\sum_i (x_j - A)^k f_i}{\sum_i f_i}$$

1) Начальные моменты

$$\boxed{A = 0}$$

$$\boxed{M_k = \overline{(x_i - 0)^k} = \frac{\sum_i x_i^k f_i}{\sum_j f_j}}$$

2) Условные моменты

$\boxed{A = x_o}$ *(Производная величина)*

$$\boxed{M_k = \overline{(x_i - x_o)^k} = \frac{\sum_i (x_i - x_o)^k f_i}{\sum_j f_j}}$$

3) Центральные моменты

$\boxed{A = \bar{x}}$ (Средняя арифметическая)

$$\boxed{M_k = \overline{(x_i - x_k)^k} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^k f_i}{\sum_j f_j}}$$

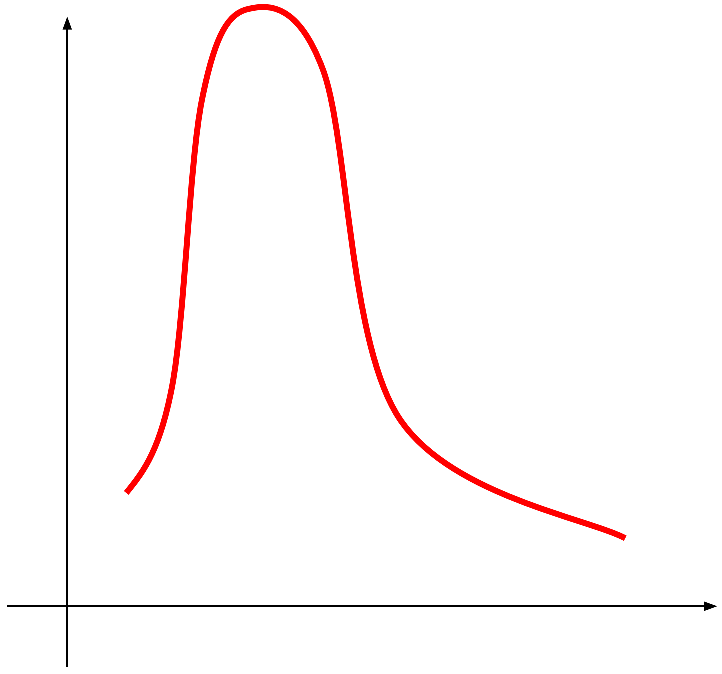
Виды / Порядок	Начальные	Центральные	Условные
1-ый	$M_1 = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_j f_j} = \overline{x}$	$M_1 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x}) f_i}{\sum_j f_j}$	$M_1 = \frac{\sum_i (x_i - A) f_i}{\sum_j f_j}$
2-ой	$M_2 = \frac{\sum_i x_i^2 f_i}{\sum_j f_j} = \overline{x^2}$	$M_2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2 f_i}{\sum_j f_j}$	$M_2 = \frac{\sum_i (x_i - A)^2 f_i}{\sum_j f_j}$
3-ий	$M_3 = \frac{\sum_i x_i^3 f_i}{\sum_j f_j} = \overline{x^3}$	$M_3 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^3 f_i}{\sum_j f_j}$	$M_3 = \frac{\sum_i (x_i - A)^3 f_i}{\sum_j f_j}$
4-ый	$M_4 = \frac{\sum_i x_i^4 f_i}{\sum_j f_j} = \overline{x^4}$	$M_4 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^4 f_i}{\sum_j f_j}$	$M_4 = \frac{\sum_i (x_i - A)^4 f_i}{\sum_j f_j}$

Относительный показатель ассиметрии

$$\boxed{As = \frac{\bar{x} - Mo}{\delta}}$$

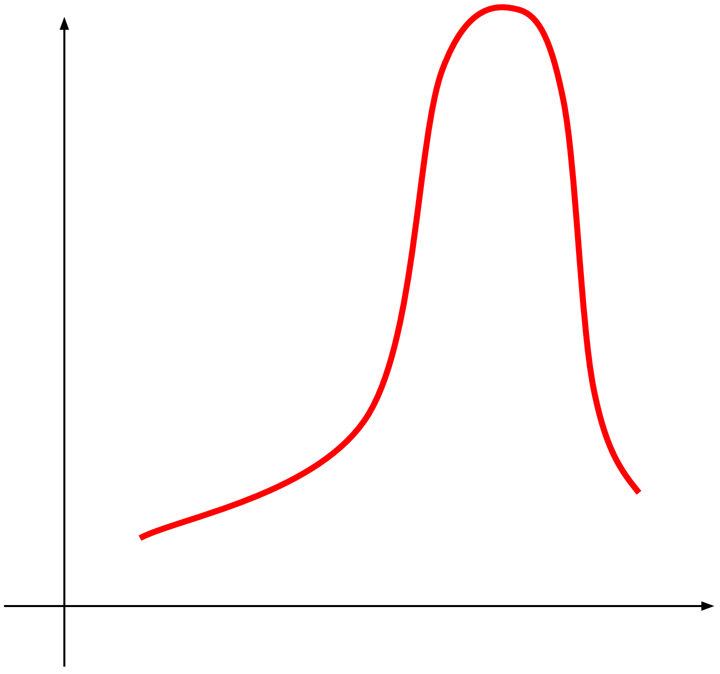
или

$$\boxed{As = \frac{\bar{x} - Me}{\delta}}$$



$As>0$

Правосторонняя ассиметрия



$As<0$

Левосторонняя ассиметрия

Коэффициент ассиметрии

$$\boxed{As = \frac{M_3}{\delta^3}}$$

Ассиметрия выше 0,5 считается **значительной**, меньше 0,25 - **незначительной**

Средняя квадратическая ошибка коэффициента ассиметрии

$$\boxed{\delta_{As} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}}$$

$$\boxed{\frac{|AS|}{\delta_{As}} > 3}$$

$\Downarrow$

*Ассиметрия **существенна** и распределение признака в ген. совокупности несимметрично*

Размер кредита, ***млн.руб*** **(x)**	**Число банков (f)**	**Середина инт. (x')**	$X'_i f_i$	$X'_i - \bar{X}$	$(X'_i - \bar{X})^2 f_i$	$(X'_i - \bar{X})^3 f_i$
1-6	6	3,5	21	-10	600	-6000
6-11	3	8,5	25,5	-5	75	-375
11-16	11	13,5	148,5	0	0	0
16-21	5	18,5	92,5	5	125	625
21-26	5	23,5	117,5	10	500	5000
Итого:	**30**		**405,5**		**1300**	**-750**

$$\bar{x} = \frac{\sum x'_i \ f_i}{f_i} = \frac{405}{30} = 13{,}5$$

$$M_2 = \delta^2 = \frac{\sum (x'_i - \bar{x})^2 \ f_i}{f_i} = \frac{1300}{30} = 43{,}33$$

$$M_3 = \frac{\sum (x'_i - \bar{x})^3 \ f_i}{f_i} = \frac{-750}{30} = -25$$

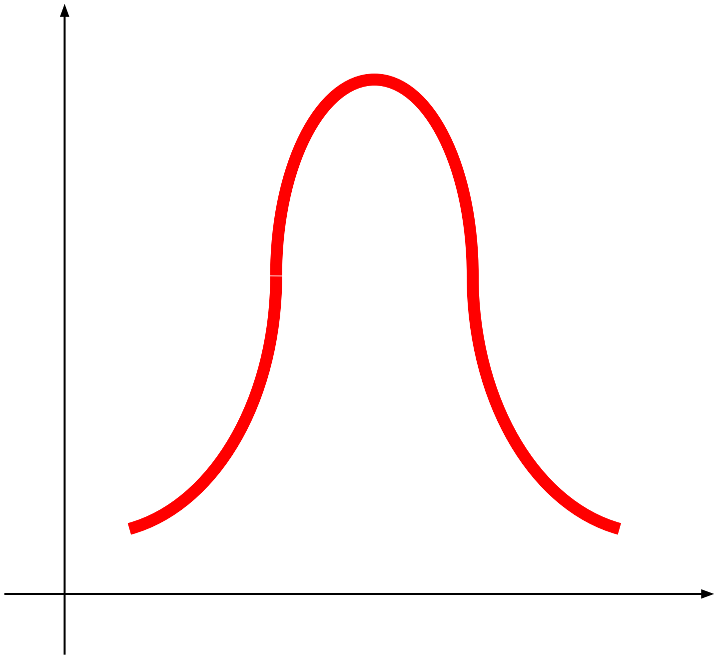
$$As = \frac{M_3}{\delta^3} = \frac{-25}{(6,58)^3} = \frac{-25}{284,89} = -0,09$$

Незначительная по величине
и отрицательная по
характеру ассиметрия

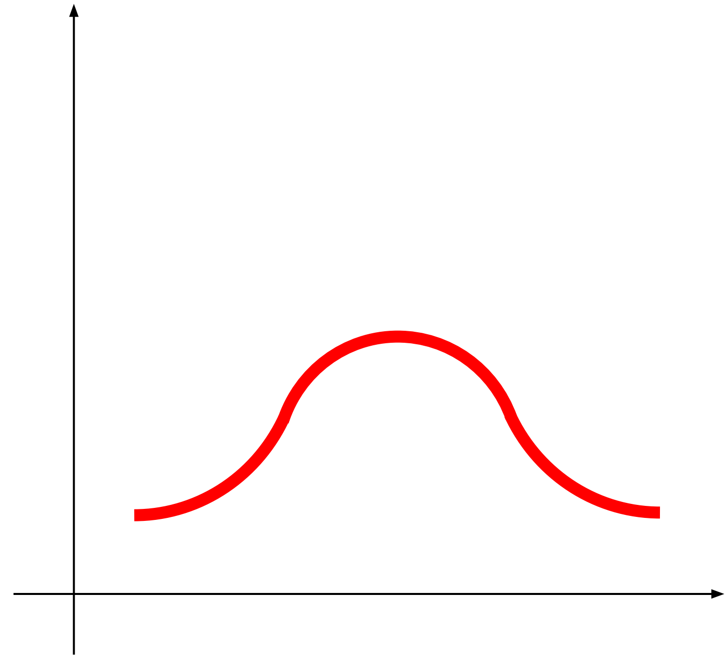
Показатель эксцесса

$$\boxed{Ek = \frac{M_4}{\delta^4} - 3}$$

В нормальном распределении Ek=0



Ek>0



Ek<0

Островершинное распределение

Плосковершинное распределение

Средняя квадратическая ошибка эксцесса

$$\delta_{Ek} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$$

Где ***n*** *– число наблюдений*

Нормальное распределение

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$\boxed{y_t}$ – *ордината кривой нормального распределения*

$\boxed{t = \dfrac{x - \bar{x}}{\delta}}$ – *стандартизированное отклонение*

$\boxed{e}$ *и* $\boxed{\pi}$ – *материальные постоянные (= 2,7182 и 3,1415 соответственно)*

$\boxed{x}$ – *варианты вариационного ряда*

$\boxed{\bar{x}}$ – *их средняя величина*

$\boxed{\delta}$ – *среднее квадратическое отклонение*

Крепость одиночн. нити, г (x)	**Число образцов (f)**	**Середина инт. (x')**	$x-\bar{x}$	$t=\dfrac{x-\bar{x}}{\delta}$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}$	$f_m=\dfrac{k\sum f}{\delta}f(t)$	
						исчисление	**округление**
56-58	5	57	-7,66	2,47[3]	0,01888[4]	6,1[5]	6
58-60	29	59	-5,66	1,83	0,07477	24,1	24
60-62	63	61	-3,66	1,18	0,19886	64,2	64
62-64	117	63	-1,66	0,54	0,34482	111,2	111
64-66	116	65	0,34	0,11	0,39654	127,9	128
66-68	102	67	2,34	0,75	0,30114	97,1	97
68-70	48	69	4,34	1,40	0,14973	48,3	48
70-72	14	71	6,34	2,04	0,04980	16,1	16
72-74	6	73	8,34	2,69	0,01071	3,5	4
Итого:	**500**					**498,5**	**498**

1) $\bar{x} = 64{,}66\,г$

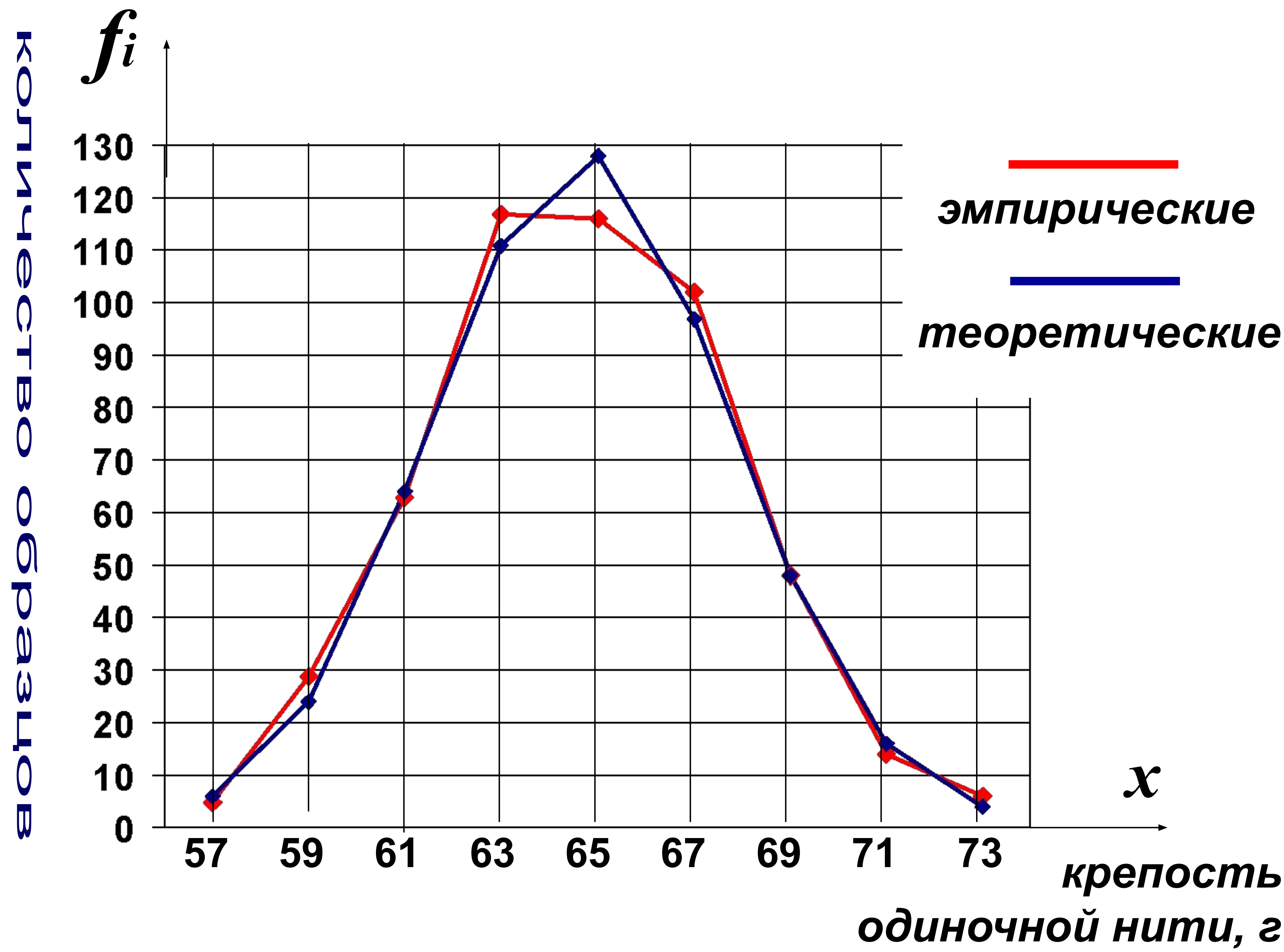
2) $\delta = 3{,}1\,г$

3) нормированное отклонение (t)

$$2{,}47 = \frac{57 - 64{,}66}{3{,}1} = \frac{-7{,}66}{3{,}1} \cong 2{,}47$$

4) по приложению значения плотности вероятности для нормированного нормального закона распределения

$$6{,}1 = 0{,}01888\frac{2 \times 500}{3{,}1} \cong 6$$



количество образцов
f_i
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
57
59
61
63
65
67
69
71
73
x
эмпирические
теоретические
крепость
одиночной нити, г

Критерий согласия

1) Пирсона:

$$\boxed{\chi^2 = \frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}}$$

$f_э$ и $f_т$ – *эмпирические и теоретические частоты соответственно*

Вероятность $P(\chi^2)$ определения по приложению:

$\boxed{P > 0{,}5}$ – *эмпирические и теоретические распределения близки*

$\boxed{P \in [0{,}2; 0{,}5]}$ – *совпадение удовлетворительное*

В остальных случаях – *совпадение недостаточное*

Критерий согласия

2) Романовского:

$$\boxed{c = \frac{\chi^2 - \gamma}{\sqrt{2\gamma}}}$$

$\boxed{\gamma}$ – *число степеней свободы*

C<3 – *различие несущественное*

Критерий согласия

3) Колмогорова:

$$\boxed{\lambda = \frac{D}{\sqrt{\sum f}}}$$

Условие:

Большое число наблюдений (не<100)

D *– max значение разности между накопленными эмпирическими и теоретическими частотами*

Ef *– сумма эмпирических частот*

Рост, *см*	Частоты ряда		$f' - f'_i$	$(f' - f'_i)^2$	$\frac{(f' - f'_i)^2}{f'_i}$
	эмпир. (f')	теорет. (f'_i)			
158-161	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
161-164	*2*	*2*	*0*	*0*	*0*
164-167	*8*	*9*	*-1*	*1*	*0,11*
167-170	*26*	*28*	*-2*	*4*	*0,143*
170-173	*65*	*65*	*0*	*0*	*0*
173-176	*120*	*121*	*-1*	*1*	*0,008*
176-179	*181*	*175*	*6*	*36*	*0,206*
179-182	*201*	*198*	*3*	*9*	*0,045*
182-185	*170*	*175*	*-5*	*25*	*0,143*
185-188	*120*	*121*	*-1*	*1*	*0,008*
188-191	*64*	*65*	*-1*	*1*	*0,015*
191-194	*28*	*28*	*0*	*0*	*0*
194-197	*10*	*9*	*1*	*1*	*0,111*
197-200	*3*	*2*	*1*	*1*	*0,5*
200-203	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
Итого	1000	1000			1,3

$$\chi^2 = 1{,}3$$

(Критерий согласия Пирсона)

$$c = \frac{1{,}3-(15-3)}{\sqrt{2(15-3)}} = \frac{10{,}7}{4{,}899} = 2{,}19$$

(Критерий согласия Романовского)

f'	f'_i	Накопленные частоты		$\lvert S - S'_i \rvert$
		эмпир.(S)	теор. (Si)	
1	1	1	1	0
2	2	3	3	0
8	9	11	12	1
26	28	37	40	3
65	65	102	105	3
120	121	222	226	4
181	175	403	401	2
201	198	604	599	5
170	175	774	774	0
120	121	894	895	1
64	65	958	960	2
28	28	986	988	2
10	9	996	997	1
3	2	999	999	0
1	1	1000	1000	0
1000	1000			

max разрыв = 5

$$\lambda = \frac{5}{\sqrt{1000}} = 0{,}158 \approx 0{,}2$$

(Критерий согласия Колмогорова)

$$\Downarrow$$

Распределение ***нормальное****, отклонения эмпирических частот от теоретических* ***случайные***