ПЗ 1. Комплексные числа

Комплексные числа в алгебраической форме

$\boxed{i^2 = -1}$ – ***мнимая единица***

$\boxed{z = a + bi}$ – ***алгебраическая форма*** комплексного числа

$a \in R -$ и $b \in R -$ ***действительная*** и ***мнимая части***.

ли $a = 0$, то число ***(чисто) мнимое***; если $b = 0$, то число ***действительное***

$\boxed{\overline{z} = a - bi}$ – ***комплексно сопряженное*** с числом $z = a + bi.$

Пусть $z = a_1 + b_1 i$ и $w = a_2 + b_2 i$ – два комплексных числа. Тогда

$$z + w = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z \cdot w = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} i.$$

Важно: $\underline{\boxed{z \cdot \overline{z}} = (a + bi) \cdot (a - bi) = \boxed{a^2 + b^2}}$

Задача 1

97. Пусть $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -1 + i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}} + \dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

1. Найдите частное: $\frac{4+5i}{-3+i}$ и запишите результат в алгебраической форме.

2. Запишите в алгебраической форме: $\frac{1-3i}{-7+i}$.

3. Запишите в алгебраической форме: $i^{25}-i^{35}$.

4. Запишите в алгебраической форме: $(3i+2)(2i-1)^2$.

5. Запишите в алгебраической форме: $4(2i-3)-3(5-3i)$.

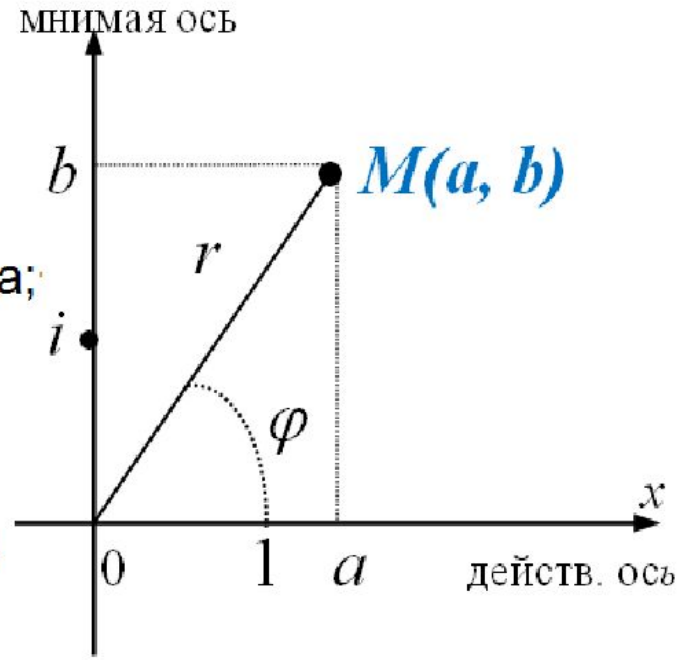
6. Найдите z, если известно, что $z+2\bar{z}=-3-4i$.

Комплексные числа в тригонометрической форме

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ – **модуль** числа;

$-\pi < \varphi \le \pi$:

$\boxed{\varphi = \arg z}$ – **аргумент** числа.



Тогда $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\left.\begin{matrix} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{matrix}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Пусть $z = |z|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ и $w = |w|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$ – два числа.

Тогда $z \cdot w = |z| \cdot |w|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$,

т.е. при умножении модули чисел умножаются, а ***аргументы складываются***;

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

т.е. при делении модули чисел делятся, а ***аргументы вычитаются.***

Вычислите модуль и аргумент числа $z = -6$.

1. Запишите число 6 в тригонометрической форме.
2. Запишите число -7 в тригонометрической форме.
3. Запишите число $8i$ в тригонометрической форме.
4. Запишите число $-10i$ в тригонометрической форме.
5. Запишите число $-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме.
6. Запишите число 2+2i в тригонометрической форме.

1. Запишите число $-1-\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

2. Запишите число $5-5i$ в тригонометрической форме.

3. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа -7.

4. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $8i$.

5. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-10i$.

Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-\sqrt{3}+i$.

1. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $2+2i$.

2. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-1-\sqrt{3}$.

3. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $5-5i$.

4. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.

5. Приведите число $z = 4(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.

1. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.

2. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.

3. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$ к алгебраическому виду.

4. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6}))$ к алгебраическому виду.

5. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}))$ к алгебраическому виду.

6. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$ к алгебраическому виду.

1. Решите квадратное уравнение: $3iz^2 + (8i + 4)z + 3i + 4 = 0$.

2. Решите квадратное уравнение: $z^2 + 4z + 5 = 0$.

3. Решите квадратное уравнение: $z^2 - 6z + 10 = 0$.

4. Решите квадратное уравнение: $z^2 - 8z + 25 = 0$.

5. Решите квадратное уравнение: $(-4 - 2i)z^2 + (4i + 28)z + 18i - 64 = 0$.

Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=8-3i$.

55. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-2-5i$.

56. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=2-5i$.

57. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-7-6i$.

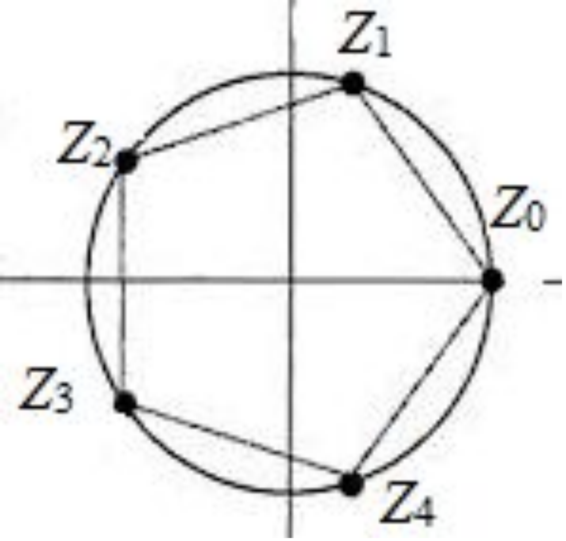
формула Муавра

$$\boxed{z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}, \quad n \in N.$$

Корнем n – й степени из комплексного числа z называется комплексное число, n–я степень которого равна z.

Формула извлечения корней

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)}, \quad k = 0, \dots, n-1$$



Корень имеет ***n значений***, они расположены ***на окружности радиуса*** $\boxed{\sqrt[n]{|z|}}$ в вершинах ***вписанного в нее правильного n–угольника***

Решите уравнение $z^4 = -81$ *над полем комплексных чисел*

Решите уравнение: $z^3 = 125$.

Решите уравнение: $z^3 = -125$.

Решите уравнение: $z^3 = 125i$.

Решите уравнение: $z^3 = -125i$.

Решите уравнение: $z^4 = 625$.

Решите уравнение: $z^4 = -625$.

Решите уравнение: $z^4 = 625i$.

Решите уравнение: $z^4 = -625i$.

1. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^5}v^4$.

2. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $v=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^3}v^2$.

3. Пусть $u=2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$, $v=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^4}v^3$.

4. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^6}v^2$.

5. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^6}v^4$.

6. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^7}v^8$.

1. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^5}v^4$.

2. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $v=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^3}v^2$.

3. Пусть $u=2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$, $v=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^4}v^3$.

4. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^6}v^2$.

5. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^6}v^4$.

6. Пусть $u=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$, $v=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите $z=\overline{u^7}v^8$.