

# Системы эконометрических уравнений

Подготовил: Тягливый А.С.  
Студент 1 курса Магистерской  
подготовки экономика.

- **1. система независимых уравнений** (когда каждая зависимая переменная  $y$  рассматривается как функция одного и того же набора факторов  $x$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{\phantom{0}} + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{\phantom{0}} + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \boxed{\phantom{0}} \quad \boxed{\phantom{0}} \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \boxed{\phantom{0}} + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{array} \right.$$

- Набор факторов в каждом уравнении может варьироваться. Так, модель вида

$$y_1 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_2 = f(x_1, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_3 = f(x_2, x_3, x_5)$$

$$y_4 = f(x_3, x_4, x_5)$$

- также является системой независимых уравнений.

- **Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов.**

## 2. системы рекурсивных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\ \dots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{array} \right.$$

зависимая переменная включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов  $x$ .

- Примером такой системы может служить *модель производительности труда и фондоотдачи вида:*

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- где  $y_1$  - производительность труда;
- $y_2$  - фондоотдача;
- $x_1$  - фондовооруженность труда;
- $x_2$  - энерговооруженность труда;
- $x_3$  - квалификация рабочих.



- Пример: модель динамики цены и заработной платы вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

- $y_1$  - темп изменения месячной заработной платы;
- $y_2$  - темп изменения цен;
- $x_1$  - процент безработных;
- $x_2$  - темп изменения постоянного капитала;
- $x_3$  - темп изменения цен на импорт сырья.

- В отличие от предыдущих систем каждое уравнение **системы одновременных уравнений** не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный **МНК неприменим**.

- Система совместных, одновременных уравнений обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.
- **Эндогенные переменные ( $y$ )**. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе.
- **Экзогенные переменные ( $x$ )**. Это predetermined переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

- **структурные коэффициенты модели:**

- $b_i$  - коэффициент при эндогенной переменной,

- $a_i$  - коэффициент при экзогенной переменной



- **Пример:**
- **Для структурной модели вида**

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

- **приведенная форма модели имеет вид**

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2, \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

- из первого уравнения получаем:

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

- Тогда система одновременных уравнений будет представлена как

$$\begin{cases} y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

- Отсюда имеем:

$$y_1 - a_{11}x_1 = b_{12}b_{21}y_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 - b_{12}b_{21}y_1 = a_{11}x_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2$$

- Таким образом, мы представили первое уравнение структурной формы модели в виде уравнения приведенной формы модели:

$$\mathbf{y}_1 = \delta_{11}\mathbf{x}_1 + \delta_{12}\mathbf{x}_2.$$

- Отсюда

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad \delta_{12} = \frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}} \mathbf{x}_2.$$

- Аналогично получаем:

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}$$

$$\delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}.$$



- *С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:*

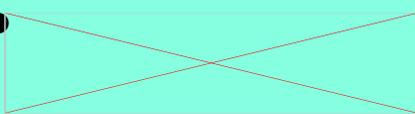
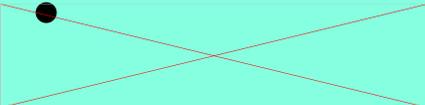
- *идентифицируемые;*
- *неидентифицируемые;*
- *сверхидентифицируемые.*

- Модель **идентифицируема**, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

- Модель **неидентифицируема**, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

- Модель **сверхидентифицируема**, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента.

- обозначим
- $N$  - число эндогенных переменных в  $j$  – м уравнении системы,
- $D$  - число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение,
- то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде:

-  — уравнение идентифицируемо;
-  — уравнение неидентифицируемо;
-  — уравнение сверхидентифицируемо.

- Модель считается **идентифицируемой**, если **каждое уравнение системы идентифицируемо**.
- Если **хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо**, то и вся модель считается **неидентифицируемой**.
- **Сверхидентифицируемая** модель содержит **хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение**.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

!!!!