Треугольники

Выполнила ученик 7 «А» класса
Скапенков Данил

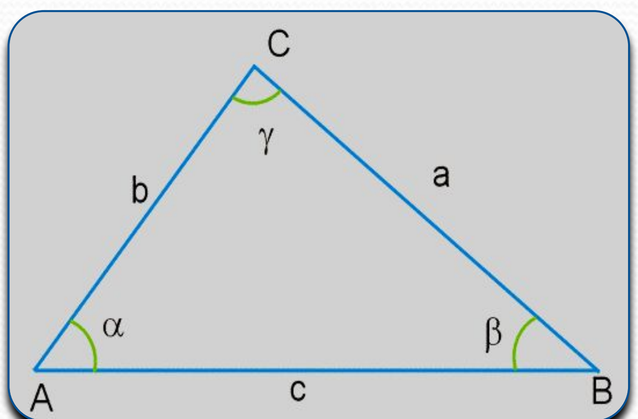
Цель работы: обобщить и систематизировать знания по теме «Треугольники».

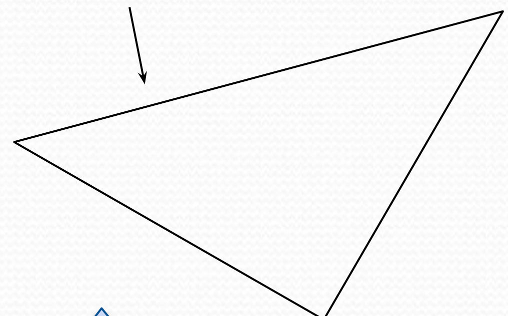
Задачи:

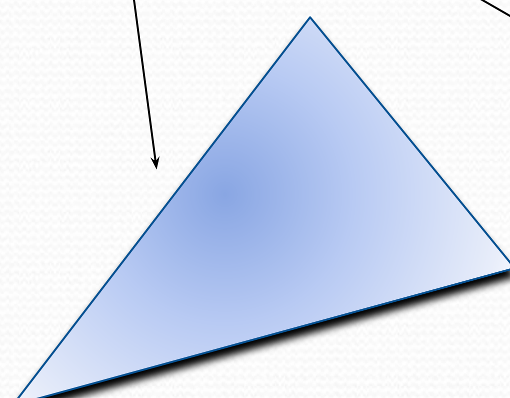
- Рассмотреть виды треугольников.
- Доказать основные признаки и свойства треугольников.
- Показать использование знаний по теме при решении задач.

Треугольник

- простейший многоугольник, имеющий 3 вершины (угла) и 3 стороны;
- часть плоскости, ограниченная тремя точками, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки;
- замкнутая ломаная линия с тремя звеньями.

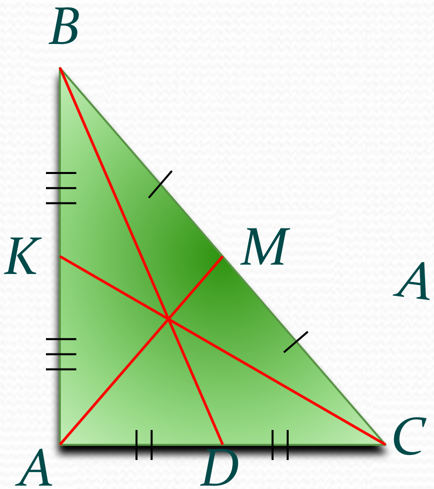






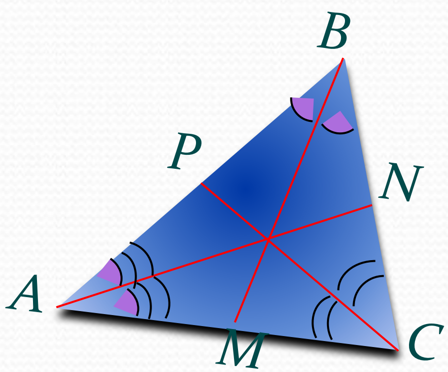
Элементы треугольника

Медиана



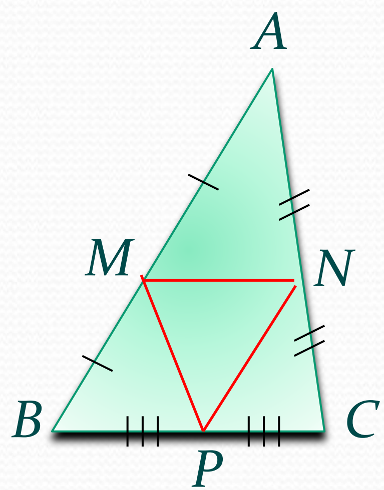
$BM = MC$
$AD = DC$
$AK = KB$

Биссектриса



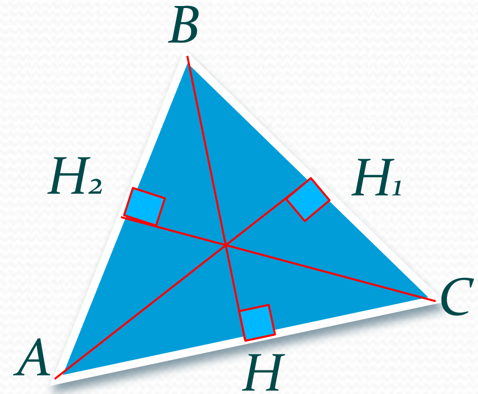
$\angle ABM = \angle MBC$
$\angle BCP = \angle PCA$
$\angle CAN = \angle NAB$

Средняя линия



$BM = MA$
$AN = NC$
$MN \parallel BC$
$BC = 2 \cdot MN$

Высота



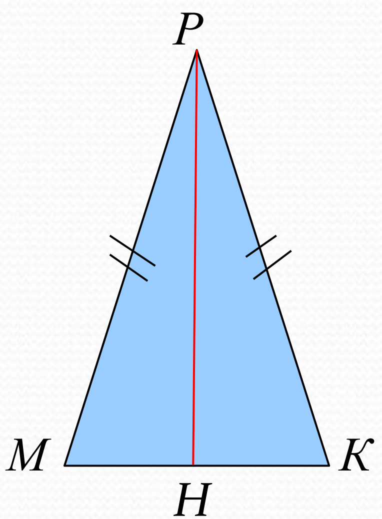
$BH \perp AC$
$AH_1 \perp BC$
$CH_2 \perp AB$

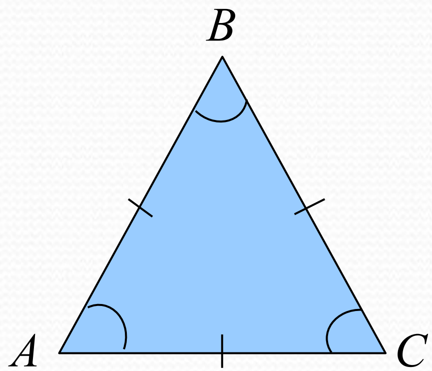
Виды треугольников по сторонам

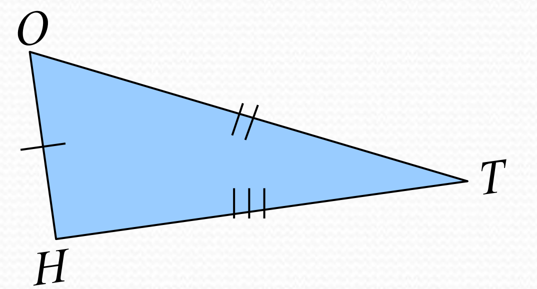
Равнобедренный

Равносторонний

Разносторонний





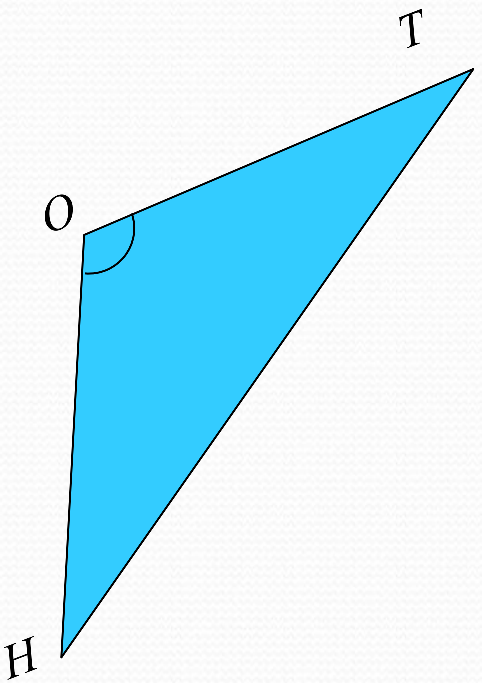


1) Углы при основании равны;
2) Медиана является биссектрисой и высотой.

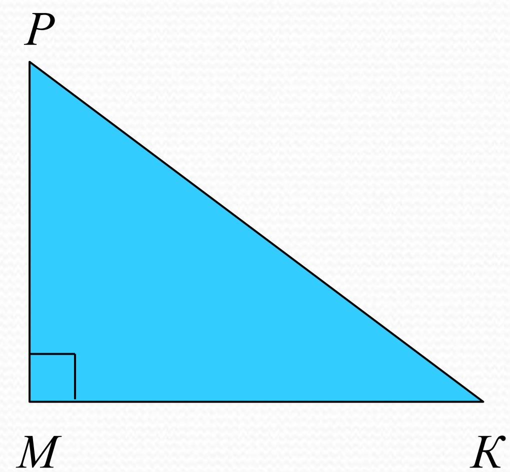
1) Все углы равны 60°.

Виды треугольников по углам

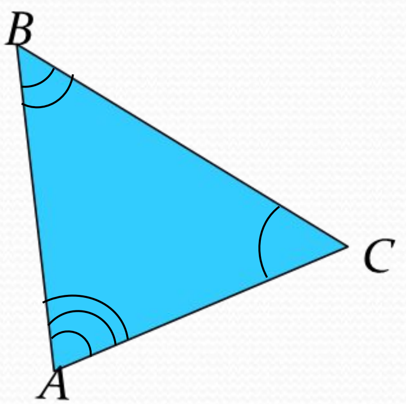
Тупоугольный



Прямоугольный



Остроугольный

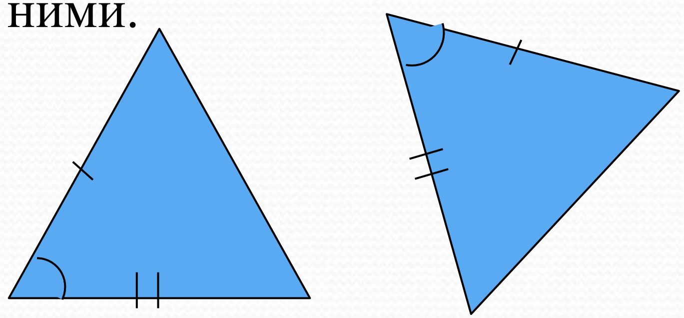


$\angle$PMK=90°-прямой

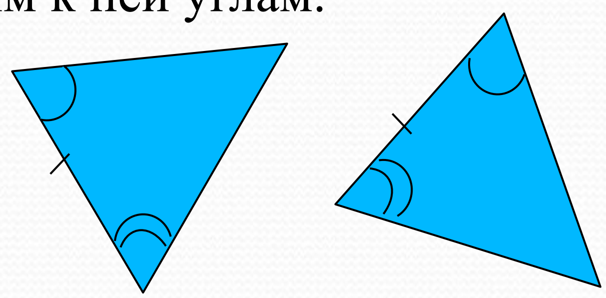
Равенство треугольников

Признаки равенства треугольников:

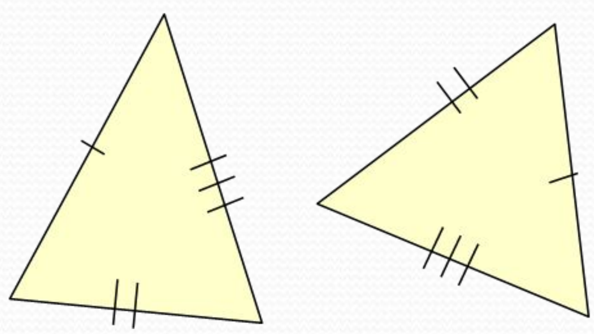
1. По двум сторонам и углу между ними.



2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.



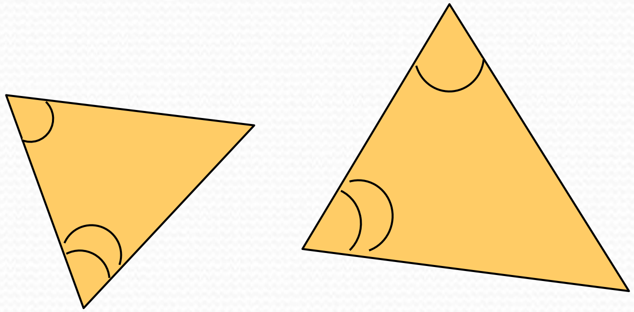
3. По трём сторонам.



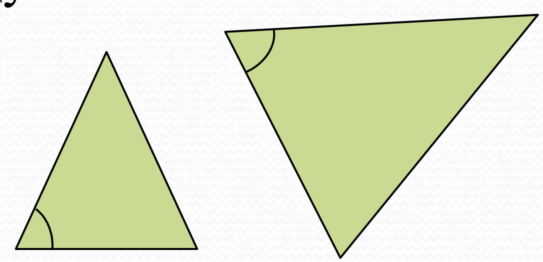
Подобие треугольников

Признаки подобия треугольников:

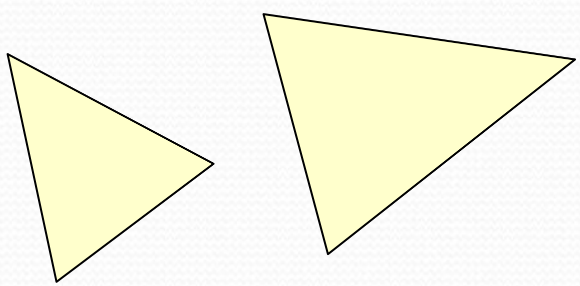
1. По двум углам.



2. По двум сторонам и углу между ними.

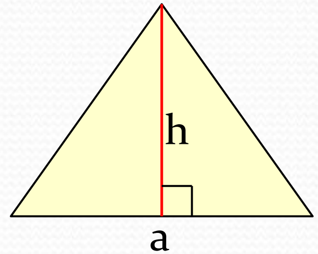


3. По трём сторонам.

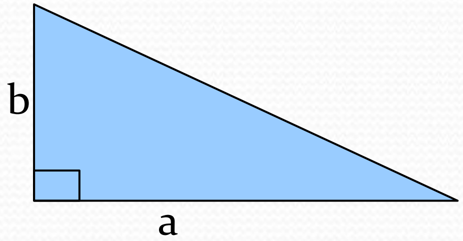


Площадь треугольника

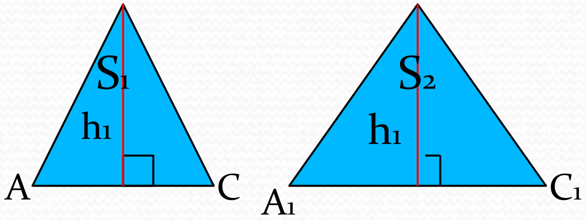
$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a.$



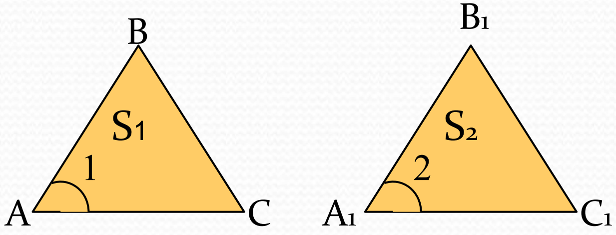
$S\ (\text{п/у}\triangle) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$



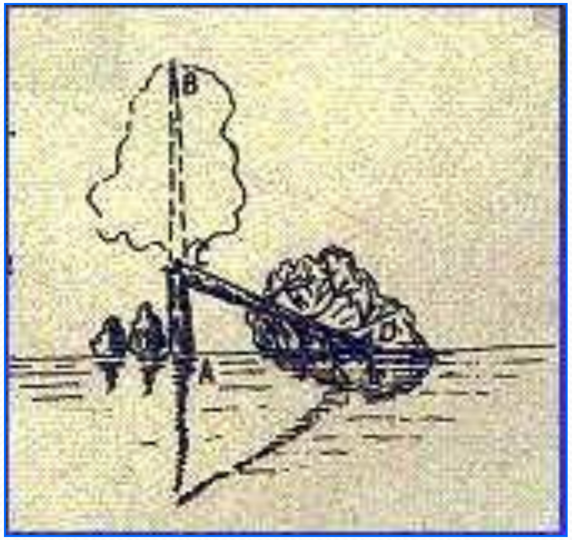
$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$



$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$

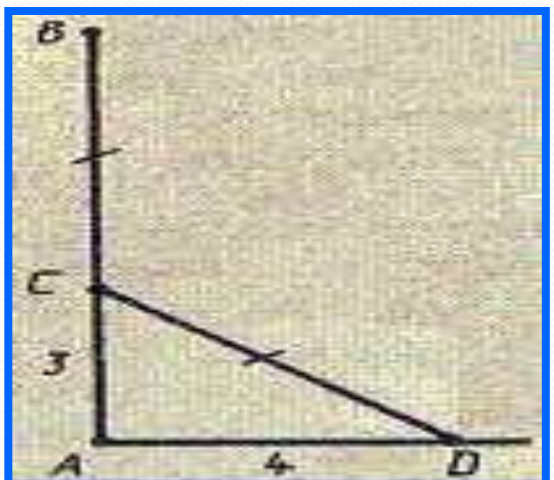


Задача



Вот задача индийского математика 12в. Бхаскары

На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой с теченьем реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река в четыре лишь фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?



Решение:

По теореме Пифагора находим CD:

$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 => CD = 5.$

Высота тополя равна: CB+CA. Т.к.

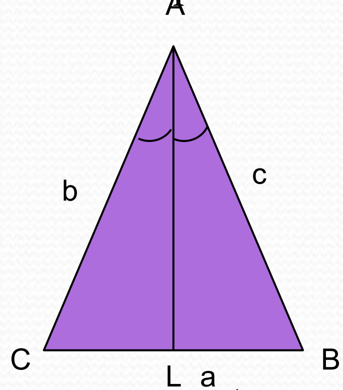
CD=CB =>

AB=AC+CD= 3 + 5 = 8.

Ответ: высота тополя 8 футов.

Расстояние от инцентра треугольника до его вершин

Теорема 1: Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим боковым сторонам.



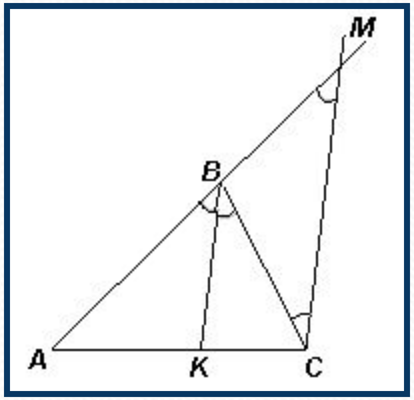
Следствие: Пусть AL-биссектриса $\angle A$ в ΔABC. Тогда отрезки CL и LB находятся по формулам: , .

$$CL=\frac{ab}{b+c}$$

$$BL=\frac{ac}{b+c}$$

Дано: ВК- биссектриса, СМ||ВК

Доказательство: Так как ВК – биссектриса $\angle$АВС, то $\angle$АВК=$\angle$КВС. Далее, $\angle$АВК=$\angle$ВМС, как соответственные углы при параллельных прямых, и $\angle$КВС=$\angle$ВСМ, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда $\angle$ВСМ=$\angle$ВМС, и поэтому треугольник ВМС – равнобедренный, откуда ВС=ВМ. По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем АК/КС=АВ/ВМ=АВ/ВС, что и требовалось доказать.



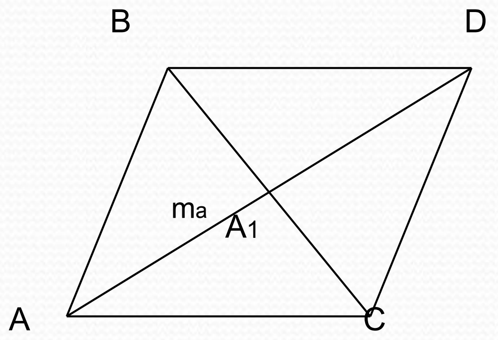
Свойства медиан

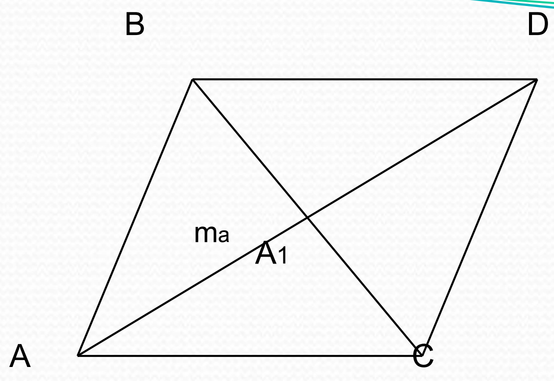
Теорема: Если a, b, c- стороны ΔABC (рис.34), m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$





Доказательство:

На продолжении медианы AA_1 треугольника ABC отложим отрезок A_1D равный отрезку AA_1. Тогда по теореме о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, имеем: $AD^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$

или $4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$,

откуда $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Следствие 1: Если a, b, c- стороны ΔABC, m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедлива формула:

$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}.$$

Следствие 2: Если a, b, c- стороны ΔABC, m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы, выражающие строны треугольника через его медианы:

$$a^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_b^2+2m_c^2+m_a^2\right),$$

$$b^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_a^2+2m_c^2+m_b^2\right),$$

$$c^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_a^2+2m_b^2+m_c^2\right).$$

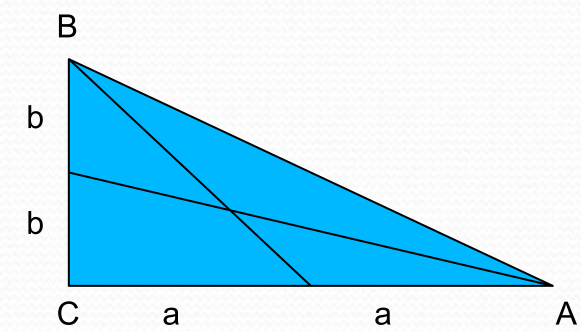
Следствие 3: В треугольнике ABC $\angle C=90°$ тогда и только тогда, когда

$$m_a^2+m_b^2=5m_c^2.$$

Задача

Дано: в прямоугольном треугольнике медианы катетов $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$.

Найти: S∆ABC.



Решение:

Каждая из медиан катетов образует с прямым углом прямоугольный треугольник. Обозначим длину половины каждого катета как a и b. Тогда, по теореме Пифагора получим:

$a^2 + 4b^2 = (73)^2$

$b^2 + 4a^2 = (52)^2$, откуда $a^2 = 73 - 4b^2$, подставим выражение во второе уравнение $b^2 + 4\cdot(73 - 4b^2) = 52$

$$\begin{cases} b^2 + 292 - 16b^2 = 52 \\ 15b^2 = 240,\ b^2 = 16,\ b = 4 \end{cases}$$

Соответственно, $a^2 = 73 - 4\cdot 16 = 9$, $a = 3$.

Таким образом, катеты прямоугольного треугольника равны (2a и 2b) 8 и 6 см.

Откуда площадь прямоугольного треугольника равна

$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 = 24$ см^2.

Ответ: Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2.