

Случайные события

- 1) Интуитивное представление о вероятности
- 2) Пространство элементарных событий
- 3) Алгебра событий
- 4) Вероятностное пространство
- 5) Свойства вероятностей
- 6) Повторение испытаний

Интуитивное представление о вероятности

1) Априорный подход (*a priori* – до опыта)

Классическое определение вероятности события A

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Принцип равных возможностей

n - общее количество случаев

m - количество благоприятных случаев

2) Апостериорный подход (*a posteriori* – после опыта)

Статистическое определение вероятности события A

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

n - общее количество опытов

m - количество опытов, в которых наблюдалось событие A

Пространство элементарных событий

Неопределяемые понятия

Вероятностный эксперимент (опыт)

Элементарное событие (исход опыта)

Вероятность элементарного события

Основные определяемые понятия и обозначения

Ω Пространство элементарных событий

$A \subseteq \Omega$ Случайное событие A

$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ Благоприятные исходы

$0 (\phi)$ и $1(U)$ Невозможное и достоверное события

Алгебра событий

 \mathfrak{F} Случайное событие A

$$A \subseteq \Omega$$

 \bar{A}

Противоположное событие

 $A + B$ и $A \cdot B$ Сумма и произведение событий

$$A \cdot B = 0$$

Несовместные события

Аксиомы
алгебры
событий

$$A1. \quad \Omega \in \mathfrak{F}$$

$$A2. \quad A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$$

$$A3. \quad A_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow \sum_i A_i \in \mathfrak{F}$$

Законы алгебры событий (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, де Моргана, идемпотентность, двойное отрицание, поглощения)

Вероятностное пространство

Ω Пространство элементарных событий

\mathfrak{F} Алгебра событий

$P(A)$ Вероятность события A

$$P: \mathfrak{F} \rightarrow [0;1]$$

P – Неотрицательная аддитивная вероятностная мера

АКСИОМЫ
ВЕРОЯТНОСТИ

$$A4. P(A) \geq 0; \quad A5. P(\Omega) = 1$$

$$A6. A_i \cdot A_j = 0 \quad (i \neq j) \Rightarrow$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Вероятностное пространство

$$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

Классическое вероятностное пространство

$$\boxed{(\Omega, \mathfrak{F}, P)}$$

1) Пространство элементарных событий конечно

$$|\Omega| = n \quad \text{Все исходы равновозможны}$$

2) Алгебра событий – все подмножества Ω

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \in \mathfrak{F}$$

3) Классическое определение вероятности события A

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

n - общее количество исходов

m - количество благоприятных исходов

Геометрическое вероятностное пространство

$$\boxed{(\Omega, \mathfrak{F}, P)}$$

1) Пространство элементарных событий несчетно

$$|\Omega| = \aleph \quad \text{Все исходы равновозможны}$$

2) Алгебра событий – все измеримые подмножества Ω

$$A \in \mathfrak{F} \quad \text{измеримое множество}$$

3) Геометрическое определение вероятности

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{мера}(A)}{\text{мера}(\Omega)}}$$

мера – неотрицательная аддитивная функция (длина отрезка, площадь фигуры, объем тела)

Свойства вероятностей

$$\begin{aligned} 1 \quad P(\phi) &= 0 && (A5) \\ P(\Omega) &= 1 &\Rightarrow & 1 = P(\Omega + \phi) && (A6) \\ & & & = P(\Omega) + P(\phi) &\Rightarrow & 1 = 1 + P(\phi) &\Rightarrow & P(\phi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad P(\bar{A}) &= 1 - P(A) && (A6) \\ P(\Omega) &= P(A + \bar{A}) &= & P(A) + P(\bar{A}) \\ 1 &= P(A) + P(\bar{A}) &\Rightarrow & P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad A \subseteq B &\Rightarrow P(A) \leq P(B) && (A6) \\ B &= A + B \cdot \bar{A} &\Rightarrow & \\ P(B) &= P(A) + P(B \cdot \bar{A}) &\Rightarrow & P(A) \leq P(B) && (A4) \end{aligned}$$

Свойства вероятностей

4 Теорема сложения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$B = B \cdot A + B \cdot \bar{A} \quad P(B) = P(B \cdot A) + P(B \cdot \bar{A})$$

$$A = A \cdot B + A \cdot \bar{B} \quad P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \bar{B})$$

$$P(A) + P(B) = P(\bar{A} \cdot B) + 2P(A \cdot B) + P(A \cdot \bar{B}) \quad (1)$$

$$A + B = A \cdot \bar{B} + A \cdot B + B \cdot \bar{A}$$

$$P(A + B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A}) \quad (2)$$

Свойства вероятностей

5

Теорема умножения

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad \text{Условная вероятность}$$

Независимые события

$$P(A|B) = P(A)$$

Критерий независимости

$$A \text{ и } B \text{ независимы} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

События, независимые в совокупности