Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Факультет национальной безопасности

Раздел 2 тема № 1

«ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Лекция № 1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2013

Математическим анализом называют систему дисциплин, которые объединены следующими характерными чертами.

Предметом их изучения являются ***количественные соотноше-ния*** действительного мира (в отличие от геометрических дисциплин, занимающихся ***пространственными его свойствами***).

Эти соотношения выражаются с помощью ***числовых величин***, но в отличие от арифметики и алгебры, где рассматриваются преимущест-венно ***постоянные величины*** (они характеризуют ***состояния***), в анализе - это ***переменные величины***, характеризующие процессы.

В основу изучения зависимости между переменными величинами кладутся понятия ***функции*** и ***предела***.

Зачатки методов математического анализа были у древнегреческих математиков (***Архимед***).

Систематическое развитие эти методы получили в **XVII** веке.

На рубеже **XVII** и **XVIII** веков ***И. Ньютон*** и ***Г.В. Лейбниц*** в общем и целом завершили создание ***дифференциального*** и ***интегрального*** исчисления, а также положили основу учения о ***рядах*** и ***дифферен-циальных уравнениях***.

Леонард Эйлер в **XVIII** веке разработал два последних раздела и заложил основу других дисциплин математического анализа.

Дальнейшее развитие анализа связывают с именами таких ученых **XIX и XX** веков, как ***О.Л. Коши*** и ***М.Э.К Жордан*** во Франции, ***Н.И. Лобачевский*** в России, ***С.П. Новиков*** в СССР, ***Н.Х. Абель*** в Норвегии, ***Г.Ф.Б. Риман*** и ***Г.Ф.Л.Ф. Кантор*** в Германии и др.

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Понятие функции. Основные свойства и классификация
2. Предел функции. Основные теоремы о пределах
3. Непрерывность функции

Литература

1. «Высшая математика для экономических специальностей». Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008.
2. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
3. Гельман В.Я. «Решение математических задач средствами Excel: Практикум». Учебник для вузов. СПб.: ПИТЕР, 2003.
4. «Сборник задач по математике». М.: Изд. РАГС, 2005.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Понятие функции. Основные свойства и классификация

Определение.

Если каждому элементу (значению) x множества $X \subseteq R$ поставлен в соответствие определенный элемент (значение) y множества $Y \subseteq R$, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** $y = f(x)$.

Определение.

Множество X называется ***областью определения*** (***задания***) ***функции*** $y = f(x)$, а множество Y – ***областью значений*** (***изменения***) ***функции***.

При этом переменная x называется ***аргументом функции*** или ***независимой переменной***, а элемент y, соответствующий конкретному элементу x – ***значением функции*** $y = f(x)$ в точке x.

Пример.

Область определения функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ есть полуинтервал $(-\infty, 10]$, так как $10 - x \geq 0$. Если же переменная x, например, обозначает время, то областью определения функции будет отрезок $[0,10]$.

Определение.

Функция называется ***явной***, если она задается формулой $y=f(x)$, в которой правая часть не содержит зависимой переменной, например, $y = 2x + 1$.

Определение.

Функция y аргумента x называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной, например, $y - 2x - 1 = 0$.

Определение.

Параметрическим представлением функции называется разновидность представления переменных, когда их зависимость выражается через дополнительную величину – ***параметр***.

Пример.

Параметрическое представление верхней полуокружности $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ имеет вид при $t \in [0,\pi]$.

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

Определение.

Графиком уравнения $F(x, y) = 0$ называется множество точек (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Замечание.

Не всякая линия является графиком какой-либо функции.

Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждое x из отрезка [-1,1] входит не в одну, а в две пары чисел (x, y) этого множества с разными значениями y:

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad y_2 = -\sqrt{1 - x^2},$$

что ***противоречит требованию однозначности*** в определении функции.

Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является *графиком функции* $y = -\sqrt{1 - x^2}$, а ее часть, лежащая в верхней полуплоскости – *графиком функции* $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Определение.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется ***уравнением линии*** L ***на плоскости*** (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

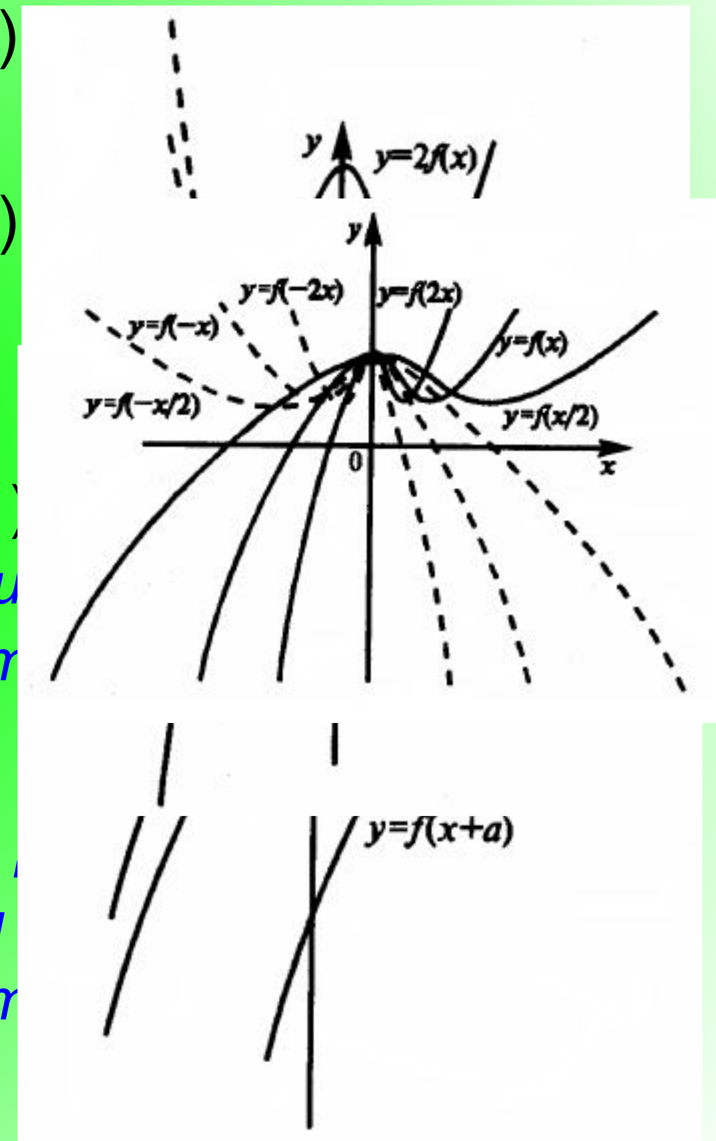
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ:

1. $y = f(x + a)$ – *сдвигает график* $y = f(x)$
$|a|$ единиц (a > 0 – *влево*, a < 0 – *вправо*).

2. $y = f(x) + b$ – *сдвигает график* $y = f(x)$
$|b|$ единиц (b > 0 – *вверх*, b < 0 – *вниз*).

3. $y = mf(x)$ $(m \neq 0)$ – *растягивает* $(m > 1)$
в m *раз* график $y = f(x)$ *относительно оси*
При m < 0 *симметрично отображает*
оси Ox.

4. $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ – *сжимает* (k > 1) или
в k *раз* график $y = f(x)$ *относительно оси*
При k < 0 *симметрично отображает*
оси Oy.



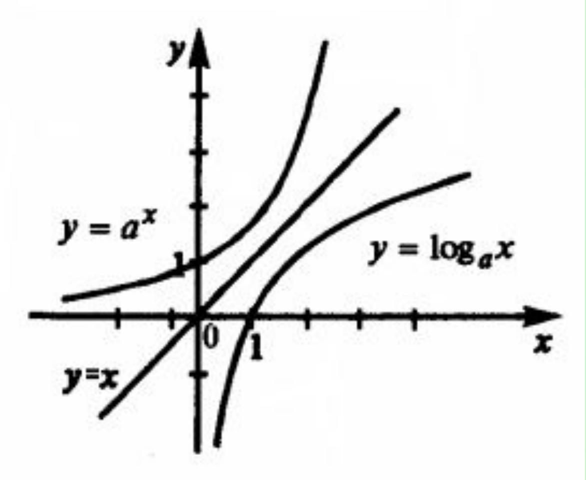
Определение.

Пусть $y = f(x)$ есть функция независимой переменной x, определенной на множестве X с областью значений Y. При этом каждому $y \in Y$ соответствует ***единственное*** значение $x \in X$ такое, что $f(x) = y$.

Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X, называется ***обратной***.

Обозначение: $y = f^{-1}(x)$.

Графики ***взаимно обратных функций*** *симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов*



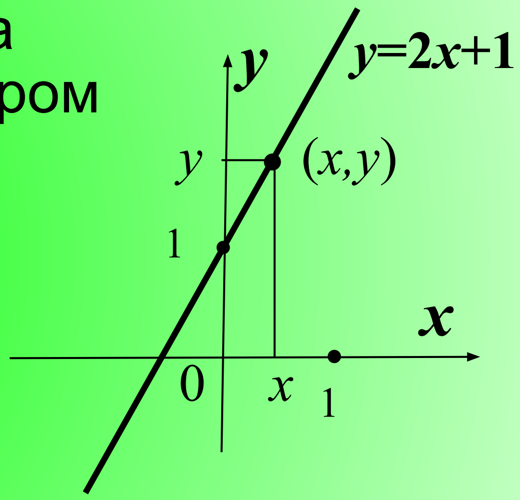
Определение.

Если функция $y = f(u)$ есть функция переменной u (определенной на множестве U с областью значений Y), а переменная u, в свою очередь, также является функцией $u = \varphi(x)$ (определенной на множестве X с областью значений U), то заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией.***

Способы задания функции

1. ***Аналитически*** – формулой, связывающей элементы x и y:
   а) *в явном виде*; б) *в неявном виде*; в) *параметрически*;
   г) *в виде обратной функции*; д) *в виде сложной функции.*

2. ***Графически*** – в виде изображения графика функции на координатной плоскости, в котором аргументу x соответствует ось *абсцисс*, а значению функции y - ось *ординат*.



3. ***Таблицей***:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. ***Алгоритмом*** ее ***вычисления*** или ***составления*** (в том числе ***вербально***), например, функция ***Дирихле***.

5. ***Рекурсивно*** – когда одни значения функции определяются через другие ее значения, например: $n! = (n\text{-}1)!\cdot n$.

Основные свойства функций

Определения.

1. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любых значений x из области определения функции $f(-x) = f(x)$, и ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$.

В противном случае $y = f(x)$ – ***функция общего вида***.

2*. Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на некотором промежутке X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ таких, что } x_1 > x_2\ (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Неубывающие или невозрастающие функции называются ***монотонными***.

3. Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) на промежутке X, если

$$\exists M\ (m) \text{ такие, что } \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M\ \ (f(x) \geq m).$$

4. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если $f(x + T) = f(x)$ для любых $x \in X$.

Основные элементарные функции:

a) *степенная функция* $y = x^n$;

б) *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
($X = (-\infty; +\infty)$; $Y = (0; +\infty)$);

в) *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
($X = (0; +\infty)$; $Y = (-\infty; +\infty)$);

г) *тригонометрические функции*:

$y = \sin x$, $y = \cos x$,
$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) *обратные тригонометрические функции*:

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
$y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение.

Элементарными называются **функции**, построенные из основных элементарных функций при помощи конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции.

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Алгебраические функции

- *целая рациональная функция* (многочлен или полином);
- *дробно-рациональная функция*;
- *иррациональная функция*.

Трансцендентные функции (неалгебраические)

- *показательная функция*;
- *логарифмическая функция*;
- *тригонометрические функции*;
- *обратные тригонометрические функции* и т.д.

ВТОРОЙ ВОПРОС

Предел функции. Основные теоремы о пределах

Определение.

Если каждому числу из натурального ряда чисел 1, 2, ..., n, ... поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется ***числовой последовательностью***.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются ***элементами*** или ***членами последовательности***, x_n – ***общим членом последовательности***, а число n – его ***номером***.

Обозначение последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. ***Последовательностью*** элементов числового множества R называется отображение f, определенное на множестве натуральных чисел N и принимающее значения в множестве R, т.е.

$$f: N \to R.$$

Элементом или ***членом последовательности*** f называется упорядоченная пара (n, x), $x = f(n)$, $n \in N$, $x \in R$.

Натуральное число n называется ***номером элемента последовательности***, а число $x \in R$ – его ***значением***.

Примеры.

а) $x_n = const$

б) $x_n = n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{1, 2, 3, \ldots\}$ – натуральные числа;

в) $x_n = 1/n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$;

г) $x_n = n \cdot (-1)^n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$.

Определение.

Число A называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

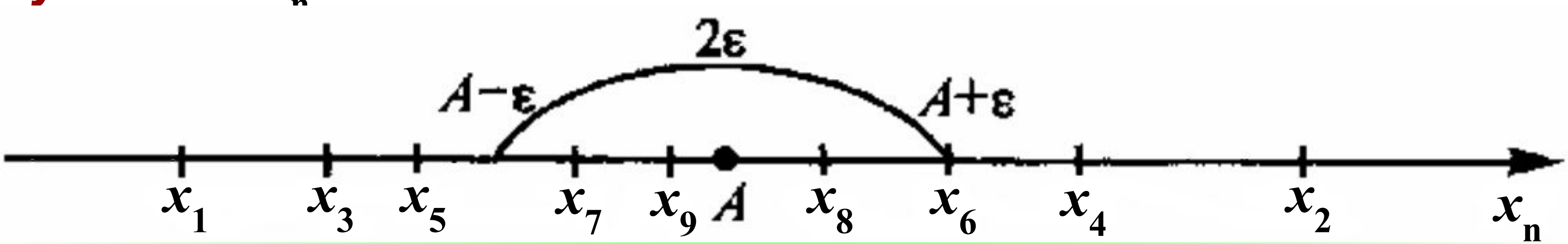
Определение.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число A, то символически это записывается так:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} A \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

Геометрический смысл предела числовой последовательности

Неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$.



Определение (*предел функции по Гейне*).

Число A называется ***пределом функции $f(x)$ в т*** … и для любой последовательности точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящ … о не содержащей x_0 в качестве одного из своих элем … в проколотой окрестности x_0), последовательность зн … к-ции $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к A:

$$\lim_{x\to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} (\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \ldots A$$

Огюстен Луи Коши

Теорема.

Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Определение (*предел функции по Коши*).

Число A называется ***пределом функции $f(x)$ в т*** … и для любого наперед взятого числа $\varepsilon > 0$ найдется отве … у число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и удов … условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

Генрих Эдуард Гейне

$$\lim_{x\to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение.

Число A называется ***левым*** (***правым***) ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0, если для любого наперед взятого числа $\varepsilon > 0$ найдется отвечающее ему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$ ($x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример.

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x_0 = 0$ правый и левый пределы.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} sign\, x = -1; \quad \lim_{x \to x_0 + 0} sign\, x = 1.$$

Определение.

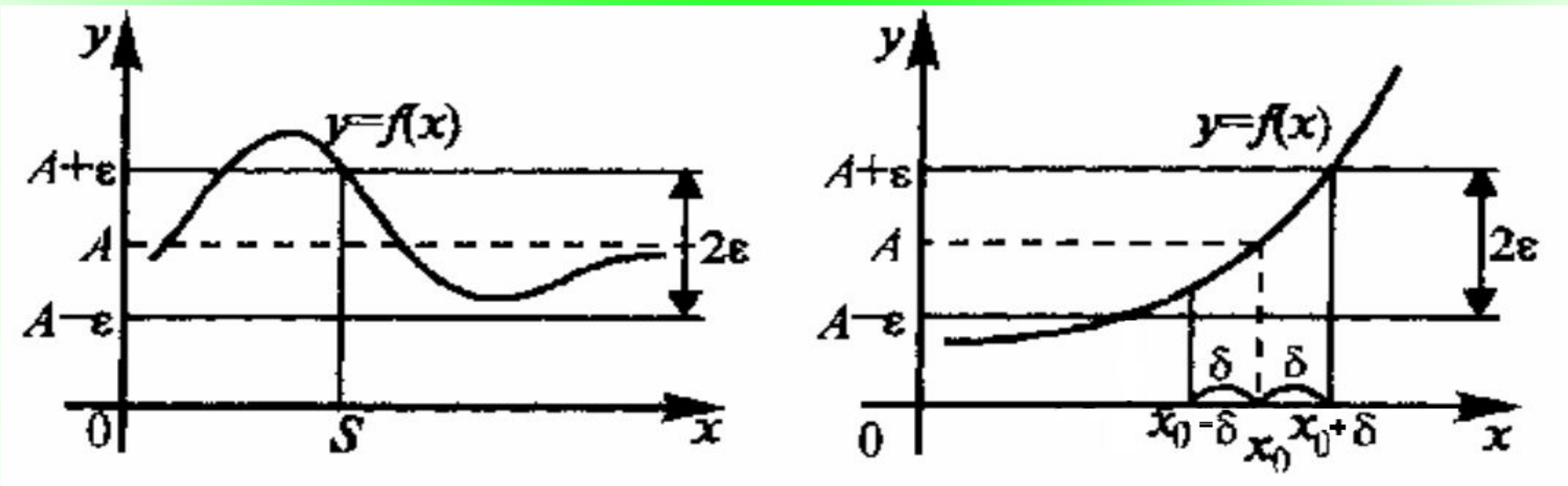
Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** x ***стремящемся к бесконечности*** ($x \to \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $S > 0$, зависящее от ε, что для всех x, т.ч. $|x| > S$, будет верно неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists S(\varepsilon) > 0\ \forall x : |x| > S \Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon .$$

Пример.

Функция $f(x) = 1/x$ имеет предел при $x \to \infty$ равный нулю.

Геометрический смысл предела



Свойства бесконечно малых величин

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **бесконечно малые величины** при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то будут **бесконечно малыми величинами**:

1. $\alpha(x) \pm \beta(x)$; 2. $c \cdot \alpha(x)$, c – постоянная; 3. $\alpha(x) \cdot \beta(x)$;

4. $f(x) \cdot \alpha(x)$, $f(x)$ – ограниченная функция;

5. $\alpha(x)/f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) \neq 0$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon ;$$

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists S(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x| > S \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Сравнение порядков бесконечно малых.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **бесконечно малые величины** при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x)/\beta(x) = k$, то

- при $k = 0$ бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой ***более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$;
- при $k = \infty$ – ***более низкого порядка малости***, чем $\beta(x)$;
- при $0 < k < \infty$ – ***одного порядка малости***;
- при $k = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***, например, при $x \to 0$ $\sin x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x \sim 1 + x$.

Теорема. *Функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ предел, равный A, тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$:*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0.$$

Определение.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если

$$\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\ \ \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M;$$

$$\forall M > 0\ \exists S(M) > 0\ \ \forall x : |x| > S \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Замечание.

Бесконечно большая величина есть функция ***неограниченная*** при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), однако ***неограниченная функция*** не обязательно является ***бесконечно большой величиной***.

Пример.

Функция $y = x \cdot \sin x$ является ***неограниченной***, но ***не бесконечно большой***.

($x \to \infty$), то функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ является ***бесконечно большой***, и обратно, если $f(x)$ – ***бесконечно большая функция*** при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то $\alpha(x) = 1/f(x)$ является ***бесконечно малой величиной***.

Основные теоремы о пределах

1. Если предел существует, то он единственный.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

3. Если $\forall x \ f(x)=c \ \Rightarrow \forall x_0 (x\to\infty) \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=c.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[\lambda\cdot f(x)]=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x).$ *Однородность*

5. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$ *Аддитивность*

6. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$

7. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)},$ если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\neq 0.$

8. Если $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$

9. Если $\forall x\in O(x_0,\varepsilon)\,(x\to\infty)\ f(x)<g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$

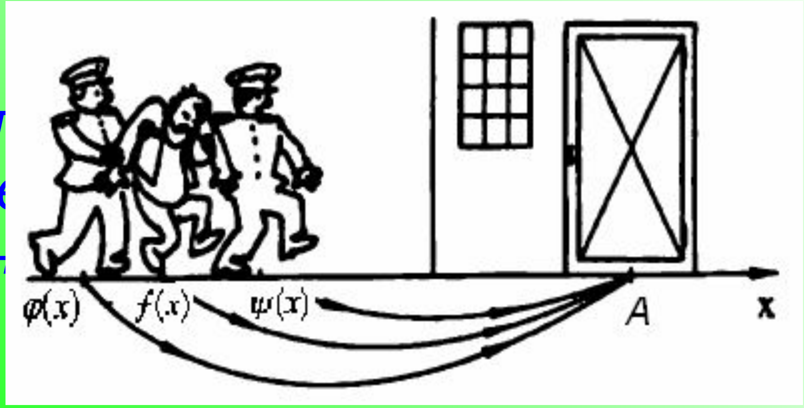
Замечание.

В ***теоремах о пределах*** *предп*

пределов функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *и* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, *из че*

пределах суммы, произведения частн

Обратного может и не быть.



Примеры. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1=1,$ но $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x$ не существует.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число **e**): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Признаки существования предела

1. Монотонная ограниченная в $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{\varepsilon})$ функция имеет предел в точке $\boldsymbol{x_0}$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\psi(x)=A\ \wedge\ \forall x\in O(x_0,\varepsilon)\ (x\to\infty)\ \ \varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0(\infty)}f(x)=A.$$

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Непрерывность функции

Определение.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в этой точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Определение. (односторонняя непрерывность функции в точке)

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***слева*** (***справа***), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) определена в точке x_0 (существует $f(x_0)$);
2) имеет конечный предел при $x \to x_0 - 0$ ($x \to x_0 + 0$);
3) этот предел равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Функция $f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной.

Определение.

Функция $f(x)$ имеет ***разрыв первого рода*** в точке x_0, если в ней существуют конечные левый и правый пределы, но они не совп … е.

Опр

Фу … и в ней … ый или …

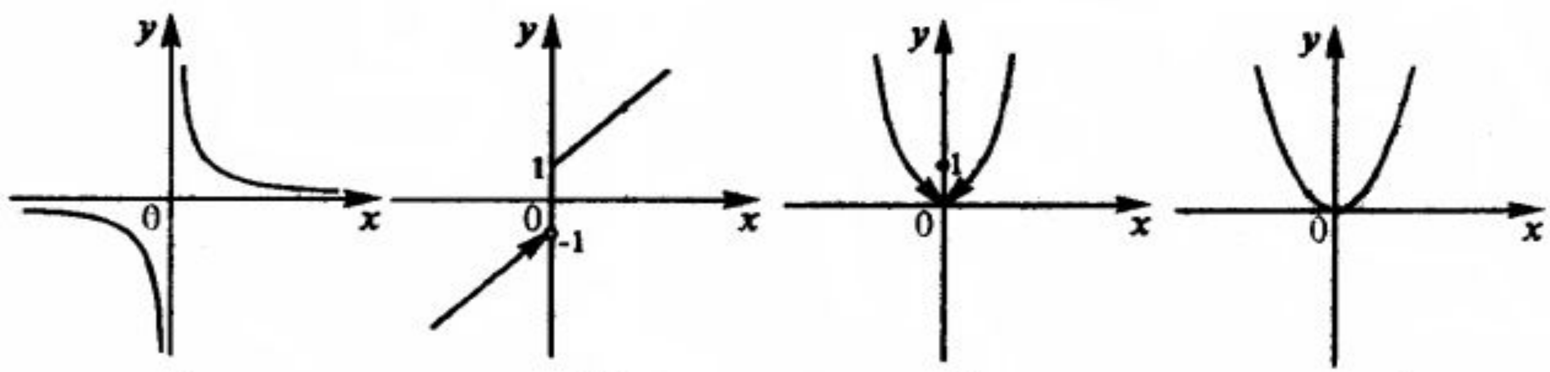
Опр

Точ … ии $f(x)$, … ен знач

Пример.

Исследовать точки разрыва заданных функций.

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \geq 0, \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ г) $y = x^2$.



Разрыв 2 рода

Разрыв 1 рода

Устранимый разрыв

г)

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если $f(x)$ непрерывна точке x_0, то $\exists\ \varepsilon > 0$ такой, что $f(x)$ ***ограничена в*** $O(x_0,\varepsilon)$ ***этой точки***.

2. Если $f(x)$ непрерывна точке x_0, то $\exists\ \varepsilon > 0$ такой, что $\forall x \in O(x_0,$ $\varepsilon)$ этой точки $f(x)$ ***имеет тот же знак***, ***что и*** $f(x_0)$.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны точке x_0, то в ней ***непрерывны*** $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $f(x)/g(x)$, если $g(x) \neq 0$.

4. Пусть функция $y = f(u)$ непрерывна в некоторой точке u_0, а функция $u = g(x)$ – в точке x_0, причем $u_0 = g(x_0)$. Тогда ***сложная функция*** $y = f(g(x))$ ***будет непрерывна в точке*** x_0.

Следствие.

Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям свойства **4**, то

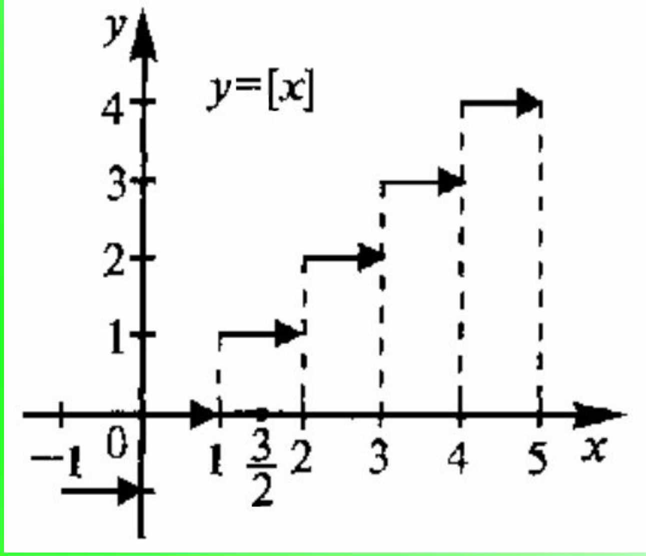
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

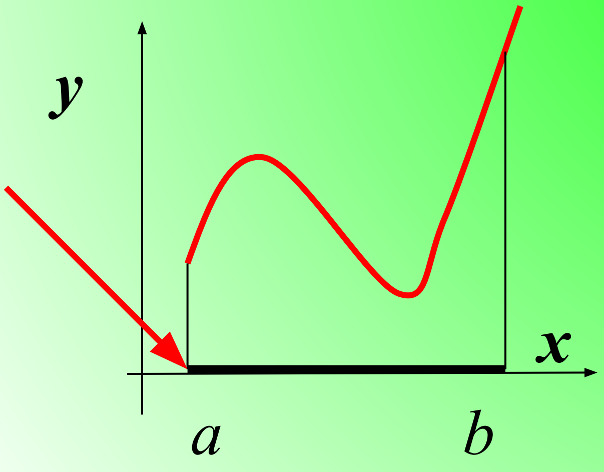
Определение.

Функция называется ***непрерывной на некотором промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.





Определение.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она:

1. Ограничена на нем (**1-я теорема Вейерштрасса**)

$$\exists M, m\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow m \le f(x) \le M;$$

2. Принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения (**2-я теорема Вейерштрасса**)

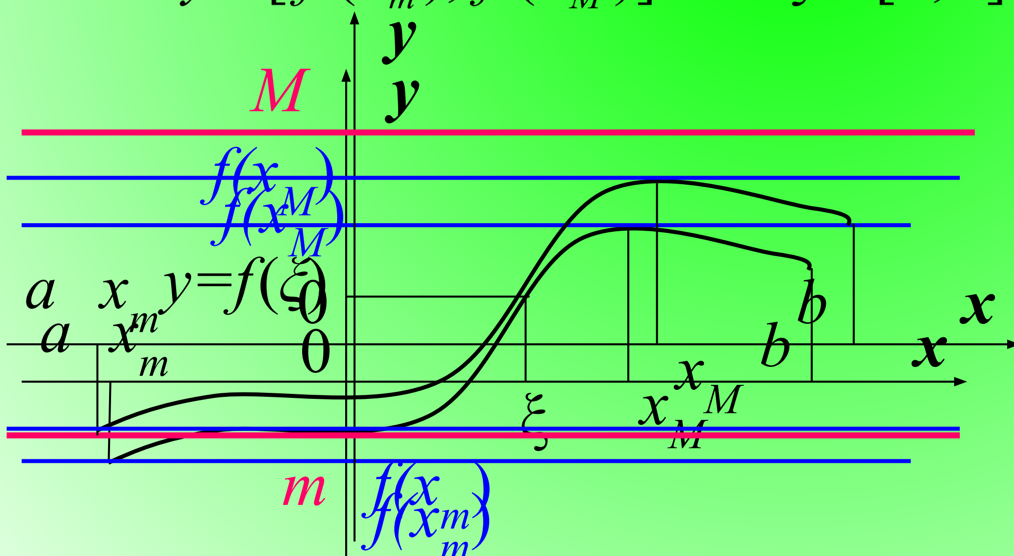
$$\exists x_M, x_m \in[a,b]\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

3. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то она ***равна нулю в некоторой точке интервала*** (a,b) (**1-я теорема Больцано-Коши**)

$$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists\xi\in(a,b)\ f(\xi)=0;$$

4. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ***принимает на нем любое значение между своими наибольшим и наимень-шим значениями*** (**2-я теорема Больцано-Коши**)

$$\forall y\in[f(x_m), f(x_M)] \Rightarrow \exists\xi\in[a,b]\ f(\xi)=y.$$



Карл Вейерштрасс

Бернард Больцано

Благодарю за внимание, лекция окончена!