ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ-4

5. Линейные ДУ I порядка.

- Общий вид линейного ДУ I порядка:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

$A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$- заданные функции, причем $A(x) \neq 0$

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad \Big| : A(x) \neq 0$$

$$y' + \underbrace{\frac{B(x)}{A(x)}}_{p(x)} y + \underbrace{\frac{C(x)}{A(x)}}_{-q(x)} = 0$$

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

Существует несколько (по существу равносильных) приёмов решения линейного ДУ.

Рассмотрим метод Иоганна Бернулли (Bernoulli)- швейцарский математик 1667-1748.

Метод И.Бернулли основан на простом замечании, что любую величину h (переменную или постоянную) можно представить в форме произведения двух сомножителей: $h=uv$ [$u=u(x)$, $v=v(x)$], причем один из них можно выбрать по своему желанию, но отличным от нуля.

Например: $\tan x = uv$

можем взять

$u = e^x$ или $u = \ln x$ или $u = \arcsin x$ или $u = \sqrt{1 - x^2}$

соответственно этому придется взять

$v = e^{-x} \tan x$

$$v = \frac{\tan x}{\arcsin x}$$

$$v = \frac{\tan x}{\ln x}$$

$$v = \frac{\tan x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ:

$$y' - \underbrace{\frac{3}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x}_{q(x)}$$

Это линейное ДУ вида $y' + p(x)y = q(x)$

Представим (неизвестное нам!) общее решение ДУ в виде:

$$y = u \cdot v$$

Найдём производную:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Подставим её в уравнение:

$$u'v + u\,v' - \frac{3}{x}uv = x$$

$$v\,(u' - \frac{3}{x}u) + u\,v' = x \qquad (*)$$

Используем своё право выбора u, взяв его таким, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$u' - \frac{3}{x}u = 0$$

$$u' = \frac{3}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{3}{x}dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3}{x}dx$$

$$\ln|u| = 3\ln|x| + C$$

Поскольку в качестве *u* нам надо взять какое-нибудь одно из решений ДУ, то положим C=0.

$$\ln|u| = 3\ln|x|$$

$$\ln|u| = \ln|x|^3$$

$$u = x^3$$

Подставляя $u = x^3$ в уравнение (*) и учитывая, что

$u' - \frac{3}{x}u = 0$, получим:

$$u\,v' = x$$

$$x^3\,v' = x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int dv = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x} + C$$

Общее решение ДУ:

$$y = u \cdot v = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$$

или

$$y = u \cdot v = -x^2 + Cx^3$$

Ответ. Общее решение ДУ: $y = -x^2 + Cx^3$

Изложим приём в общем виде:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Представим (неизвестное нам!) общее решение ДУ в виде:

$$y = u \cdot v$$

Найдём производную:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Подставим её в уравнение:

$$u'v + u\,v' + p(x)uv = q(x)$$

$$v\,(u' + p(x)u) + u\,v' = q(x) \qquad (**)$$

Используем своё право выбора *u*, взяв его таким, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$u' + p(x)u = 0$$

$$u' = -p(x)\,u$$

$$\frac{du}{dx} = -p(x)\,u$$

$$\frac{du}{u} = -p(x)\,dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln|u| = \ln e^{-\int p(x)dx} + C$$

Поскольку в качестве *u* нам надо взять какое-нибудь одно из решений ДУ, то положим С=0.

$$\ln|u| = \ln e^{-\int p(x)dx}$$

$$u = \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{A(x)}$$

$$u = A(x)$$

Подставляя $u = A(x)$ в уравнение (**) и учитывая,

что $u' + p(x)u = 0$, получим: $u\,v' = q(x)$

$$A(x)\,v' = q(x)$$

$$\int dv = \int \frac{q(x)}{A(x)}\,dx$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{A(x)}$$

$$v = \underbrace{\int \frac{q(x)}{A(x)}\,dx}_{B(x)+C}$$

$$dv = \frac{q(x)}{A(x)}\,dx$$

$$v = B(x) + C$$

Общее решение ДУ:

$$y = u \cdot v = A(x) \cdot \left[B(x) + C\right]$$

Ответ. Общее решение ДУ: $y = A(x) \cdot \left[B(x) + C\right]$

Пример 2. Найти общее решение ДУ:

$$y' + y\underbrace{\tan x}_{p(x)} = \underbrace{\cos^2 x}_{q(x)}$$

Решение:

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + u\,v' + u\,v\tan x = \cos^2 x$$

$$v\left(u' + u\tan x\right) + u\,v' = \cos^2 x$$

1) $u' + u\tan x = 0$

$$u' = -u\tan x$$

$$\frac{du}{dx} = -u\tan x$$

$$\frac{du}{u} = -\tan x\,dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \tan x\,dx$$

$$\ln|u| = \ln|\cos x| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|\cos x|$$

$$u = \cos x$$

2) $u\,v' = \cos^2 x$

$$v' \cos x = \cos^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$dv = \cos x\,dx$$

$$\int dv = \int \cos x\,dx$$

$$v = \sin x + C$$

3) Общее решение ДУ: $y = u \cdot v = (\sin x + C)\cos x$

Ответ. Общее решение ДУ: $y = (\sin x + C)\cos x$

Пример 3. Найти общее решение ДУ:

$$\frac{y'}{x} - 2y = \left(1 - x^2\right)e^{x^2}$$

Решение:

Нужно привести к виду $\quad y' + p(x)y = q(x)$

$$\frac{y'}{x} - 2y = \left(1 - x^2\right)e^{x^2} \quad \Big| \cdot x$$

$$y' \underbrace{-2x}_{p(x)} y = \underbrace{\left(1 - x^2\right)e^{x^2} x}_{q(x)}$$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + u\,v' - 2x\,u\,v = (1 - x^2)\,e^{x^2}\,x$$

$$v\,(u' - 2x\,u) + u\,v' = \left(1 - x^2\right)e^{x^2}\,x$$

1) $u' - 2x u = 0$

$$u' = 2x u$$

$$\frac{du}{dx} = 2x u$$

$$\frac{du}{u} = 2x\, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2x\, dx$$

$$\ln|u| = x^2 + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln e^{x^2}$$

$$\underline{u = e^{x^2}}$$

2) $$u\,v' = \left(1-x^2\right)e^{x^2}x$$

$$v'e^{x^2} = \left(1-x^2\right)e^{x^2}x$$

$$\frac{dv}{dx} = x\left(1-x^2\right)$$

$$dv = x\left(1-x^2\right)dx$$

$$\int dv = \int x\left(1-x^2\right)dx$$

$$\int dv = \int\left(x-x^3\right)dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C$$

3) Общее решение ДУ: $y = u\cdot v = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C\right)$

Ответ. Общее решение ДУ: $y = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C\right)$

Пример 4. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{2}{x}y + x^4, \text{ если } y(1) = \frac{4}{3}$$

Решение:

$$y' \underbrace{- \frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^4}_{q(x)}$$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + u\,v' - \frac{2}{x}u\,v = x^4$$

$$v\,(u' - \frac{2}{x}u) + u\,v' = x^4$$

1) $$u' - \frac{2}{x}u = 0$$

$$u' = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2}{x}dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\ln|u| = 2\ln|x| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|x|^2$$

$$\underline{u = x^2}$$

2) $u\,v' = x^4$

$$v'x^2 = x^4$$

$$\frac{dv}{dx} = x^2$$

$$dv = x^2\,dx$$

$$\int dv = \int x^2\,dx$$

$$v = \frac{x^3}{3} + C$$

3) Общее решение ДУ: $y = u \cdot v = x^2\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

Найдем частное решение ДУ:

Подставим начальные условия $y(1) = \frac{4}{3}$ в общее решение ДУ и вычислим С:

$$y = x^2\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$$ - общее решение

$$\frac{4}{3} = 1^2\left(\frac{1^3}{3} + C\right)$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C$$

$$C = 1$$

$$y = x^2\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)$$

или

$$y = x^2 + \frac{x^5}{3}$$

частное решение

Пример 5. Найти общее решение ДУ:

$$y' = \frac{y}{x + y^2}$$

Решение:

Нужно привести к виду $\boxed{x' + p(y)x = q(y)}$

Иногда нужно решать линейные ДУ относительно x: y принимаем за независимую переменную, а x- за искомую функцию.

$$y' = \frac{y}{x + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y}$$

$$x' = \frac{x}{y} + y$$

$$x' - \frac{1}{y}x = y$$

$$x' - \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{y}_{q(y)}$$

$$x = u \cdot v$$

$$x' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + u\,v' - \frac{1}{y} u\,v = y$$

$$v\,(u' - \frac{1}{y} u) + u\,v' = y$$

1) $u' - \frac{1}{y}u = 0$

$$u' = \frac{1}{y}u$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = \ln|y| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|y|$$

$$u = y$$

2) $u\,v' = y$

$v'y = y$

$\frac{dv}{dy} = 1$

$dv = dy$

$\int dv = \int dy$

$v = y + C$

3) Общее решение ДУ: $x = u \cdot v = y\left(y + C\right)$

Ответ. Общее решение ДУ: $x = y\left(y + C\right)$