

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных вопросах естествознания и в приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляются значения различных функций (логарифмических, тригонометрических, показательных и др.), вычисляются значения интегралов, решаются дифференциальные уравнения и т.п.

В частности, программы приближенного вычисления значений элементарных функций и решения многих стандартных задач, заложенные в память компьютеров и микрокалькуляторов, основаны на применении теории рядов.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.
ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ
ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ.

1.1. Понятие о рядах

- Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathbb{X}$$

называется **числовым рядом**.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ - члены ряда

u_n - общий член ряда

- Сумма n первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

называется n -ой частичной суммой ряда и обозначается через

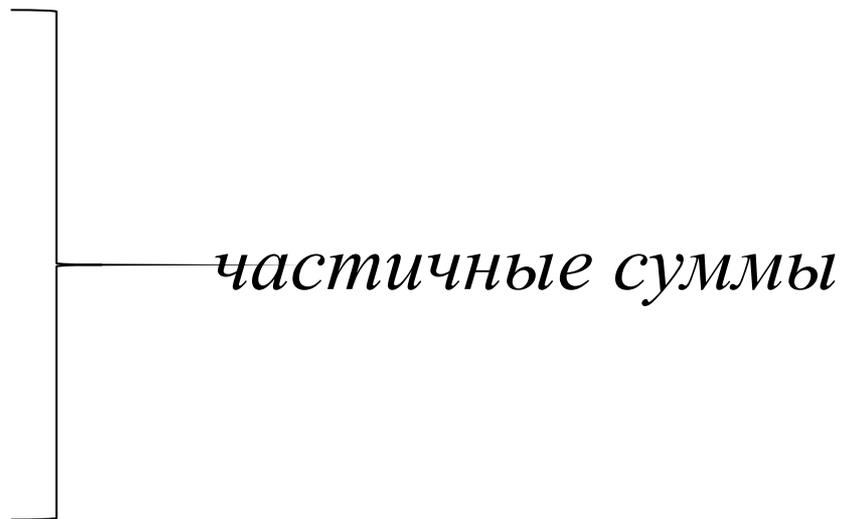
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

.....



При изменении n меняется и S_n ; при этом возможны два случая:

1) величина S_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел S , т.е.
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Тогда ряд называется **сходящимся**, а S - **суммой ряда**.

2) величина S_n при $n \rightarrow \infty$ предела не имеет или её предел равен ∞ .

Тогда ряд называется **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 1

(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

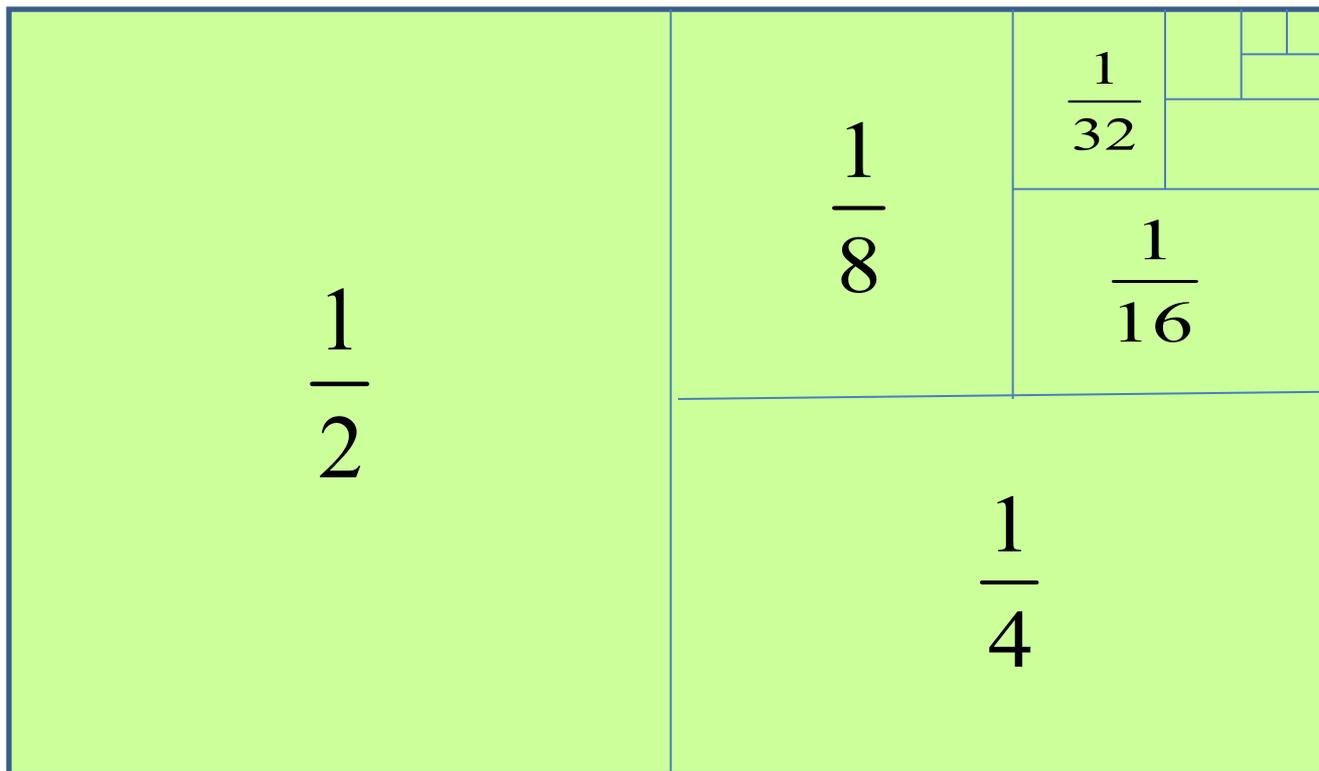
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

*частичные суммы всё
меньше и меньше
отличаются от 1.*



Объединение всех этих прямоугольников дает исходный прямоугольник, значит, и сумма их площадей д.б. равна площади исходного:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

СХОДИТСЯ, Т.К.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

формула для геометрической прогрессии $|q| < 1$

Пример 2

(бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия):

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + \dots$$

Ряд расходится, т.к

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aq^n - a}{q - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 2}{2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 2) = \infty$$

формула для геометрической прогрессии

Ряд геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

Ряд сходится при $|q| < 1$ (см. пример 1)

Ряд расходится при $|q| \geq 1$ (см. пример 2)

Пример 3 (гармонический ряд):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Ряд расходится.

Пример 4

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$S_5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

.....

*последовательность
частичных сумм не
имеет предела*

Ряд расходится.

Пример 5

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ряд сходится к $\frac{\pi}{4}$. Сумму ряда нашёл Г.Лейбниц

Пример 6

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Ряд сходится к $\frac{\pi^2}{6}$. Сумму ряда нашёл Л.Эйлер

Свойства конечных сумм, такие как ассоциативность (произвольная группировка членов), коммутативность (произвольная перестановка членов), для рядов вообще говоря не имеют места.

Однако, если ряд с положительными членами сходится, то его члены м.б. сгруппированы произвольным образом- полученный ряд также сходится и имеет ту же сумму, что и данный.

Свойства рядов

1⁰. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S ,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$, $c \in \mathbb{R}$

также сходится и его сумма равна cS .

Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то ряд останется сходящимся, а его сумма умножится на это число.

1⁰. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится и $c \neq 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$, $c \in \mathbb{R}$

также расходится.

Пример 7

Известно, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

сходится. Показать, что сходится и ряд

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-4}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2^{-4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^4}{2^n} = 2^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Последний ряд получился из первого умножением на $c=2^4$

2⁰. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'' , то

и каждый из двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ сходится и

сумма каждого равна соответственно $S' \mp S''$.

Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.

Пример 8

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = 2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \dots$$

и если он сходится, найти его сумму S .

Решение

Данный ряд м.б. представлен в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \\ &= (1+1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Рассмотрим получившиеся два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Т.к. они являются рядами убывающей геометрической прогрессии, то они сходятся и их суммы равны соответственно:

$$S' = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S'' = \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма:

$$S = S' + S'' = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

3⁰. Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

добавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд сходится или расходится одновременно с данным.

В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

Пример 9

Известно, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

сходится. Тогда сходящимся является и ряд:

$$100 + \sqrt{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

который получается из данного отбрасыванием и добавлением конечного числа членов.

• Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+k}$

называется ***n*-ым остатком ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Т.к. остаток получается из данного ряда отбрасыванием, а данный ряд из остатка- добавлением конечного числа членов, то согласно свойству Z^0 , они одновременно сходятся или расходятся.

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$$

Т.е. остаток стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

В вопросах приближенного вычисления важную роль играет оценка точности приближения.

Если значение данной величины представлено в виде ряда, то оценку приближения при помощи частичных сумм можно получить путем исследования остатка ряда.

Четкое определение сходимости ряда, основанное на понятии предела последовательности частичных сумм, появилось лишь в начале XIX века. Тогда же началось систематическое изучение рядов.

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

сходится, то его общий член $u_n \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании n ($n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Пример 10

Известно, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

сходится. Проверим необходимое условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Необходимое условие выполнено.

Пример 11

Ряд $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \dots$

расходится, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

Необходимое условие не выполнено \Rightarrow ряд расходится

Пример 12

Известно, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

гармонический .

Необходимое условие сходимости ряда выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Между тем этот ряд расходится.

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e$$

Прологарифмируем по основанию e :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \ln e$$

$$n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

$$\ln \left(\frac{1+n}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Пусть $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Тогда получаем:

$$\ln 2 - \ln 1 < 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$

$$\ln 5 - \ln 4 < \frac{1}{4}$$

.....

$$\ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

S_n - частичная сумма
гармонического ряда

$$\ln(1+n) < S_n$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+n) = \infty$ то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

Ряд расходится.

Рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным.

Иными словами: нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости!