





Неопределённый интеграл.

Метод подстановки (замены переменной)

Найти $\int f(x) dx$

пусть $x = \varphi(t)$ да $dx = \varphi'(t) dt$

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства.

Замечание. Иногда целесообразнее подбирать замену переменного в виде $t = \psi(x)$

Пример.
$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx$$

пусть $\psi(x) = t$, тогда $\psi'(x)dx = dt$

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int (2x + 1)^{10} dx$

$$2x + 1 = t$$

$$d(2x + 1) = dt$$

$$2 dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int (2x + 1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int t^{10} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(2x + 1)^{11}}{22} + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sqrt{4x-5} dx$

$$4x - 5 = t$$

$$d(4x - 5) = dt$$

$$4 dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{4}$$

$$\int \sqrt{4x-5} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{t^3}}{12} + C = \frac{2t \cdot \sqrt{t}}{12} + C = \frac{2 \cdot (4x-5) \cdot \sqrt{4x-5}}{12} + C$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin(2 - 3x) dx$

$$2 - 3x = t$$

$$d(2 - 3x) = dt$$

$$-3 dx = dt$$

$$dx = -\frac{dt}{3}$$

$$\int \sin(2 - 3x) dx = -\frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3} \cos t + C = \frac{1}{3} \cos(2 - 3x) + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

$$\ln x = t$$

$$d(\ln x) = dt$$

$$\frac{1}{x} dx = dt$$

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$\int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx =$$

$$= \ln|x| + \int \sin t dt = \ln|x| - \cos t + C = \ln|x| - \cos \frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{x} = t$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = dt$$

$$-\frac{dx}{x^2} = dt$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

$$\sin x = t$$

$$d(\sin x) = dt$$

$$\cos x dx = dt$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{25 + 4x^2}$$

$$\int \frac{dx}{25 + 4x^2} = \int \frac{dx}{5^2 + (2x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{5^2 + t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \arctan \frac{t}{5} + C = \frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + C$$

$$2x = t$$

$$d(2x) = dt$$

$$2 dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \tan x \, dx$

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \\ &= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = \underline{\underline{-\ln|\cos x| + C}}\end{aligned}$$

$$\cos x = t$$

$$d(\cos x) = dt$$

$$-\sin x \, dx = dt$$

Пример 9. Вычислить интеграл

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx$$

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int e^t dt = 4e^t + C = \underline{4e^{\frac{x}{4}} + C}$$

$$\frac{x}{4} = t$$

$$x = 4t$$

$$dx = d(4t)$$

$$dx = 4 dt$$

Пример 10. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx =$$

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$\cos x = t$$

$$d(\cos x) = dt$$

$$-\sin x dx = dt$$

Ещё некоторые формулы.

$$1) \int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C \qquad \int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$$

$$2) \int \sin(kx + b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$$

$$3) \int \cos(kx + b) dx = \frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$$

$$4) \int \frac{dx}{kx + b} = \frac{1}{k} \ln|kx + b| + C$$

$$5) \int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k} \tan(kx+b) + C$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k} \cot(kx+b) + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2 x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{k^2 + n^2 x^2} = \frac{1}{kn} \arctan \frac{n}{k} x + C$$

$$9) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$x = a \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$dx = a \cos t dt$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} \cdot t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.

$$1^0. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)}_{\pm k} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right) \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

$$dx = dt$$

табличный интеграл



$$2^0. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)}_{\pm k} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right)
 \end{aligned}$$

при $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

$$dx = dt$$

табличный интеграл

при $a < 0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 5 - 1 = (x - 1)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C =$$

$$x - 1 = t$$

$$dx = dt$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x - 1}{2} + C$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{11+10x-x^2}$

$$\begin{aligned} 11+10x-x^2 &= -(x^2-10x-11) = -(x^2-10x+25-11-25) = \\ &= -((x-5)^2-36) \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{11+10x-x^2} = -\int \frac{dx}{(x-5)^2-36} = -\int \frac{dt}{t^2-6^2} = -\frac{1}{12} \ln \left| \frac{t-6}{t+6} \right| + C =$$

$$\begin{aligned} x-5 &= t \\ dx &= dt \end{aligned} \qquad = -\frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-5-6}{x-5+6} \right| + C = -\frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-11}{x+1} \right| + C$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 10 - 9 = (x - 3)^2 + 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 + 1}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C =$$

$$x - 3 = t$$

$$dx = dt$$

$$= \ln|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 10}| + C$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$\begin{aligned}5-4x-x^2 &= -(x^2+4x-5) = -(x^2+4x+4-5-4) = \\ &= -((x+2)^2-9) = 9-(x+2)^2\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(2+x)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C =$$

$$2+x=t$$

$$dx=dt$$

$$= \arcsin \frac{2+x}{3} + C$$
