

Производная и дифференциал.

- Первое правило Лопиталя (G.-F. de l'Hospital)
(раскрытие неопределённости вида $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и равны нулю в этой точке $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Пусть $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0 . Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

то существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива

формула:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема Лопиталя верна и в случае, когда

$$x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow +\infty$$

Замечание. Если окажется, что отношение

производных $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет

собой неопределенность и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя применяют повторно.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(x-1) \cdot (x+1)^2}{(1+x^2) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \end{aligned}$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

• Второе правило Лопитала
(раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 , причем $g'(x) \neq 0$.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

Тогда, если существует предел отношения

производных $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ то существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
причем справедлива формула:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример 4. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \end{aligned}$$

Другие виды неопределённостей.

$$(0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty)$$

Неопределённости вида $0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$

можно свести к $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а затем

раскрыть с помощью правила Лопиталья.

Пример 5. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)' } =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Пример 6. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cot x = 0$$

Неопределённости вида 0^0 , ∞^0 , 1^∞
имеют место при рассмотрении функций

$$y = f(x)^{g(x)}$$

если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞ , а $g(x)$ -соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

сводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$

Пример 7. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \cdot \ln x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = [0 \cdot \infty] = e^0 = 1$$

см. пример 5

Пример 8. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e^x - 1 - x} \cdot \ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1 + x^2)(e^x - 1)}} = \left[\frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x + x^2 e^x - 1 - x^2}} =$$

первое правило
Лопиталя

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x + 2xe^x + x^2 e^x - 2x}} = e^{\frac{2}{1}} = e^2$$

Пример 9. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x} = [\infty^0] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{2 \cos x \cdot \ln \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{2 \ln \tan x}{\cos x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \ln \tan x}{\cos x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{\sin^2 x}} = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1$$

второе правило
Лопиталя