

ФУНКЦИИ

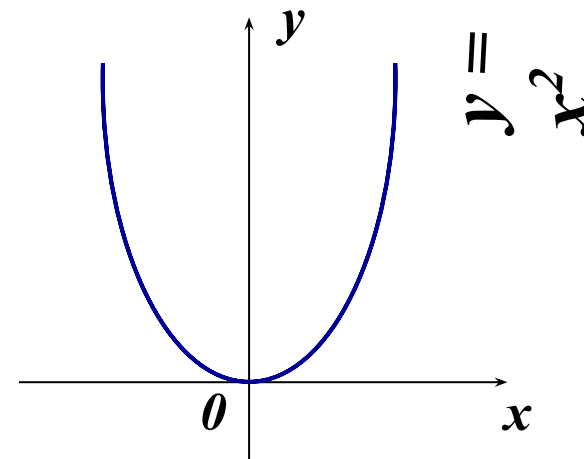
3. Основные характеристики функции

Чётность функции

- Функция $f(x)$ **чётная**, если $\forall x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$
- График чётной функции симметричен относительно оси OY .

$$f(x) = x^2$$

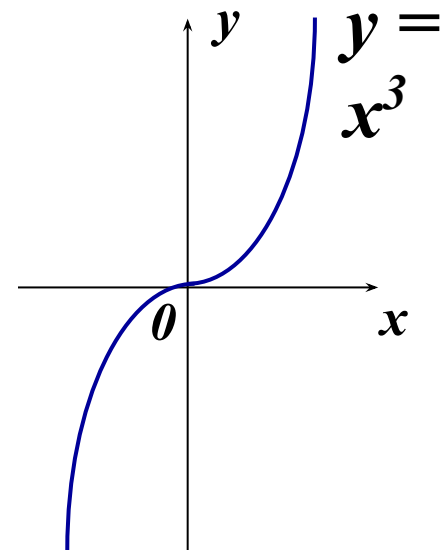
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



- Функция $f(x)$ **нечетная**, если $\forall x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$
- График нечетной функции симметричен относительно начало координат $(0;0)$

$$f(x) = x^3$$

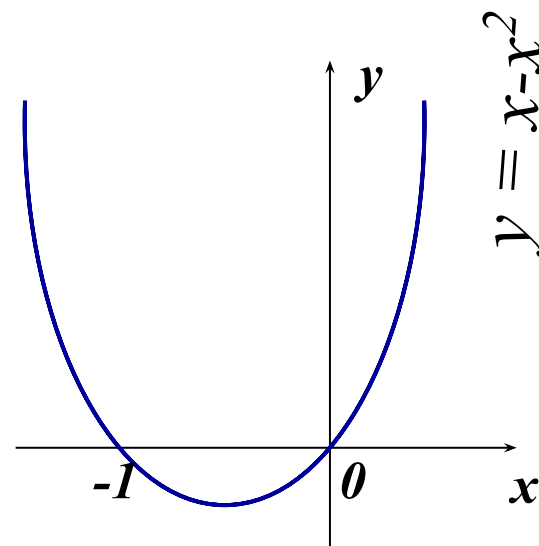
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



- Функция, которая не является четной или нечетной называется функцией **общего вида**.

$$f(x) = x - x^2$$

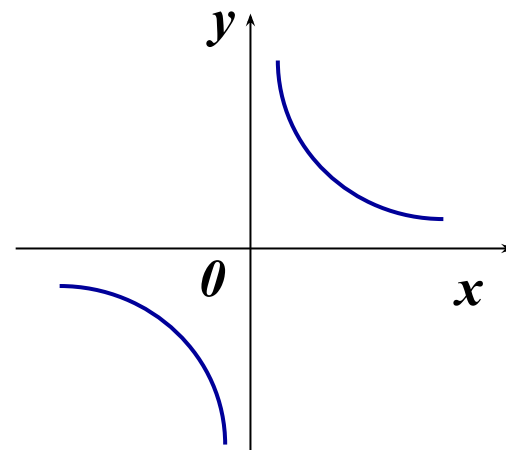
$$f(-x) = -x - (-x)^2 = -x - x^2$$



14. Определить четность функции:

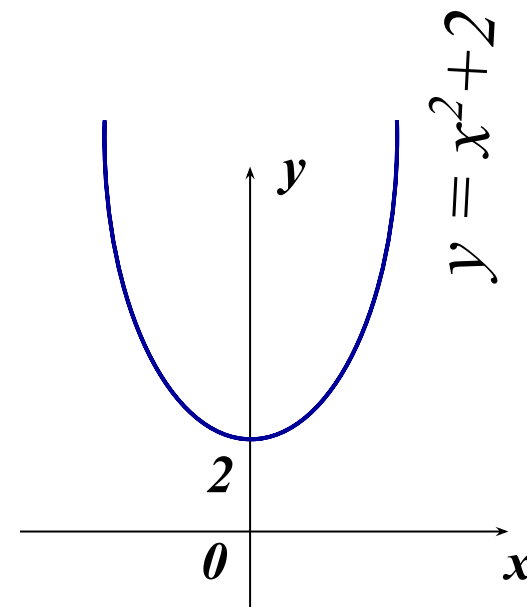
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad - \text{нечетная, т.к.}$$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$



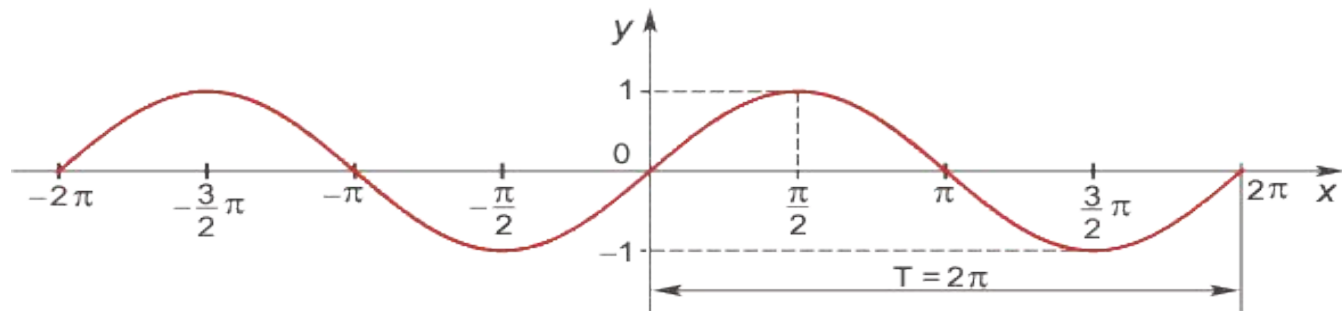
$$f(x) = x^2 + 2 \quad - \text{четная, т.к.}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$



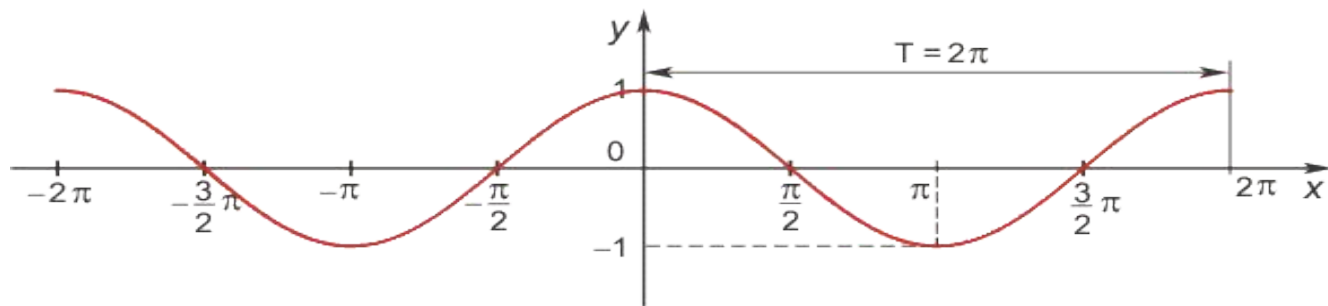
$f(x) = \sin x$ - нечетная, т.к.

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

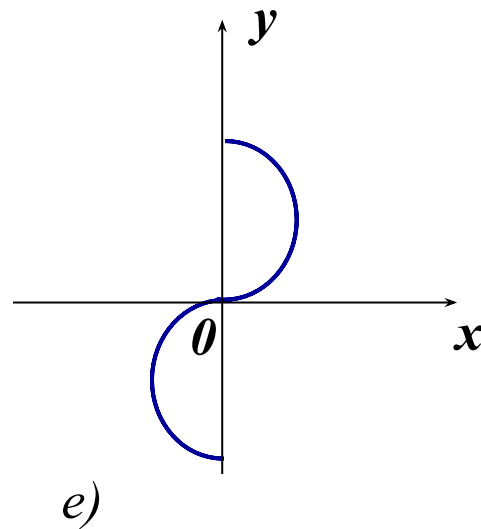
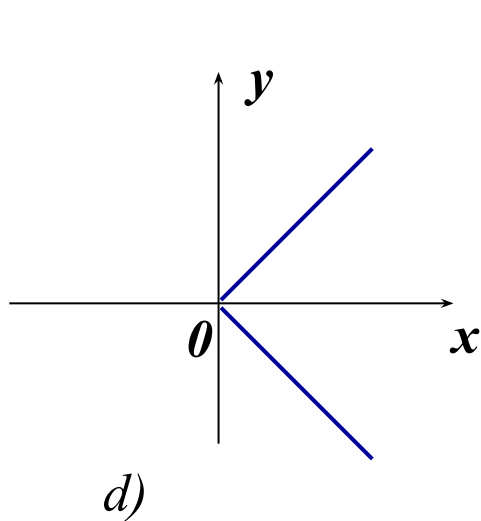
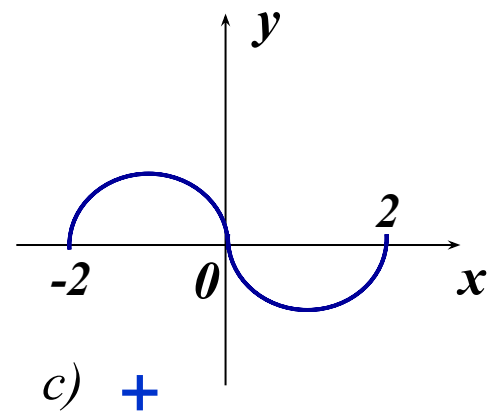
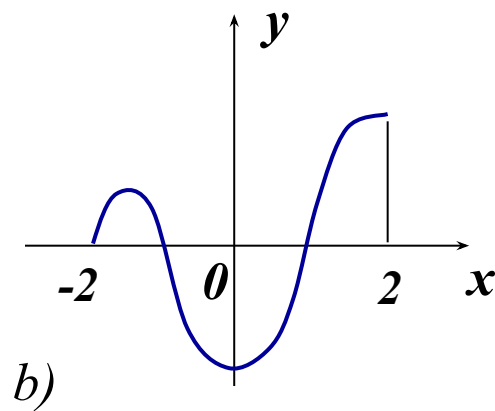
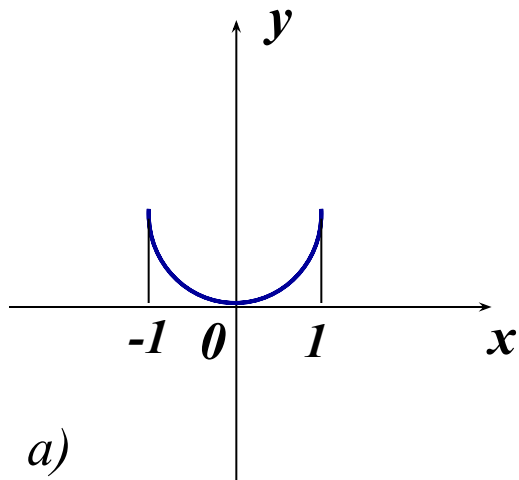


$f(x) = \cos x$ - четная, т.к.

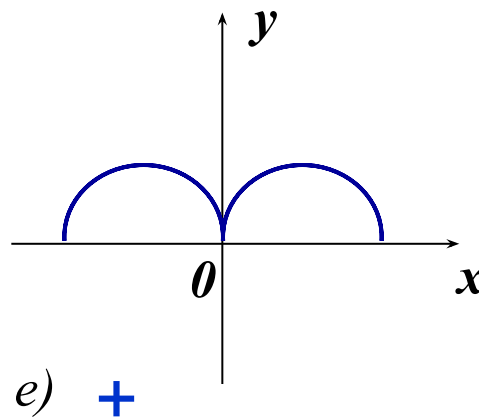
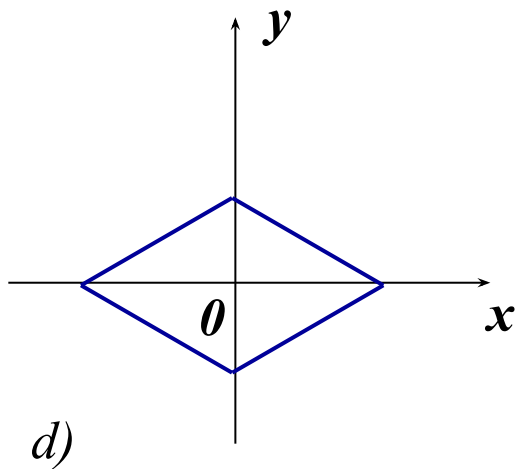
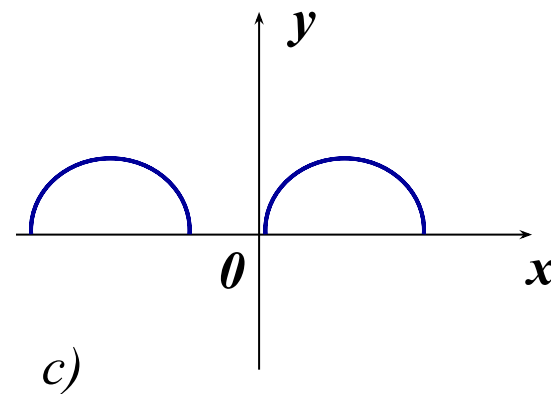
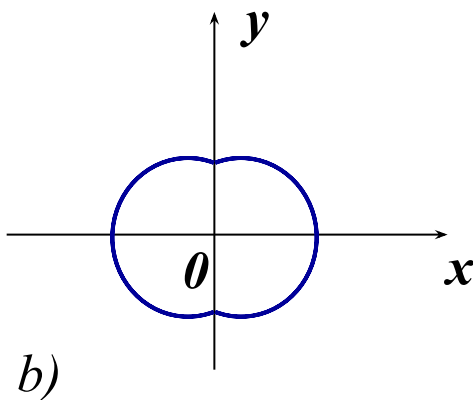
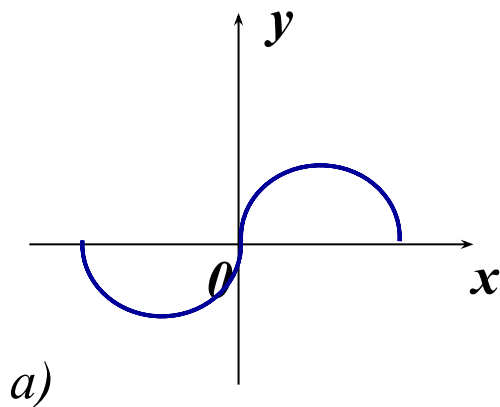
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$



На каком из рисунков изображён график нечётной функции?

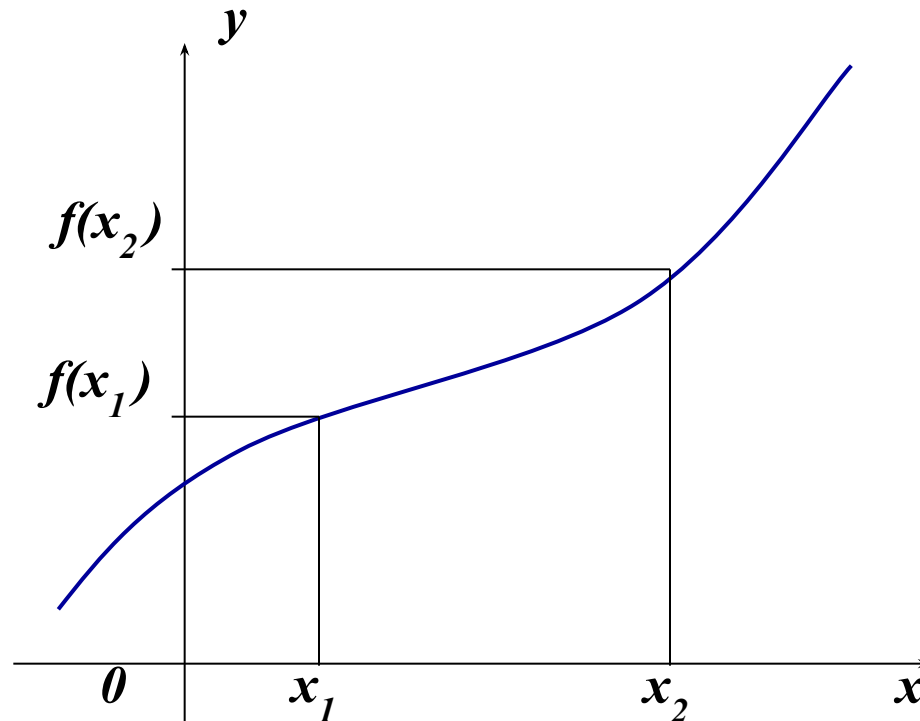


На каком из рисунков изображён график чётной функции?

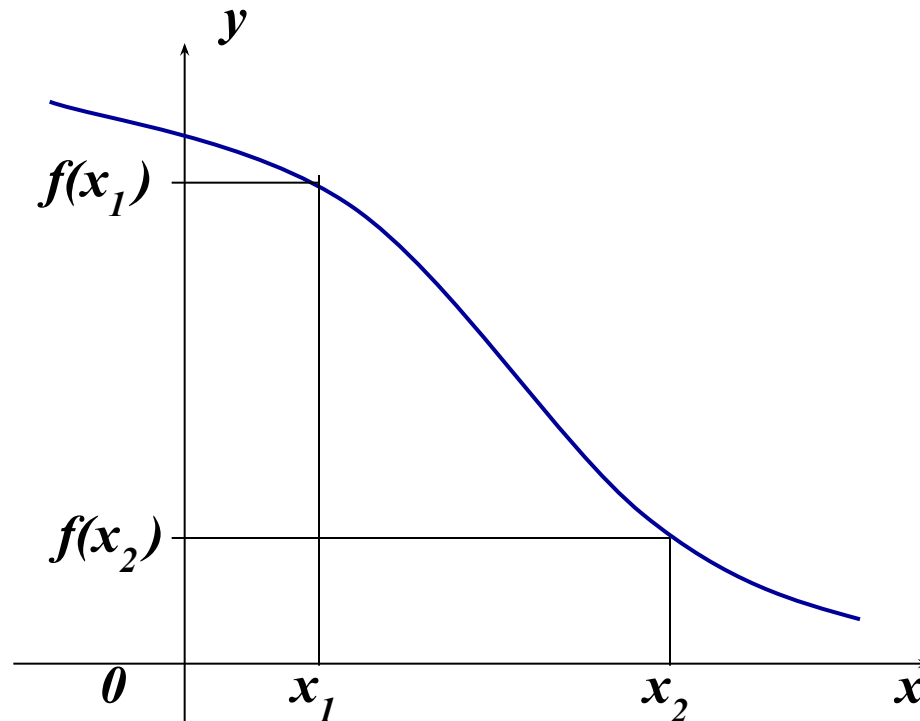


МОНОТОННОСТЬ

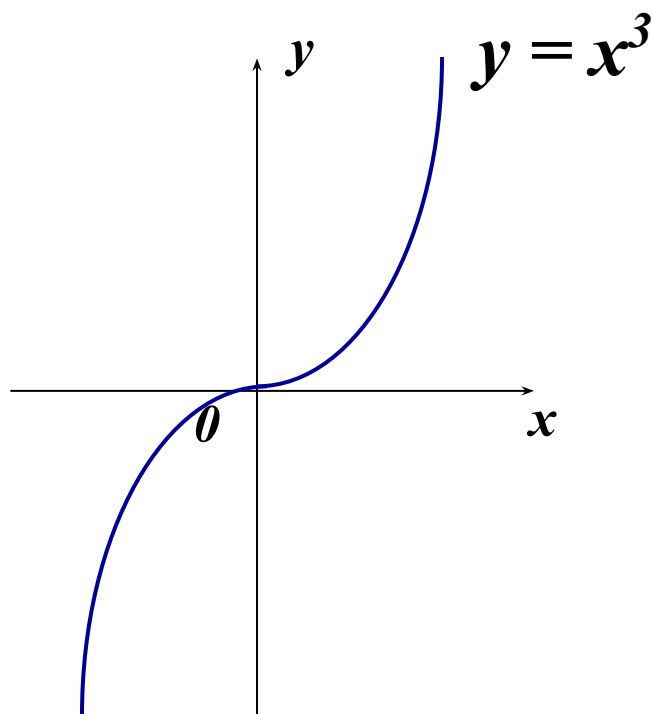
- Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2$ функции $f(x)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).



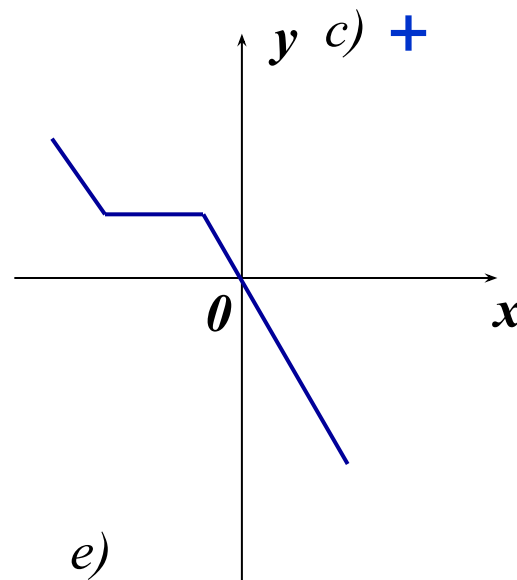
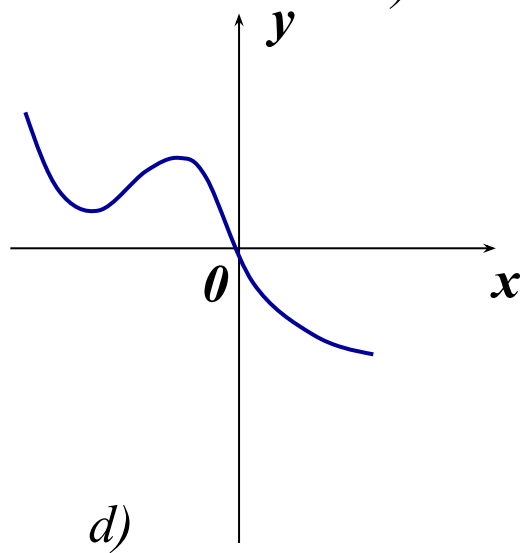
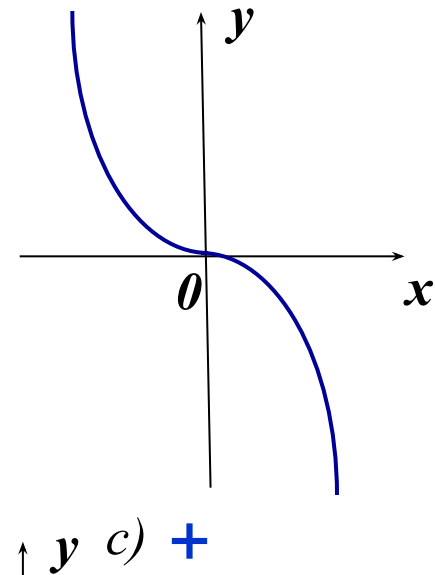
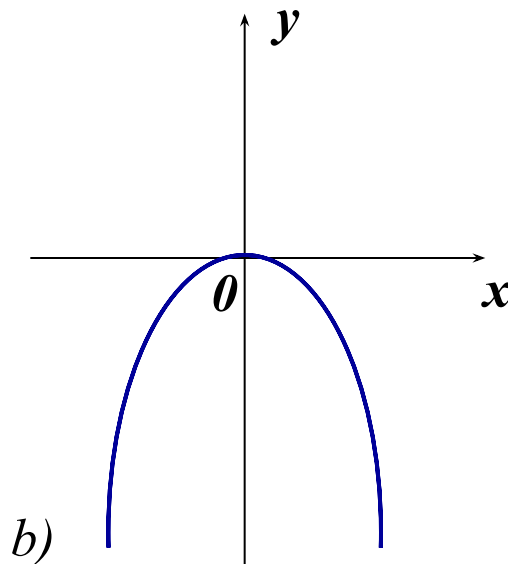
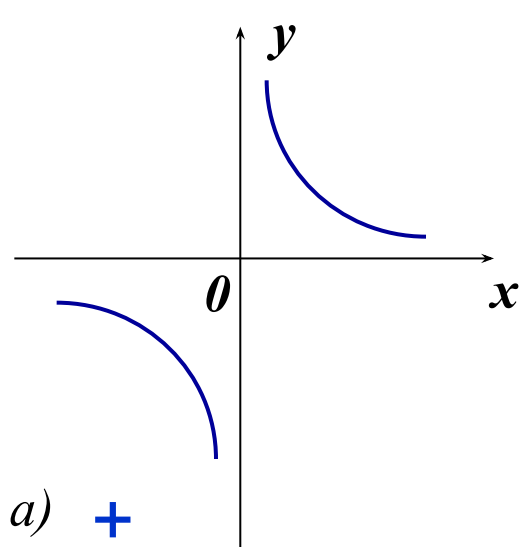
- Функция $f(x)$ называется **убывающей** на $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2$ функции $f(x)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции).



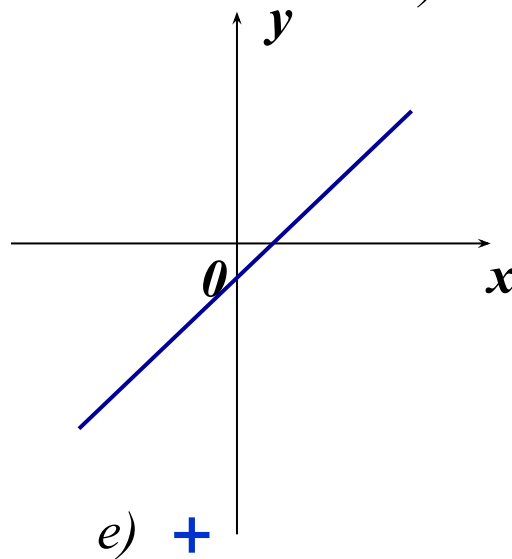
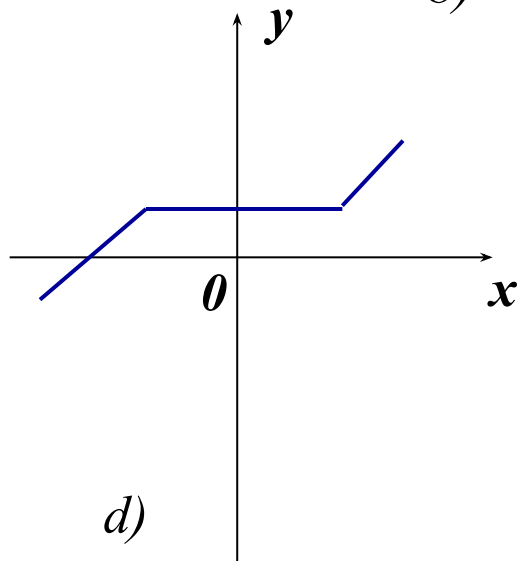
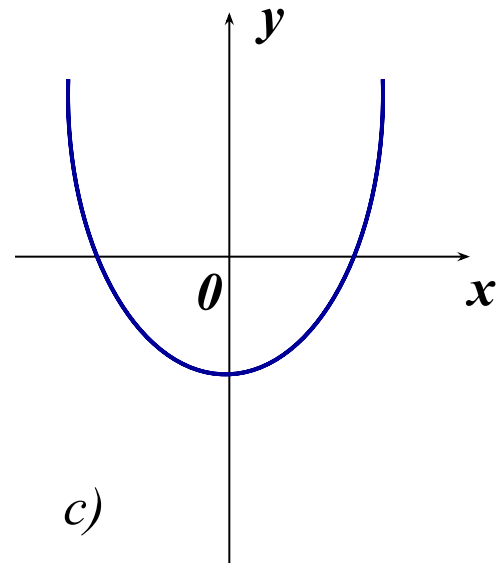
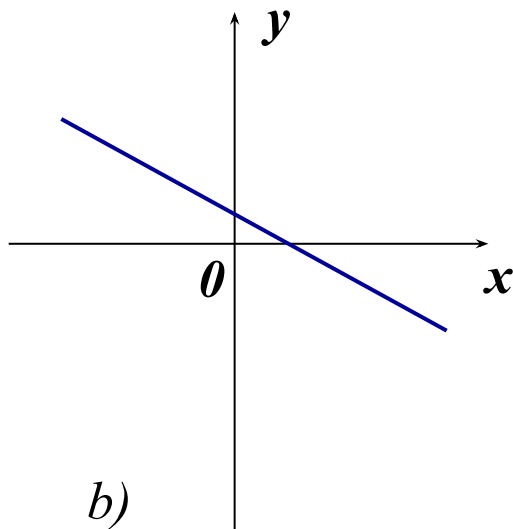
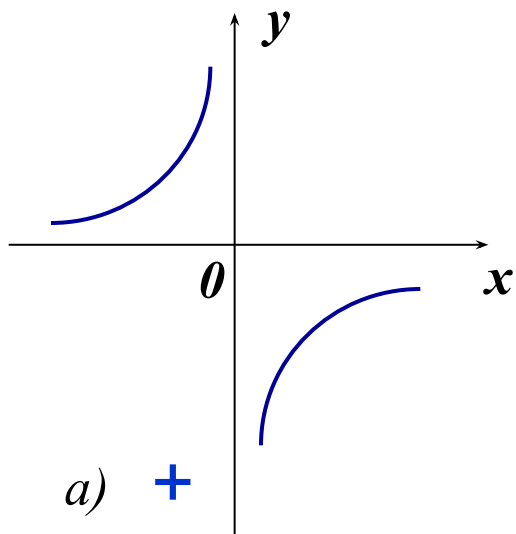
- Только возрастающие или только убывающие функции называются **МОНОТОННЫМИ**.



На каком из рисунков изображён график убывающей функции?



На каком из рисунков изображён график
возрастающей функции?



По графику функции, изображённому на рисунке,
укажите:

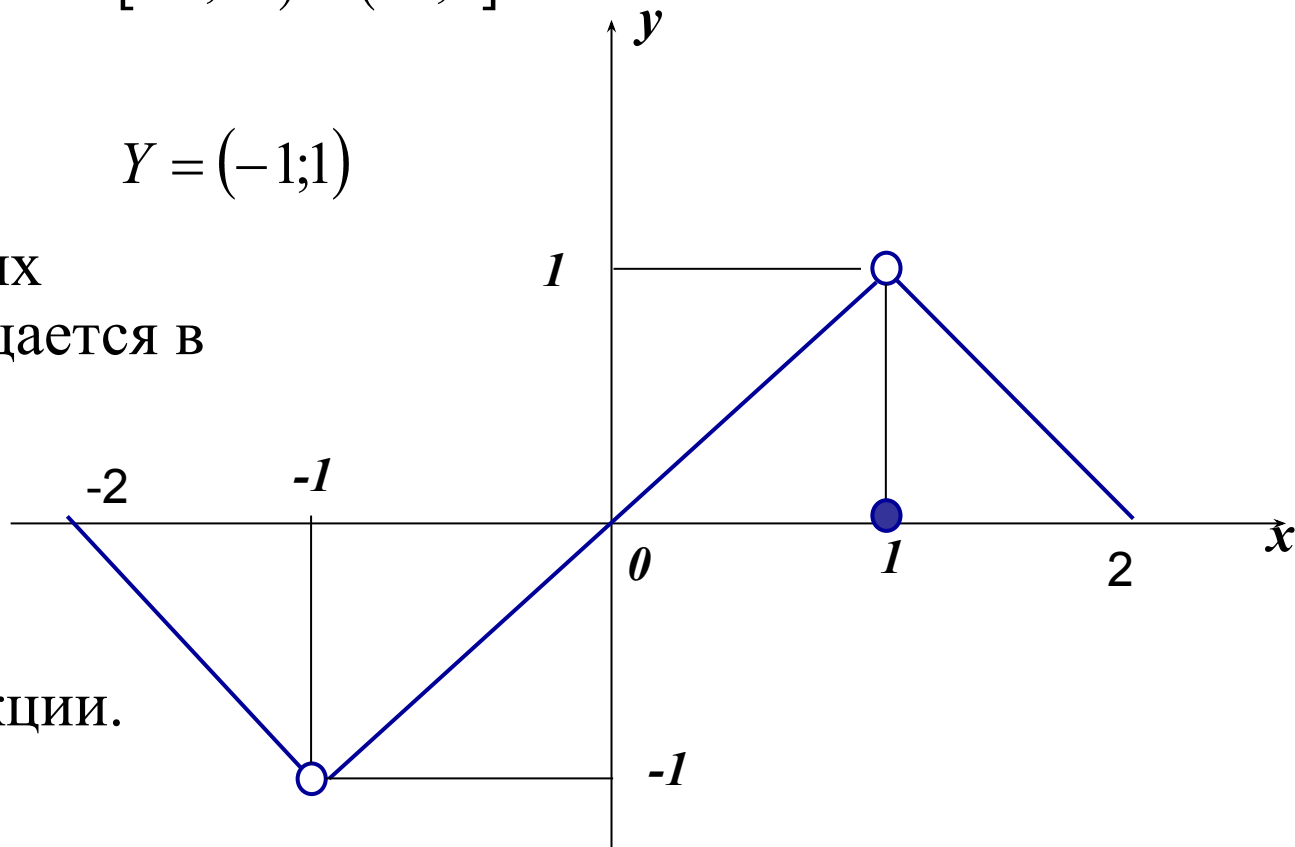
a) область её определения; $X = [-2; -1) \cup (-1; 2]$

b) множество её значений; $Y = (-1; 1)$

c) точки, в которых функция обращается в ноль;

$$x = \pm 2; 0; 1$$

d) промежутки возрастания и убывания функции.



$f(x) \uparrow x \in (-1; 1)$

$f(x) \downarrow x \in [-2; -1) \cup (1; 2]$

По графику функции, изображённому на рисунке,
укажите:

a) область её
определения;

$$X = (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

b) множество её
значений;

$$Y = (-1; +\infty)$$

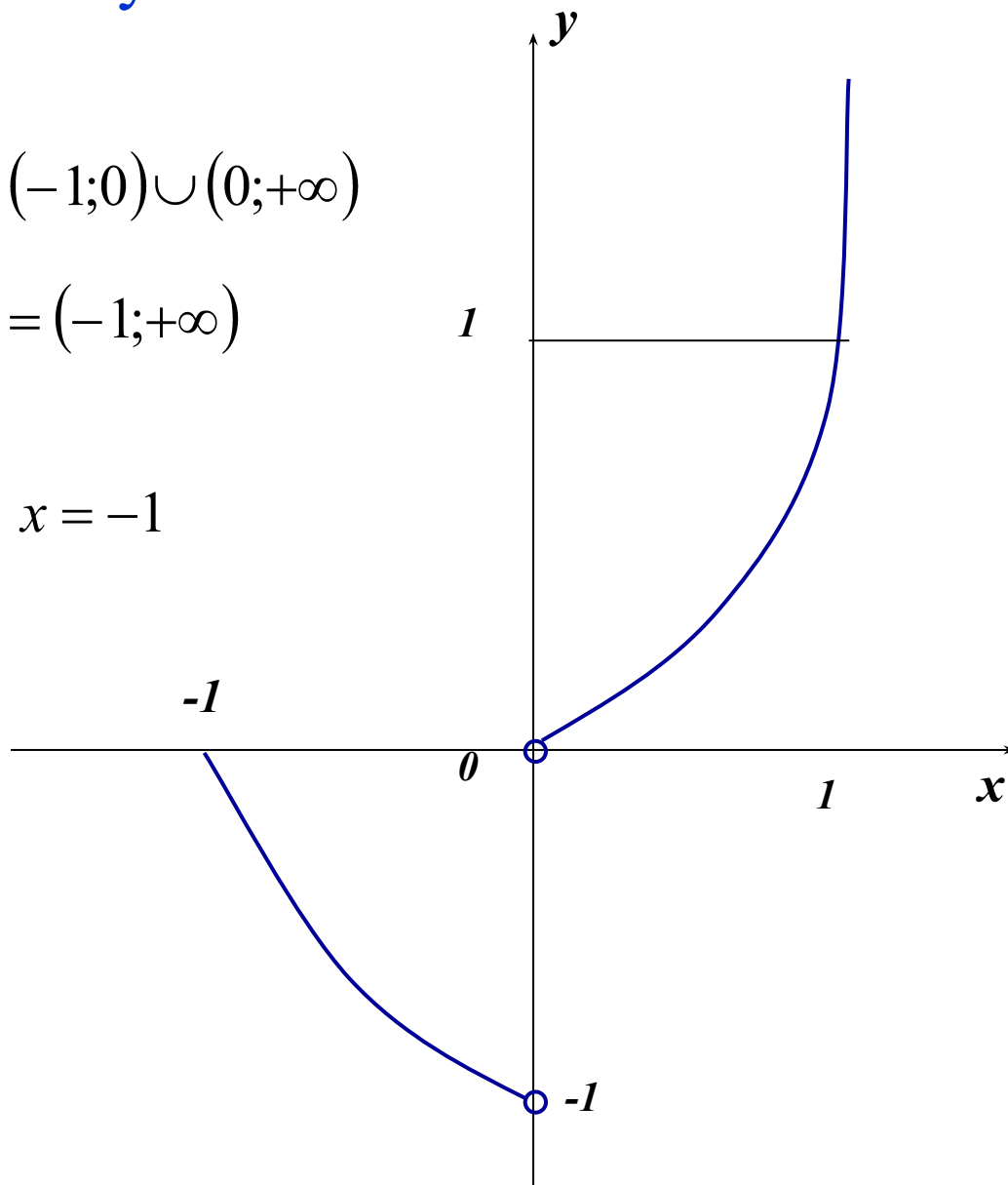
c) точки, в которых
функция
обращается в
ноль;

$$x = -1$$

d) промежутки
возрастания и
убывания
функции.

$$f(x) \uparrow \quad x \in (0; +\infty)$$

$$f(x) \downarrow \quad x \in [-1; 0)$$



По графику функции, изображённому на рисунке,
укажите:

a) область её
определения;

$$X = [-1,5; 1,5]$$

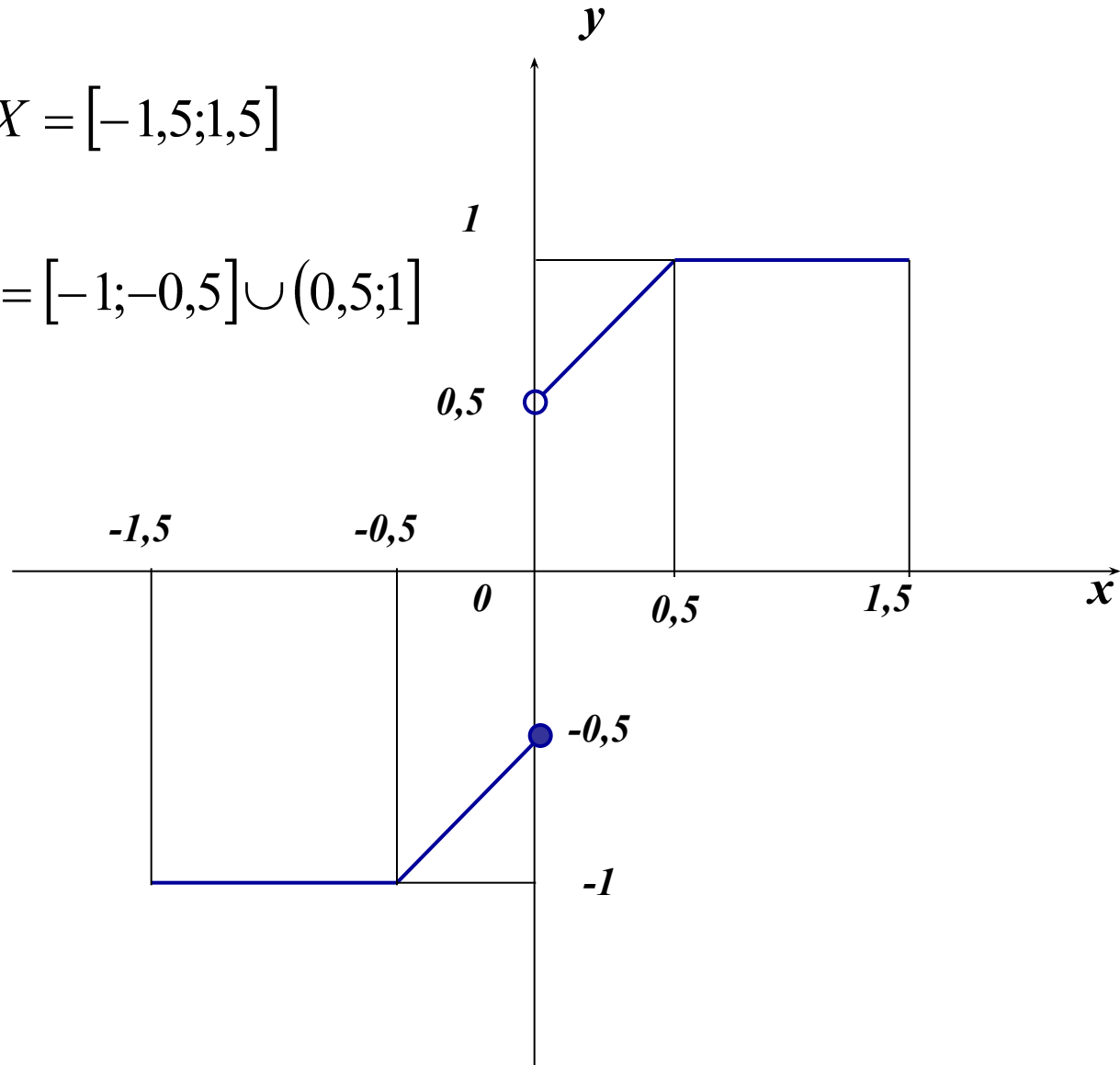
b) множество её
значений;

$$X = [-1; -0,5] \cup (0,5; 1]$$

c) точки, в которых
функция
обращается в
ноль; (нет)

d) промежутки
возрастания и
убывания
функции.

$$f(x) \uparrow x \in [-0,5; 0,5]$$



По графику функции, изображённому на рисунке, укажите:

a) область её определения; $X = [-1,5; 1,5]$

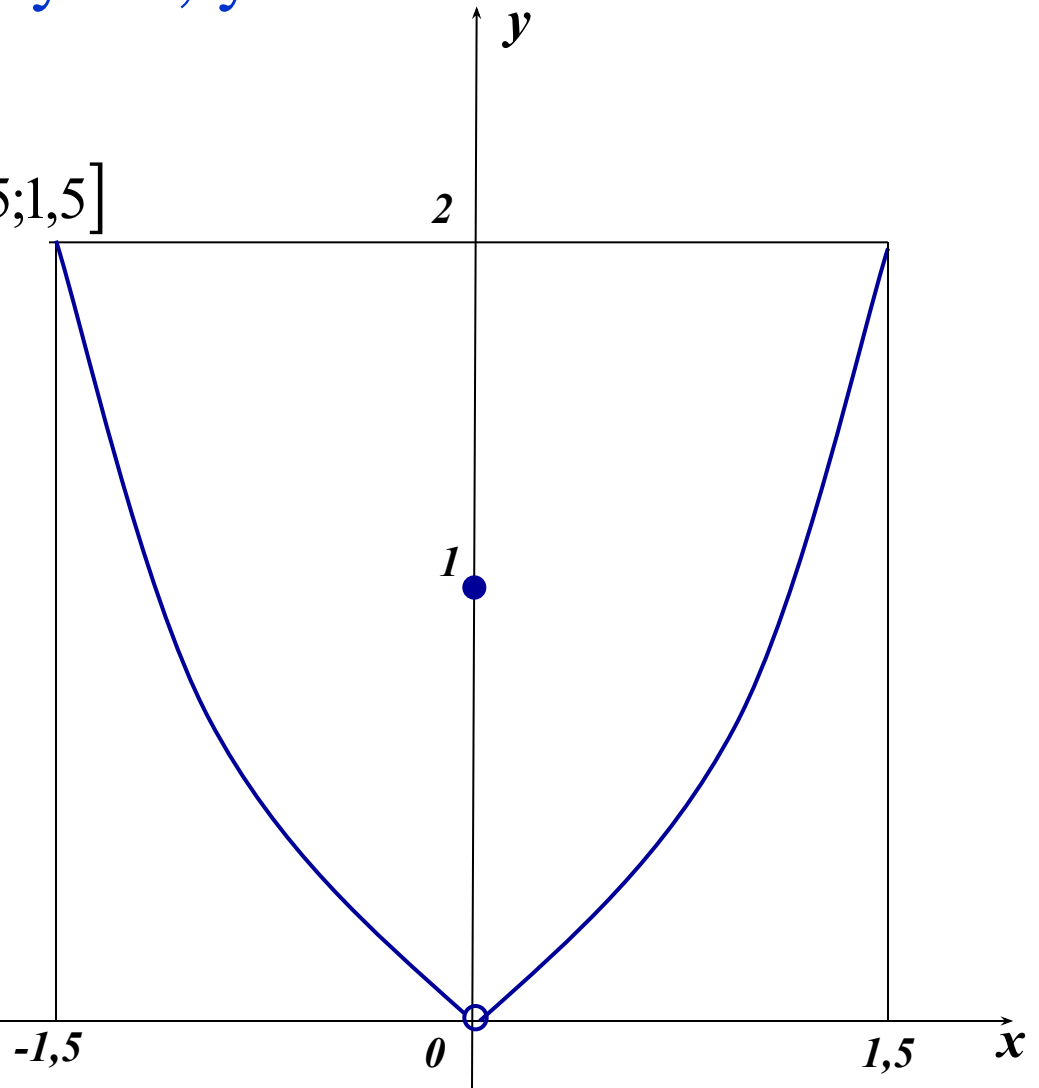
b) множество её значений; $Y = [0; 2]$

c) точки, в которых функция обращается в ноль;
(нет)

d) промежутки возрастания и убывания функции.

$f(x) \uparrow x \in (0; 1,5]$

$f(x) \downarrow x \in [-1,5; 0)$



Периодические функции.

- Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что в каждой точке области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+T)=f(x)$

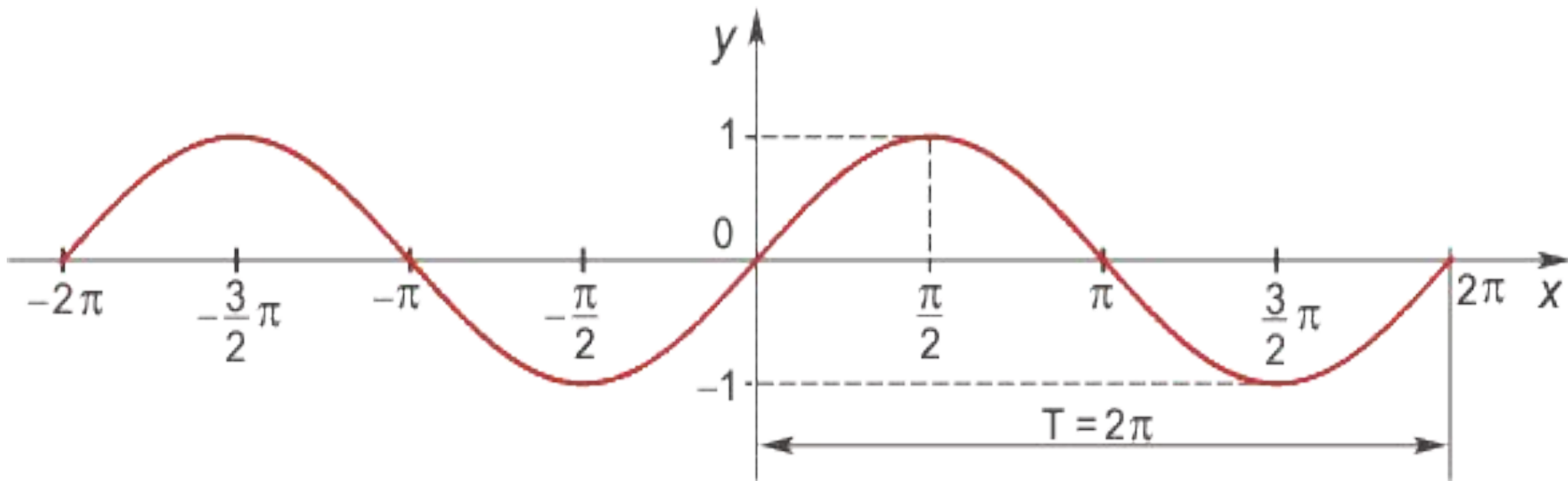
Например: $y=\sin x$ и $y=\tan x$ - периодические

$$T_{\sin x} = 2\pi \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$T_{\tan x} = \pi \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$

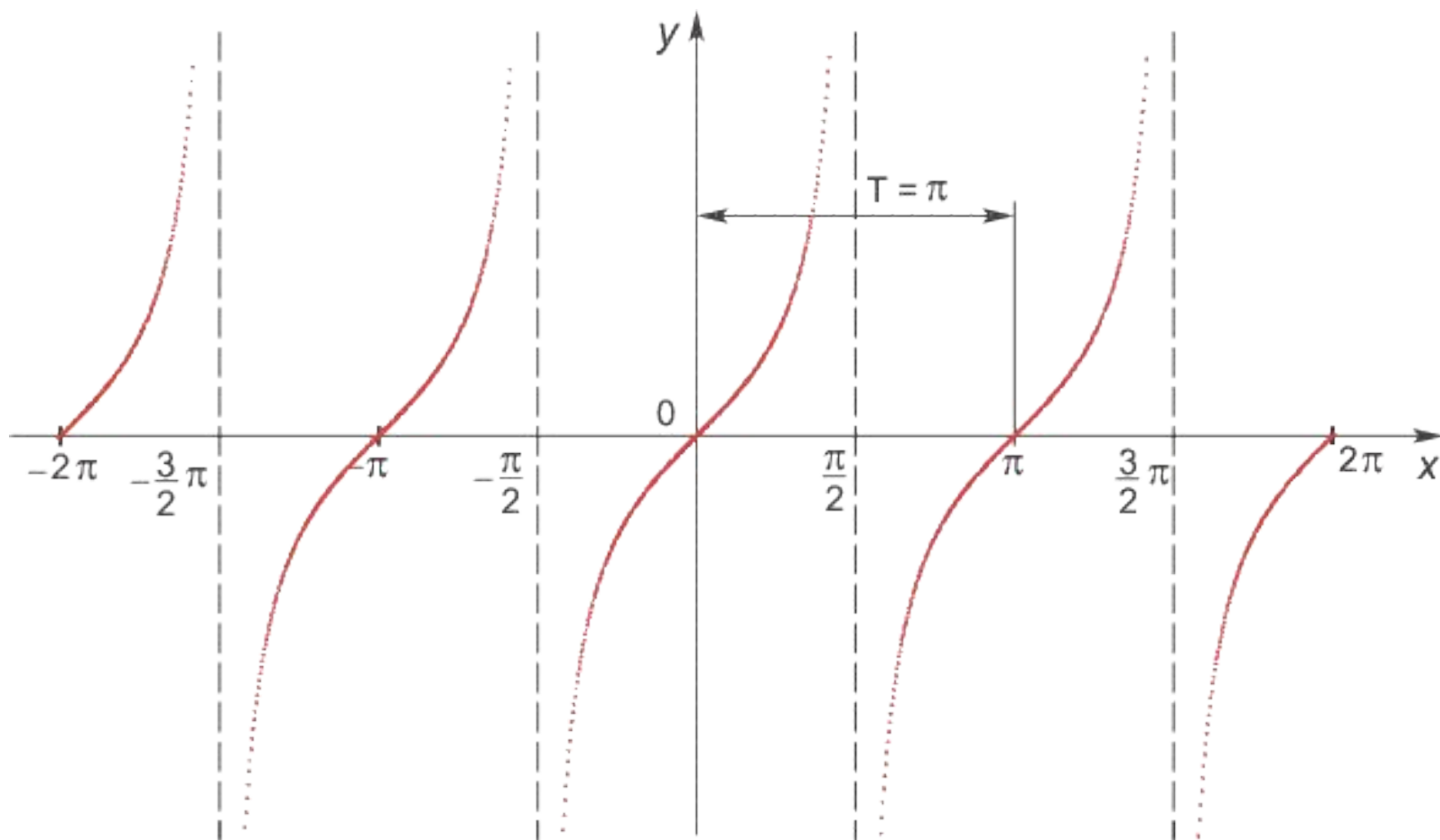
$$y = \sin x$$

- График функции – **синусоида**
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(x+2\pi k) = \sin x$



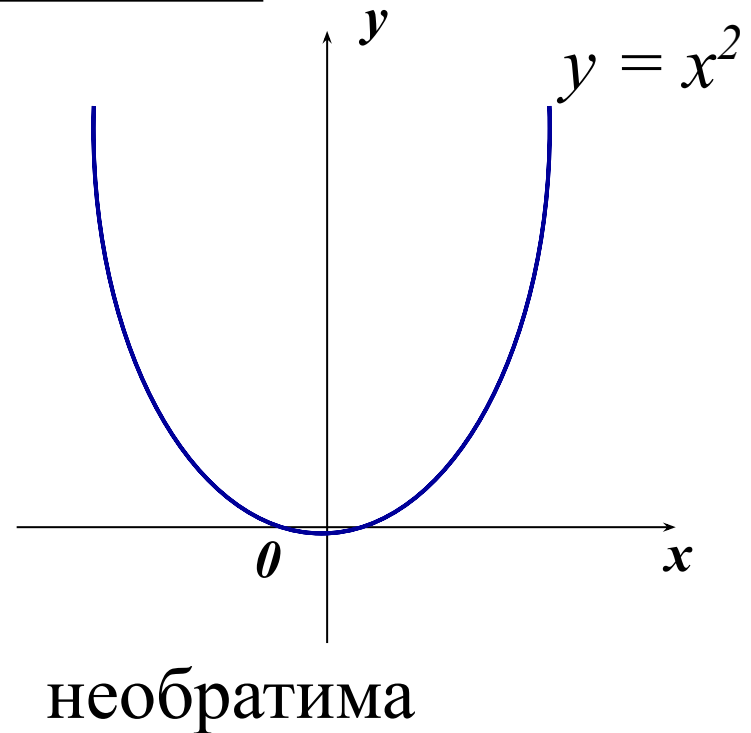
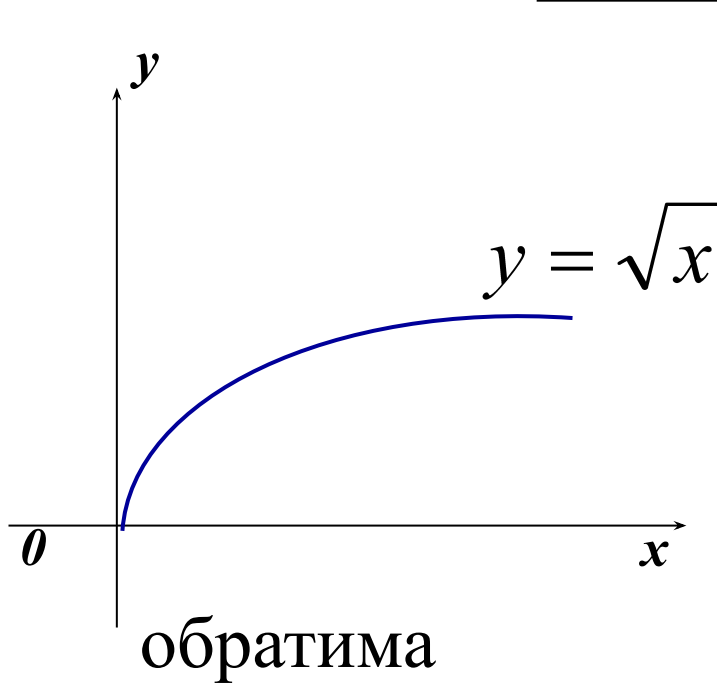
$$y = \tan x$$

- График функции – **тангенсоида**
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(x + \pi k) = \tan x$

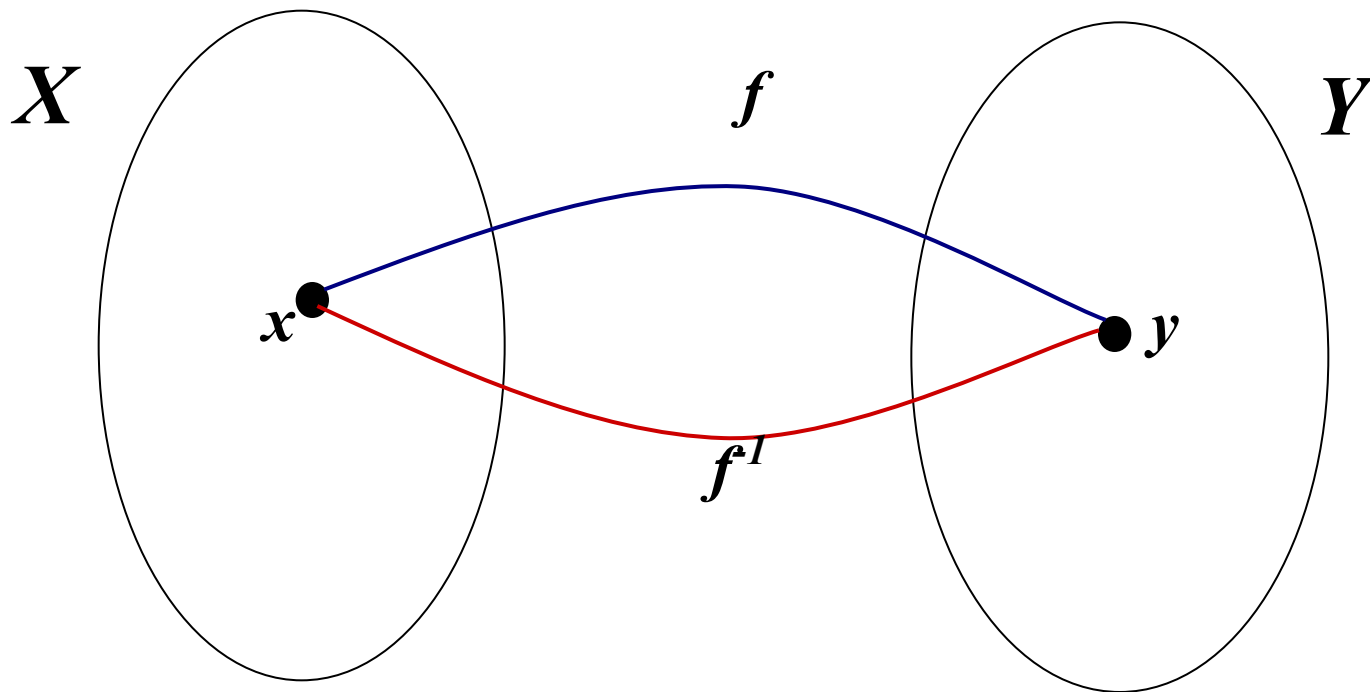


4. Обратные функции

- Функция называется **обратимой**, если каждое значение y поставлено в соответствие единственному x .

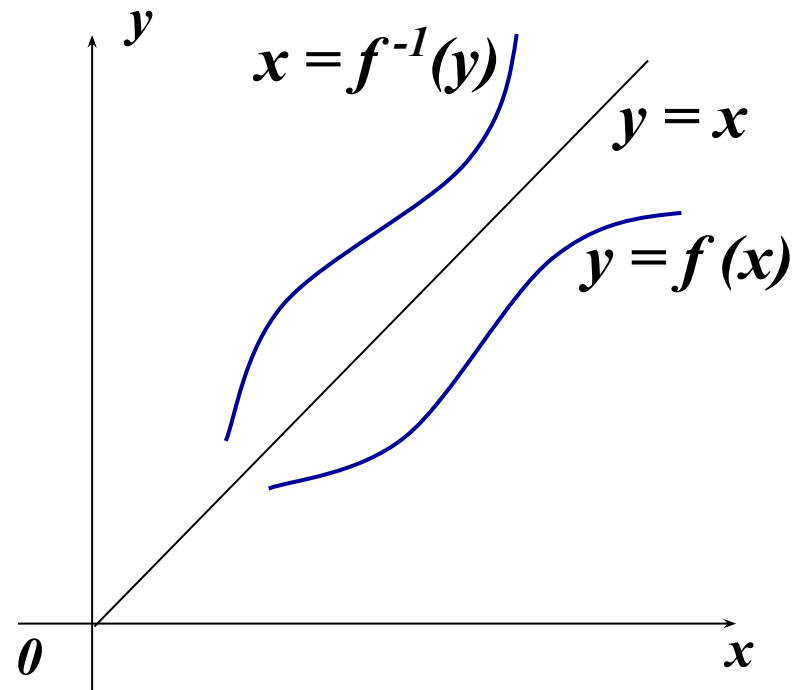


- Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ обратима. Тогда на множестве Y определена функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$, которая каждому элементу $y \in Y$ ставит в соответствие единственный элемент $x \in X$

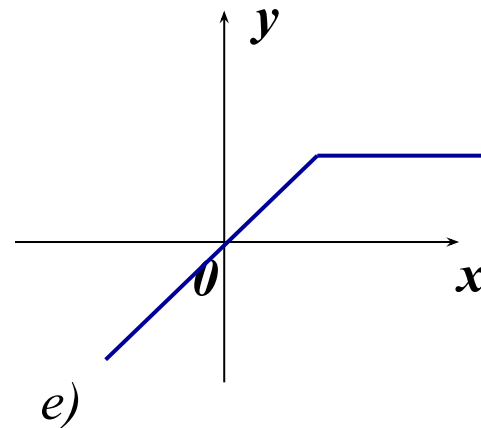
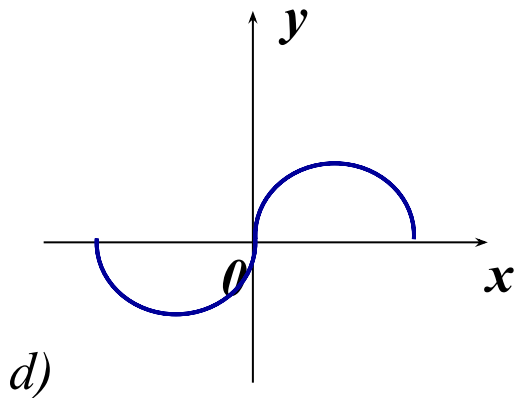
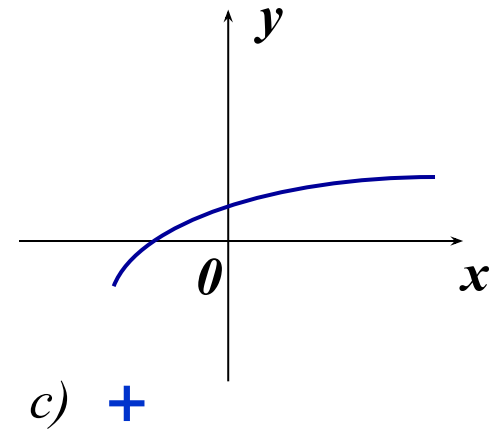
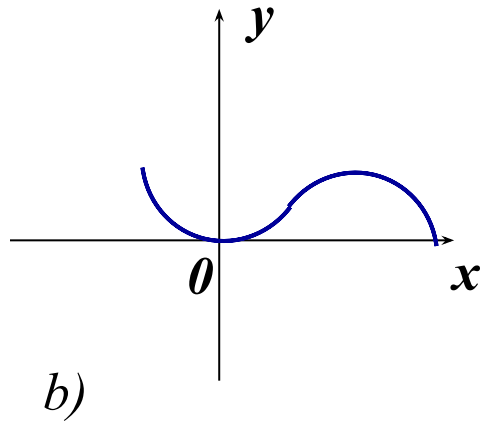
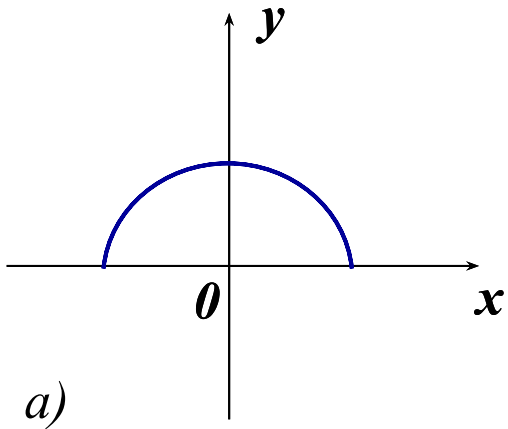


- Функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$ называется **обратной функцией** к функции $f : X \rightarrow Y$.
- $f^{-1} : Y \rightarrow X$ и $f : X \rightarrow Y$ взаимнообратные.

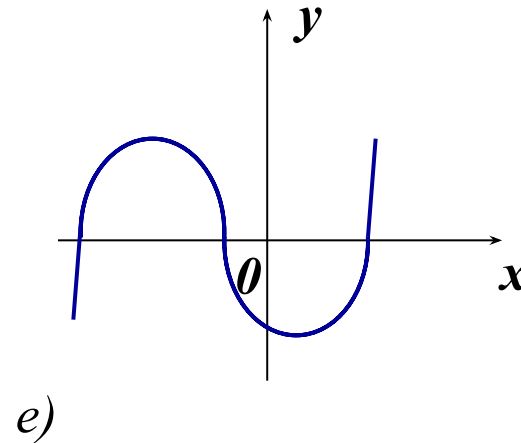
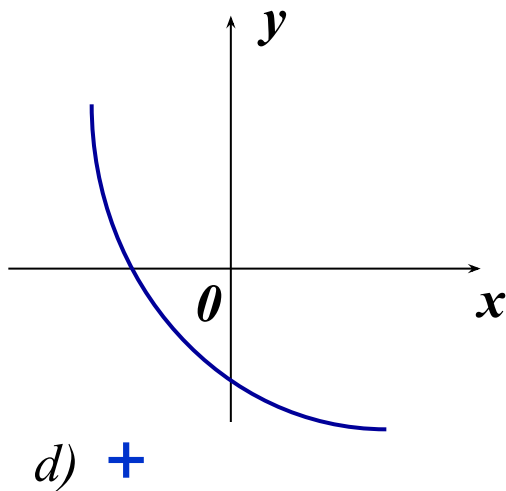
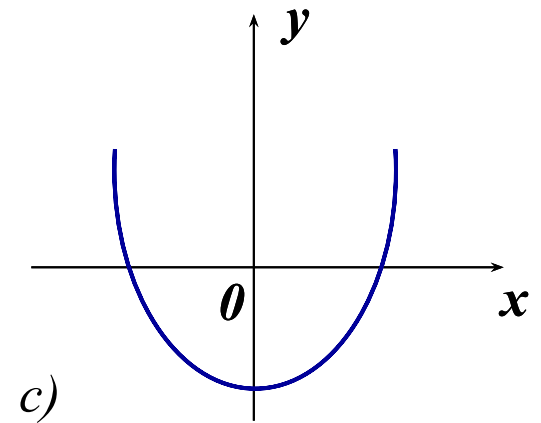
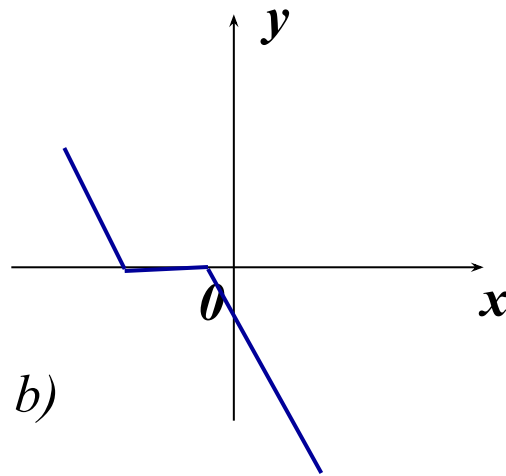
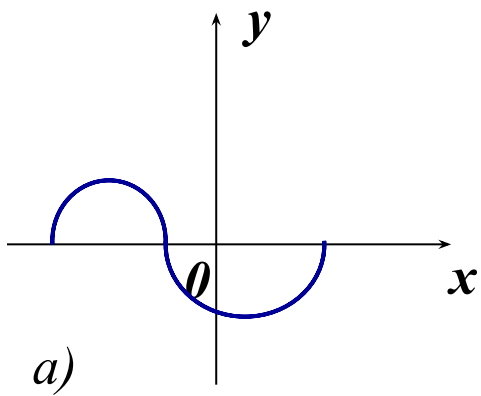
*Графики
взаимнообратных
функций симметричны
относительно прямой $y = x$.*



На каком из рисунков изображён график
обратимой функции?

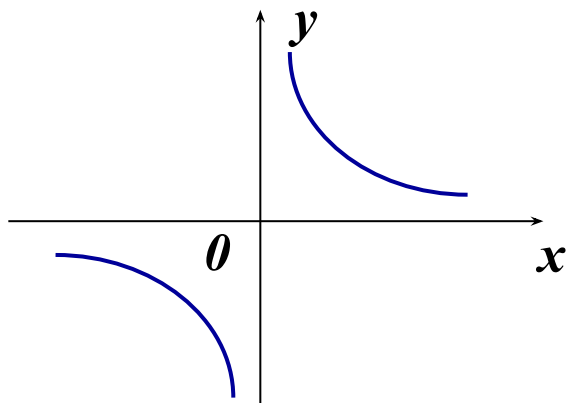


На каком из рисунков изображён график
обратимой функции?

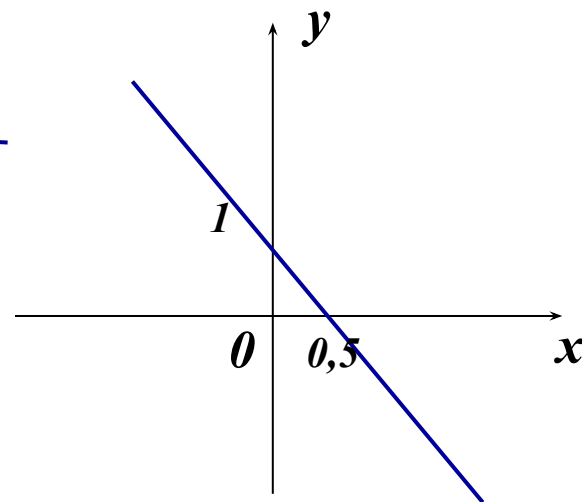
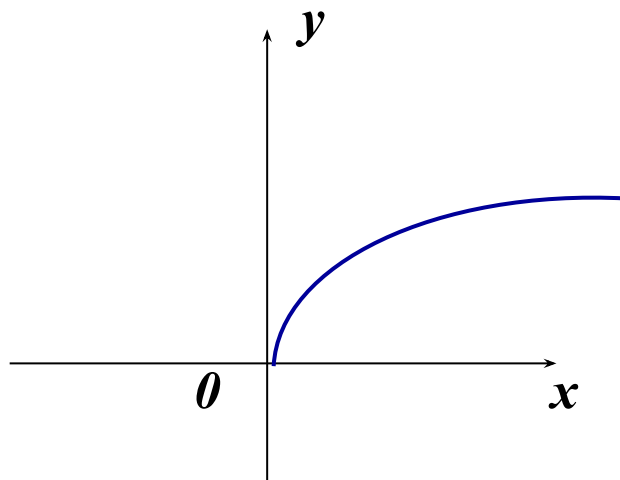


Какая из функций необратима?

a) $y = \frac{2}{x}$



b) $y = \sqrt{x} = -2x + 1$

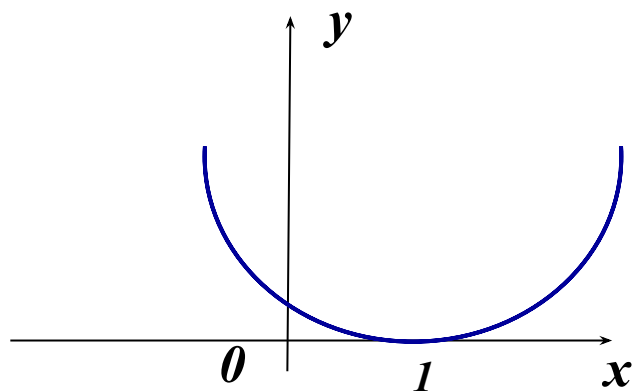
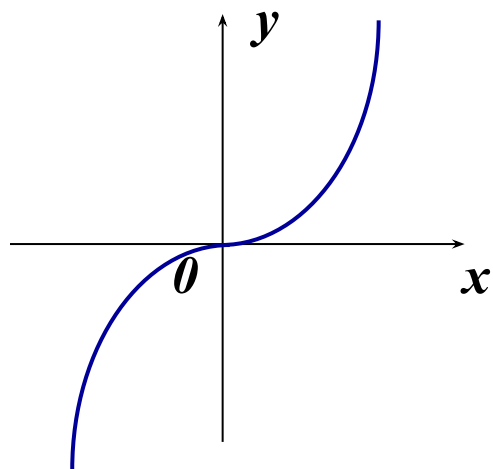


Какая из функций необратима?

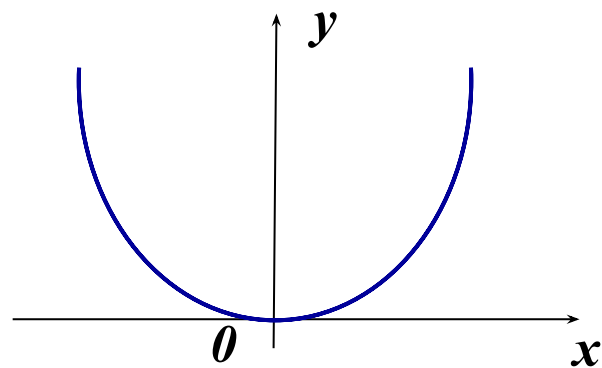
d) $y = x^3$

e) $y = (x-1)^2$

f) $y = x^2$



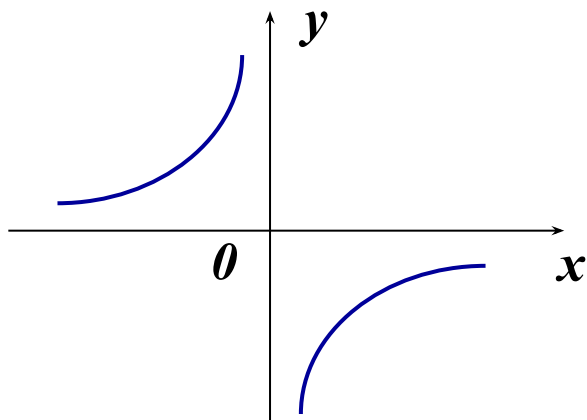
+



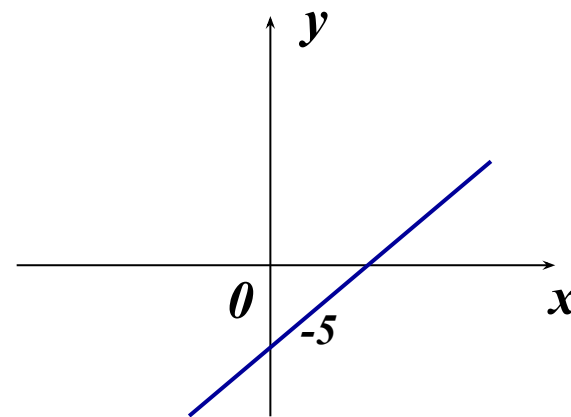
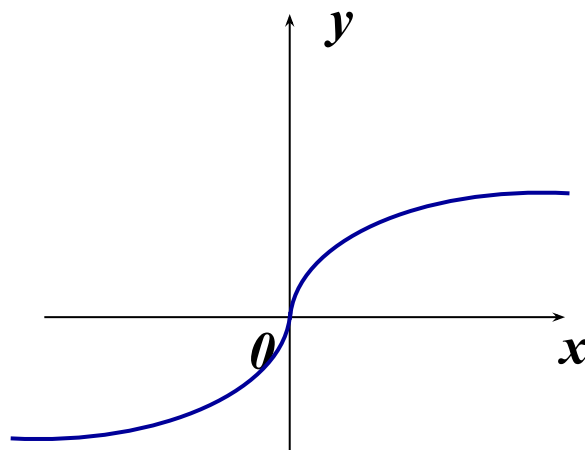
+

Какая из функций необратима?

g) $y = -\frac{1}{x}$



i) $y = \sqrt[3]{-x^5}$



15. Найти обратную функцию для функции:

$$f(x) = 2x - 1$$

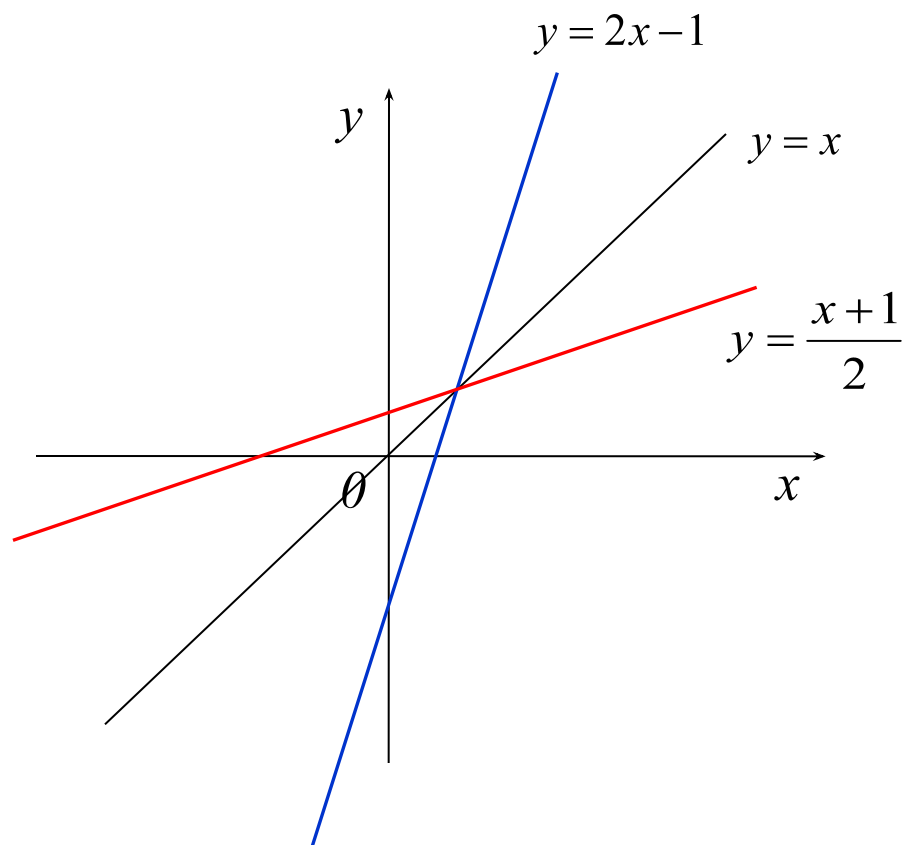
$$y = 2x - 1$$

$$2x = y + 1$$

$$x = \frac{y + 1}{2}$$

или

$$y = \frac{x + 1}{2}$$



16. Найти обратную функцию для функции:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0; +\infty)$$

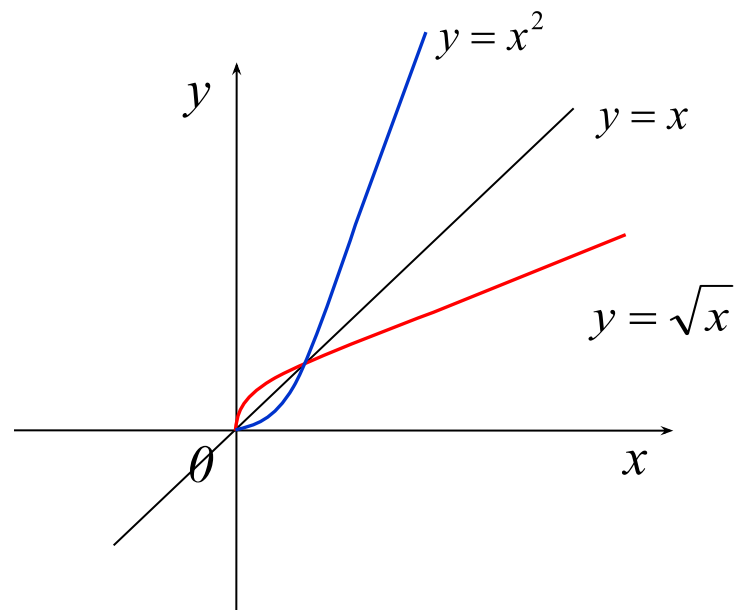
$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y} \quad (\text{так как } x \geq 0)$$

ИЛИ

$$y = \sqrt{x}, \quad x \in [0; +\infty)$$

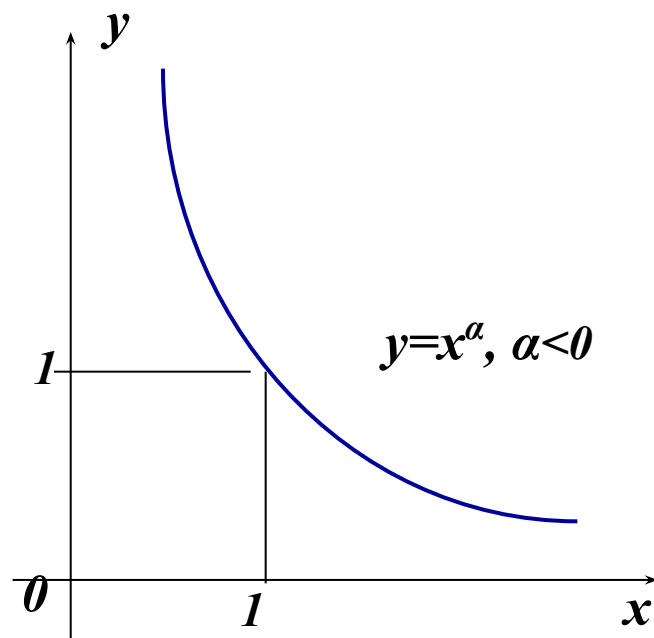
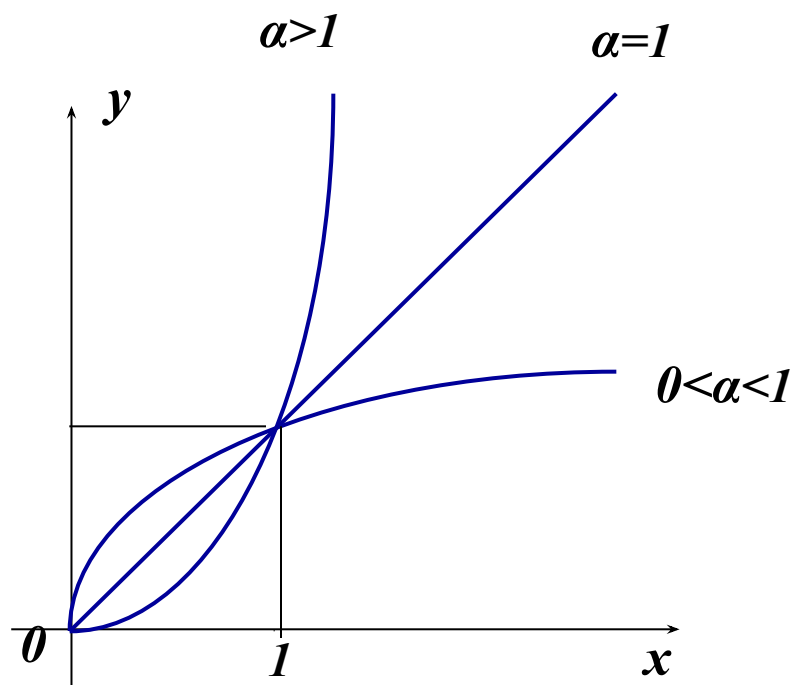


5. Основные элементарные функции

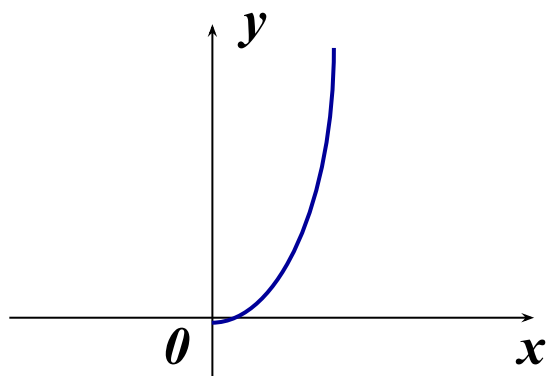
- Степенная функция.
- Показательная функция
- Логарифмическая функция
- Тригонометрические функции
- Обратные тригонометрические функции

1. Степенная функция

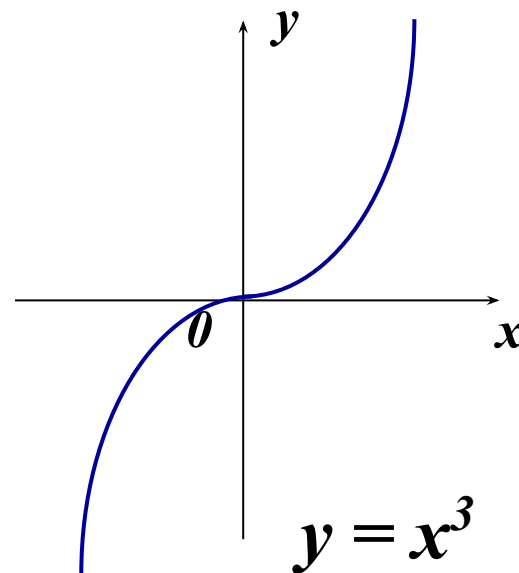
- $y = x^\alpha, \alpha \in R$



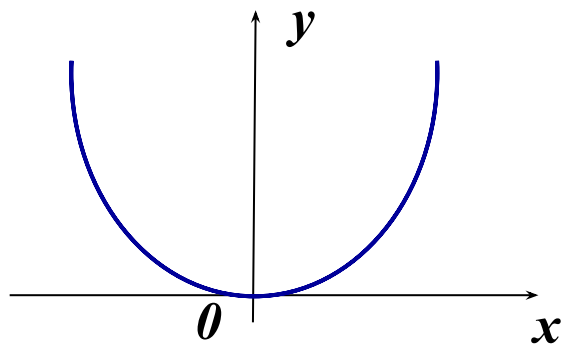
$$\underline{\underline{\alpha > 1}}$$



$$y = x^{3/2}$$

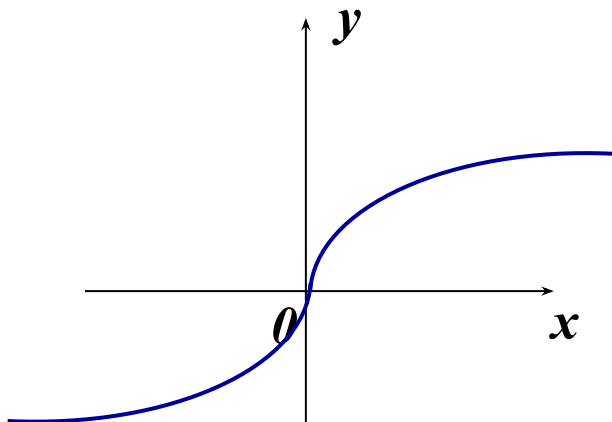


$$y = x^3$$

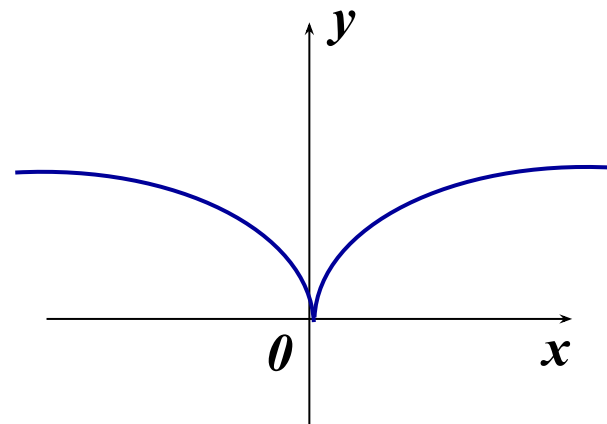


$$y = x^2$$

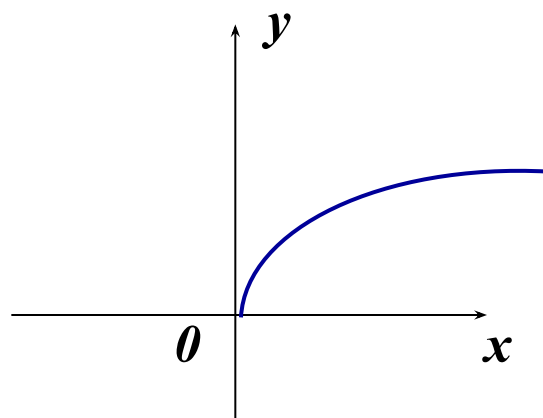
$$\underline{0 < \alpha < 1}$$



$$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

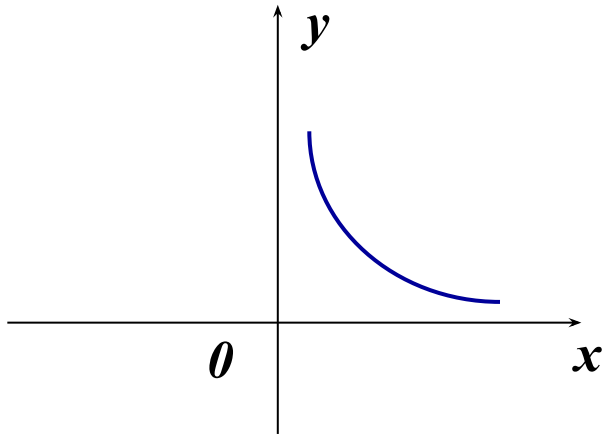


$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

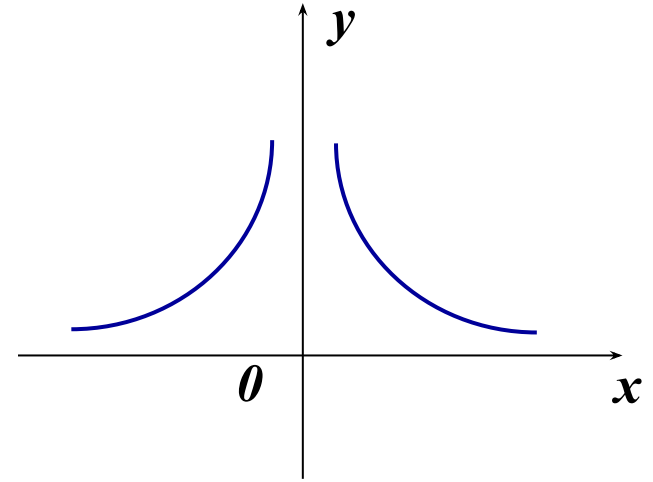


$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

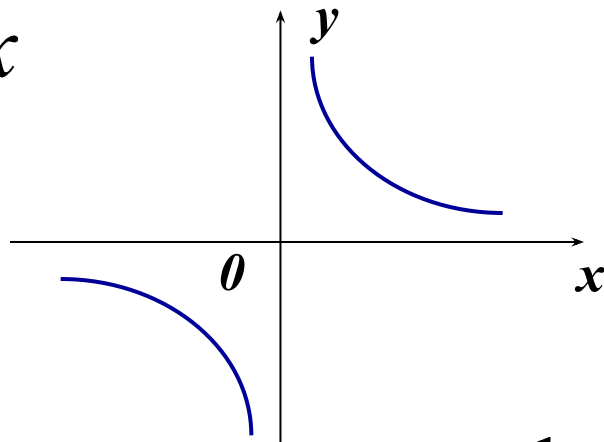
$$\underline{\underline{\alpha < 0}}$$



$$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



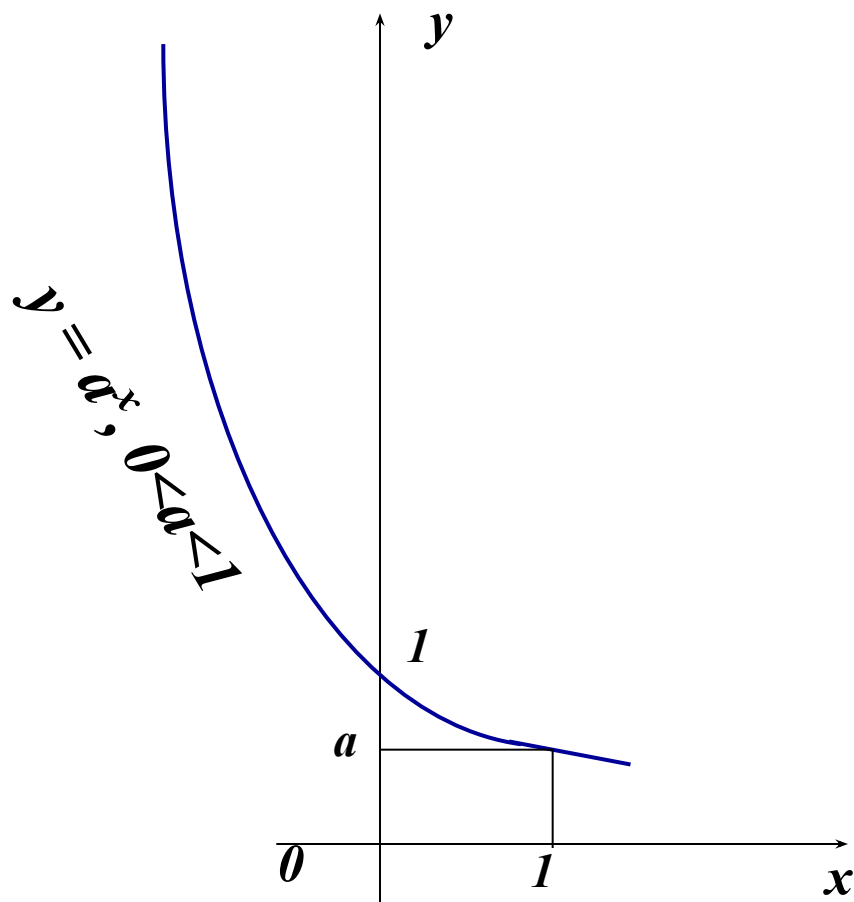
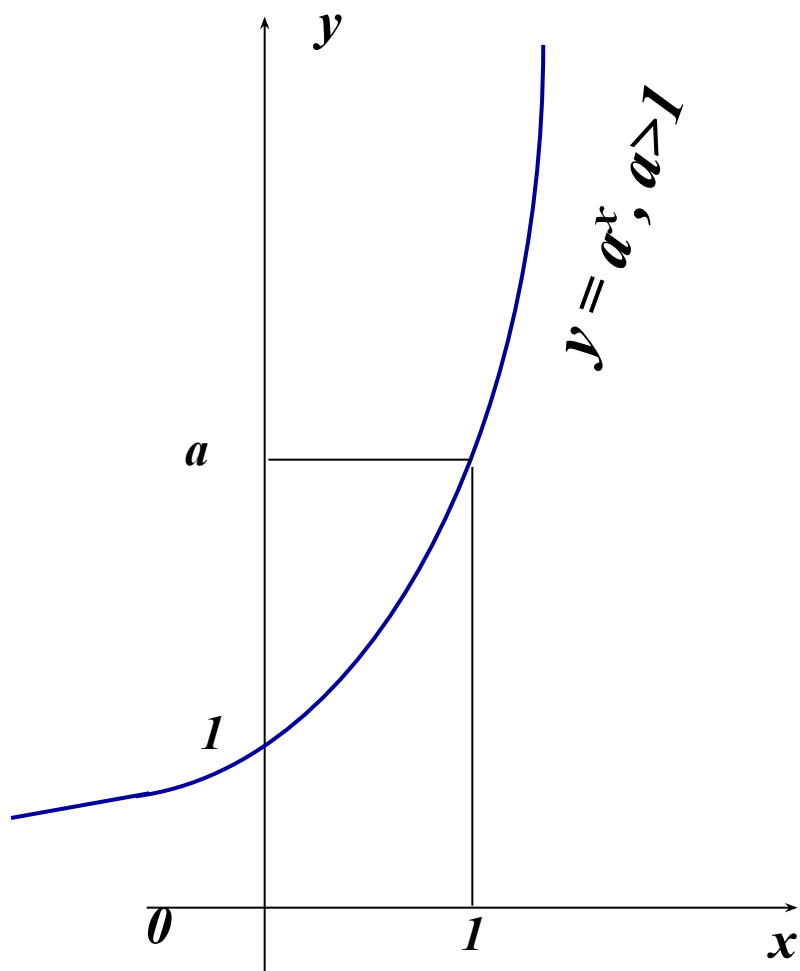
$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

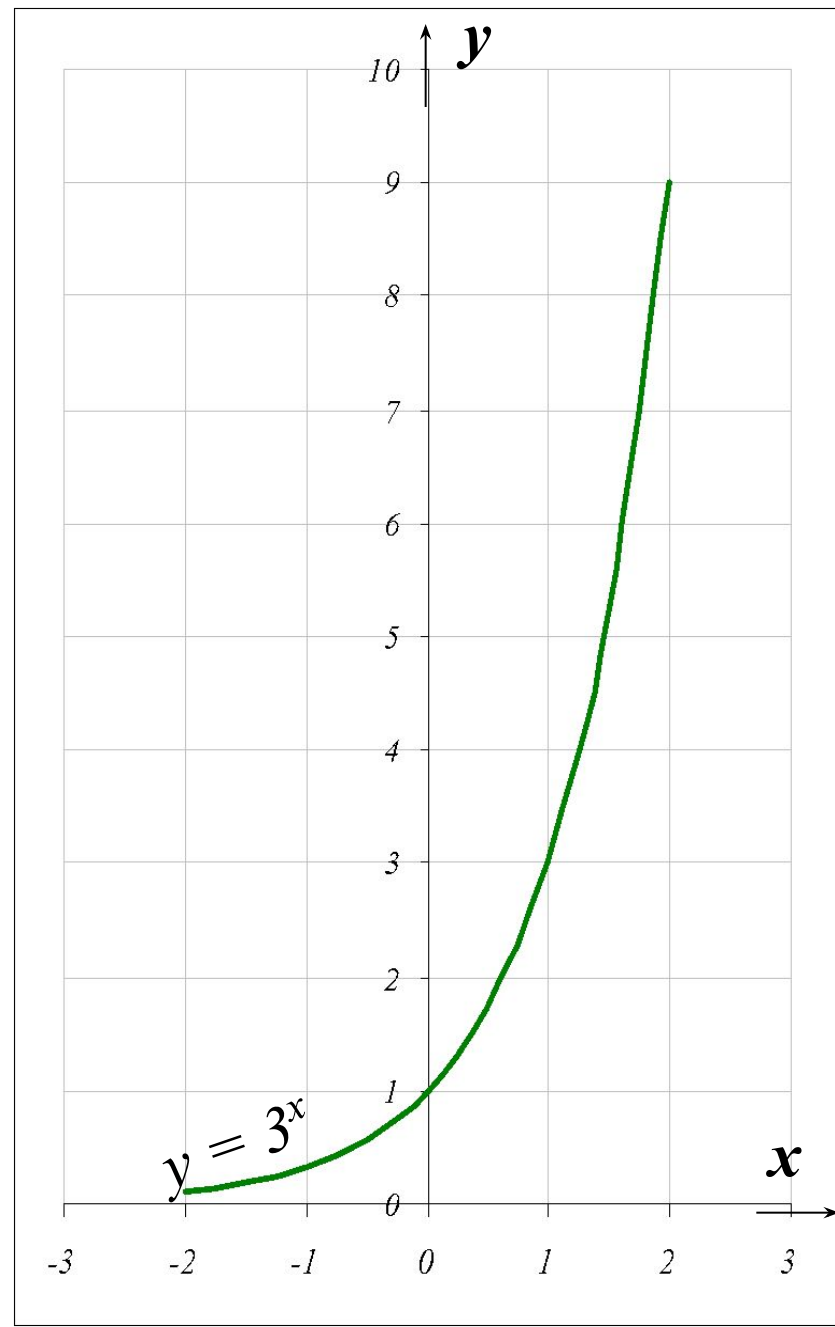
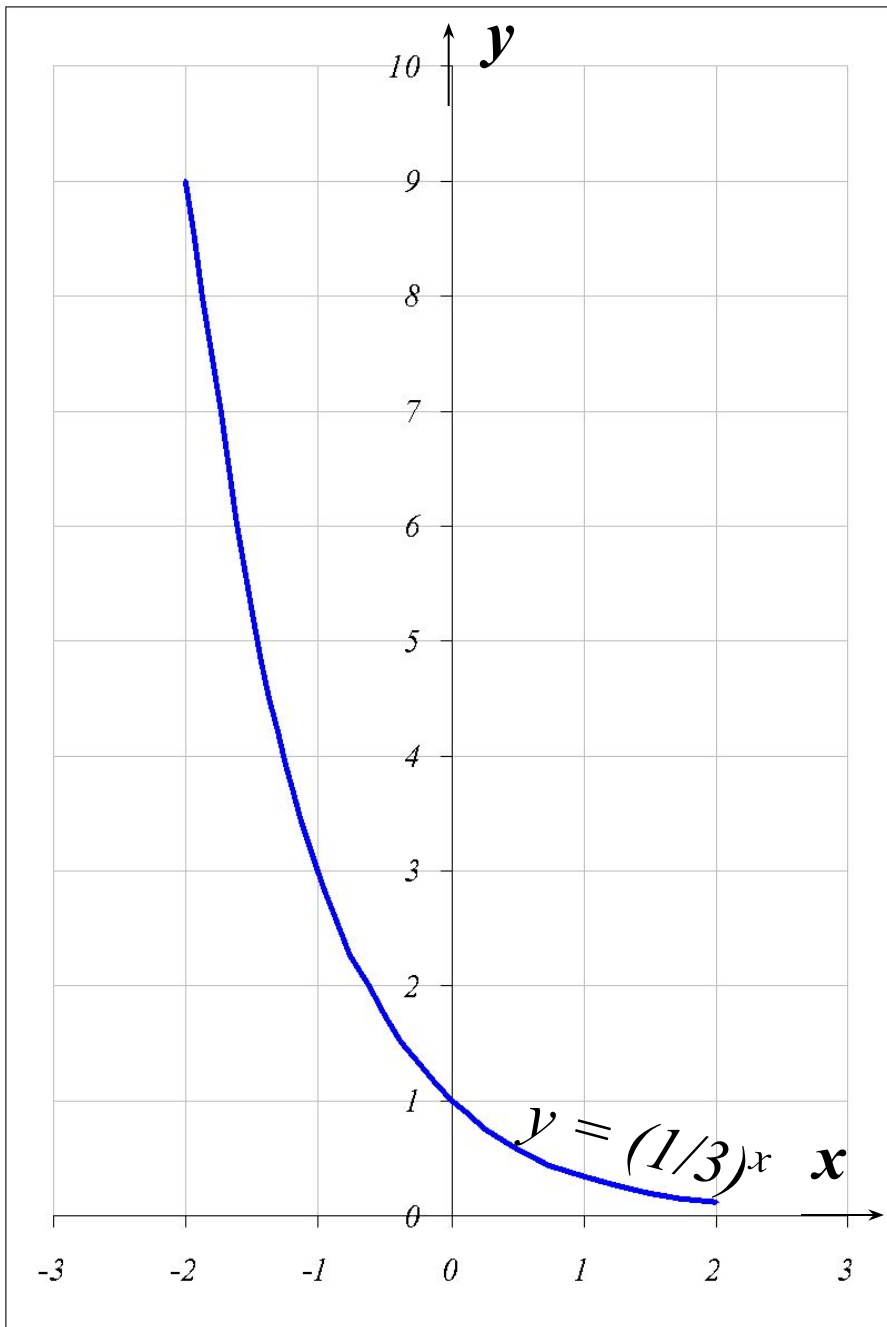


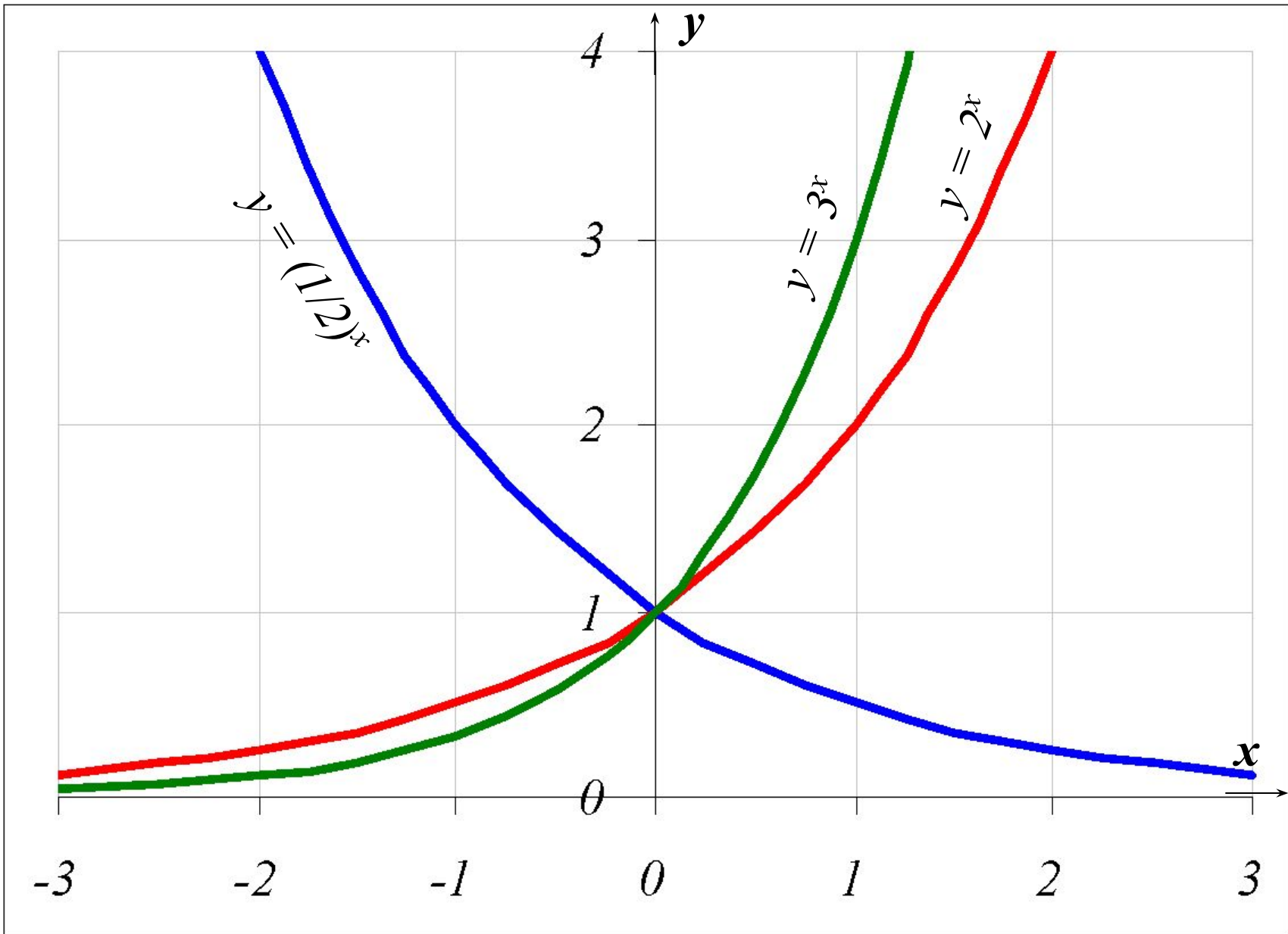
$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

2). Показательная функция

- $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

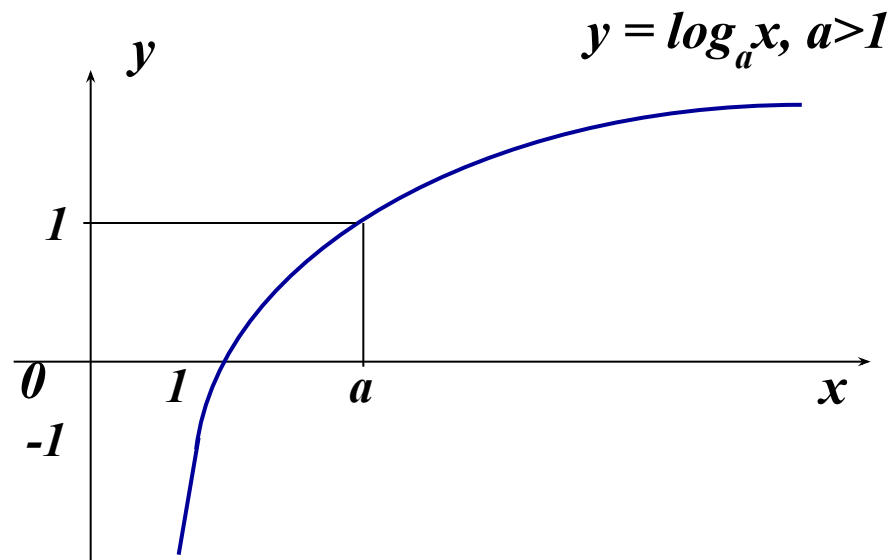
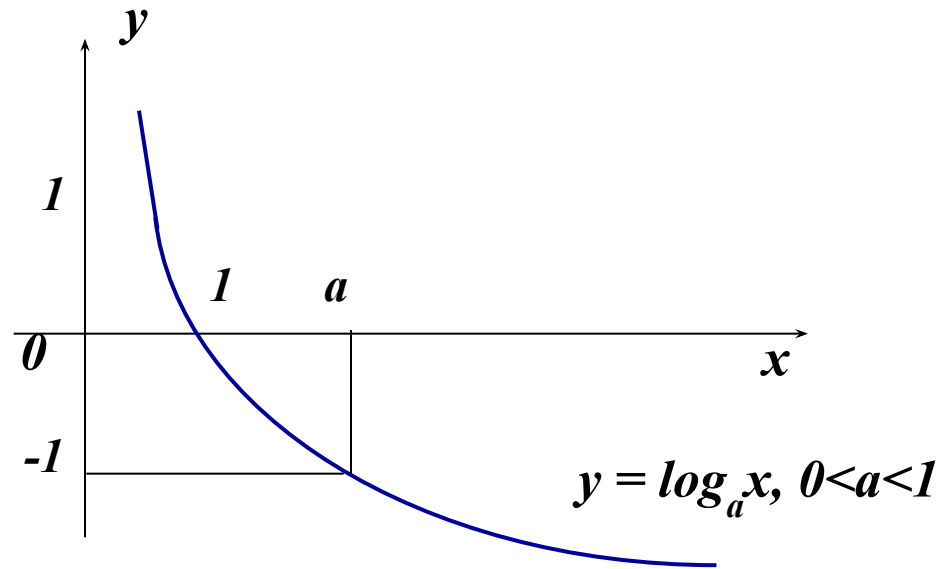


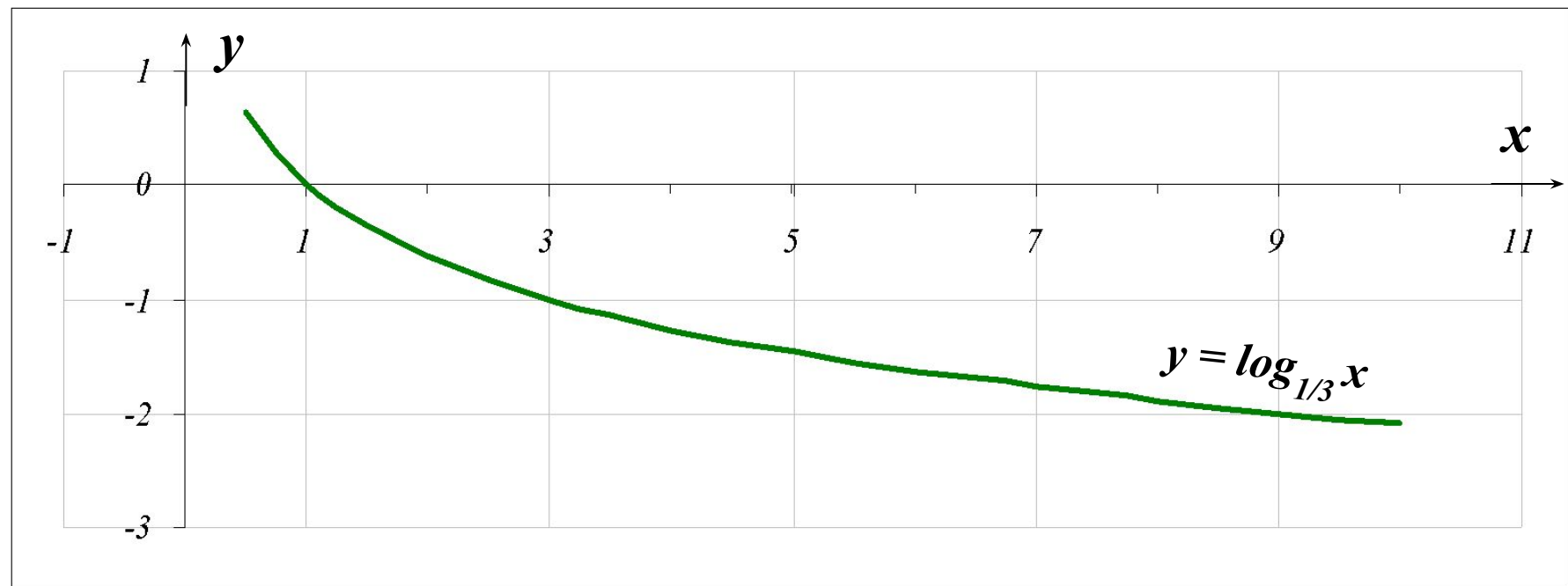
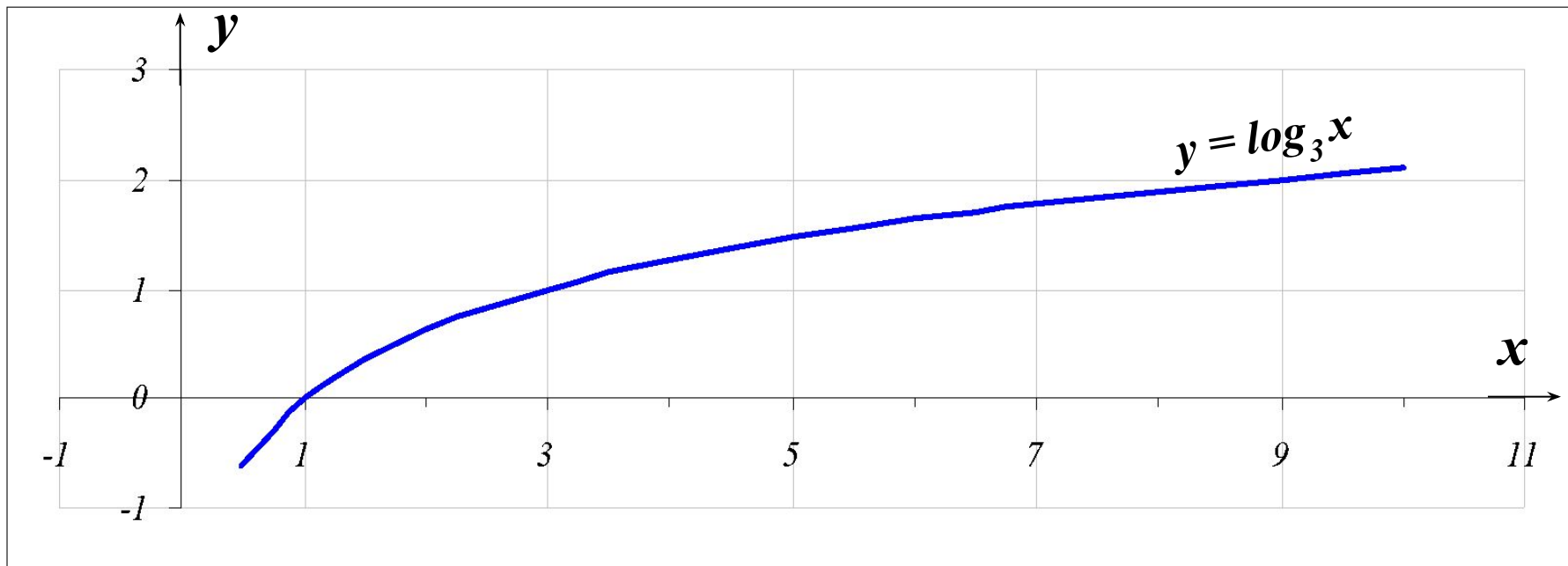




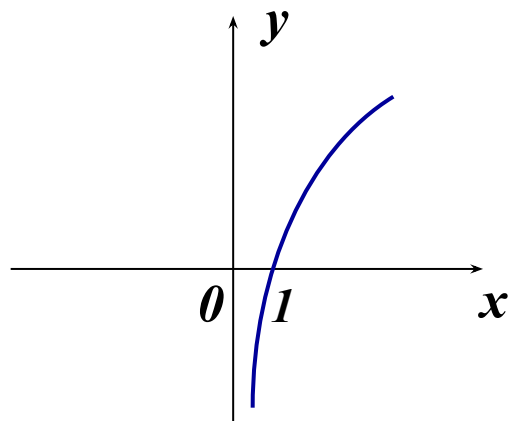
3). Логарифмическая функция

- $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

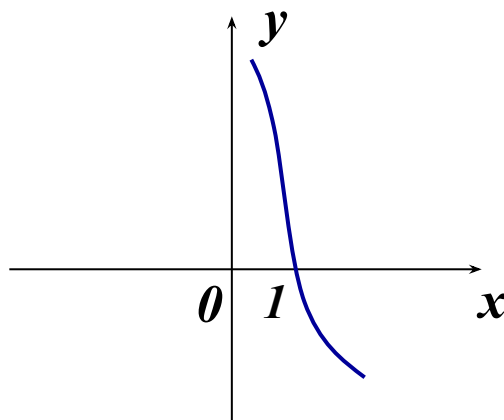




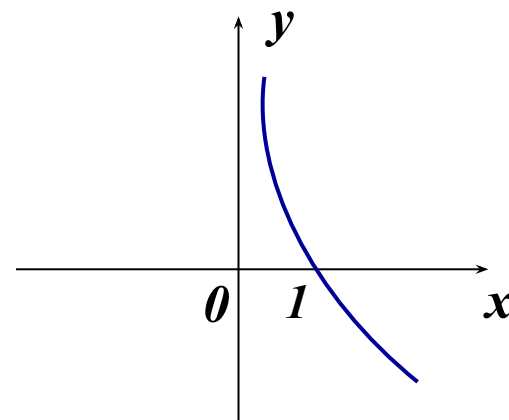
Какие из следующих графиков и по какой причине не могут быть графиками функции $y = \log_a x$, если $0 < a < 1$?



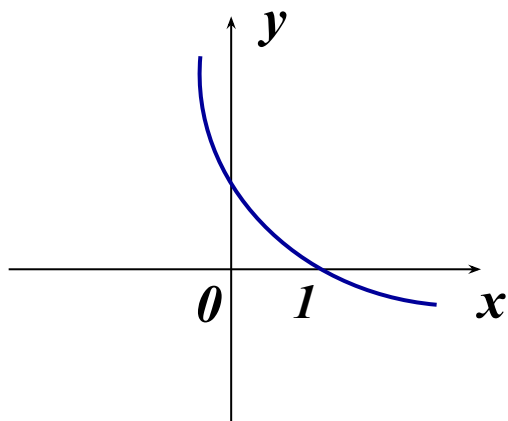
a) +



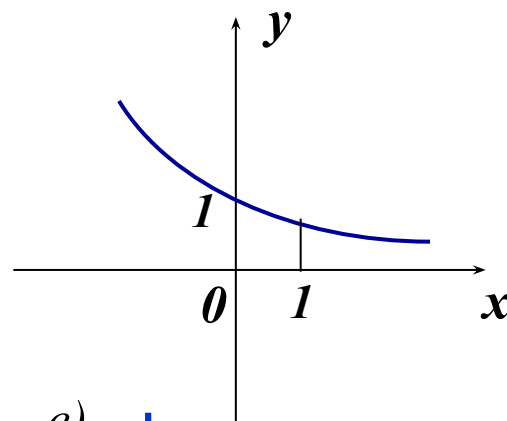
b) +



c)

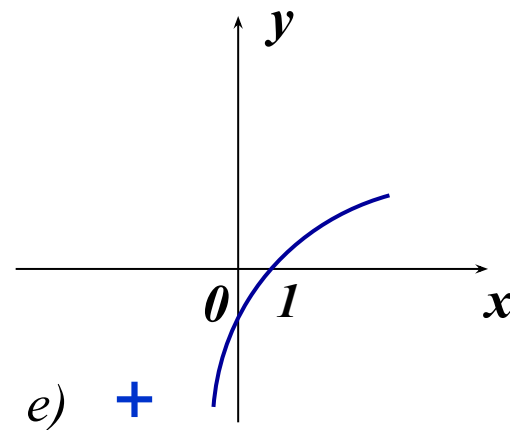
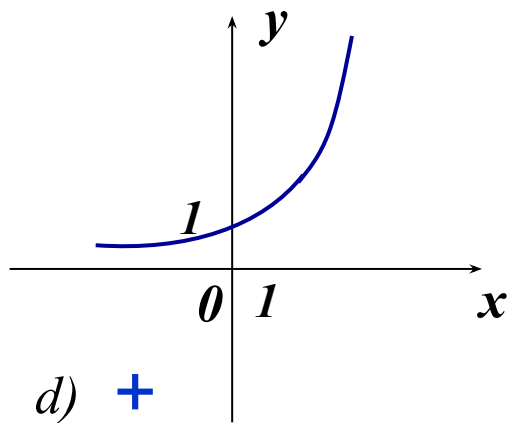
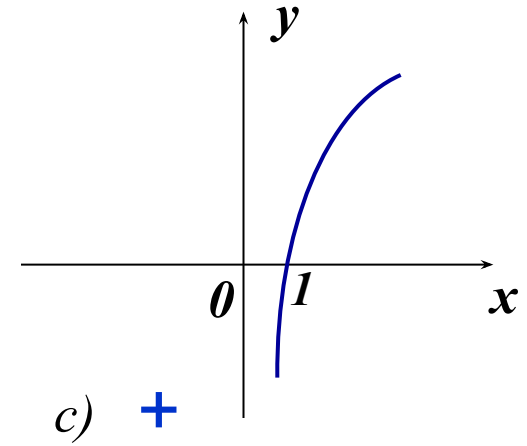
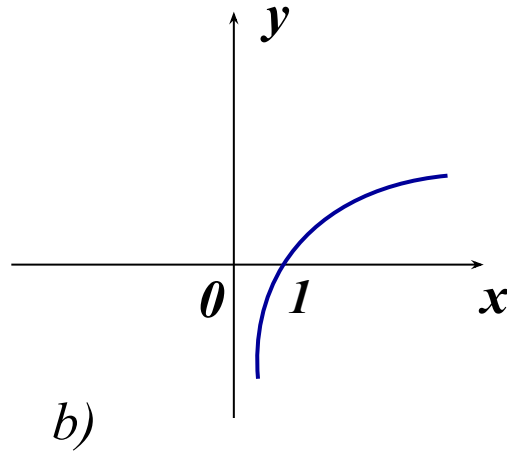
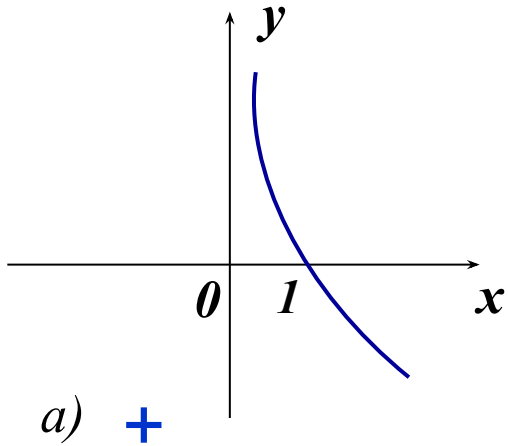


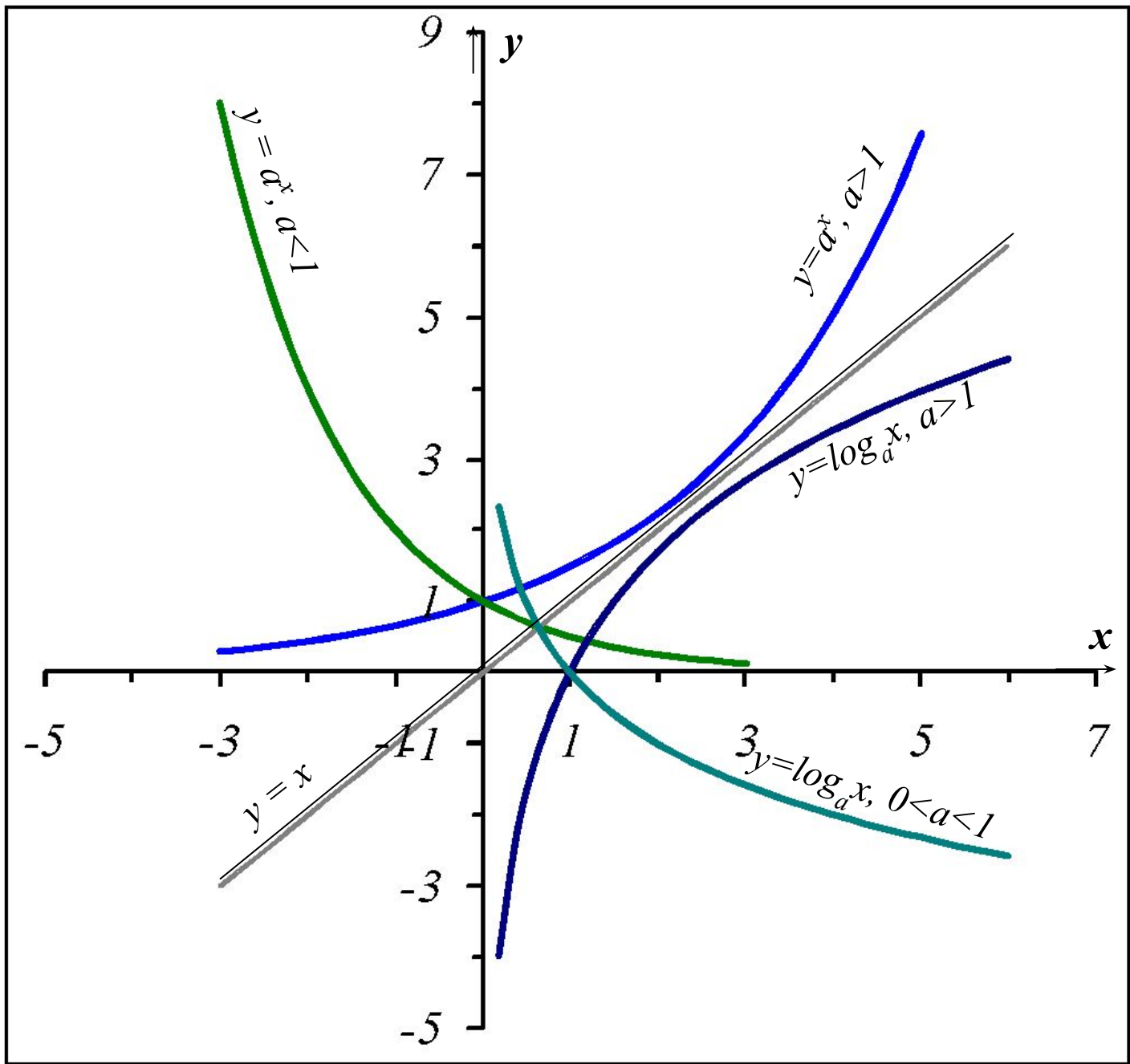
d) +



e) +

Какие из следующих графиков и по какой причине не могут быть графиками функции $y = \log_a x$, если $a > 1$?





4). Тригонометрические функции

$$y = \sin x$$

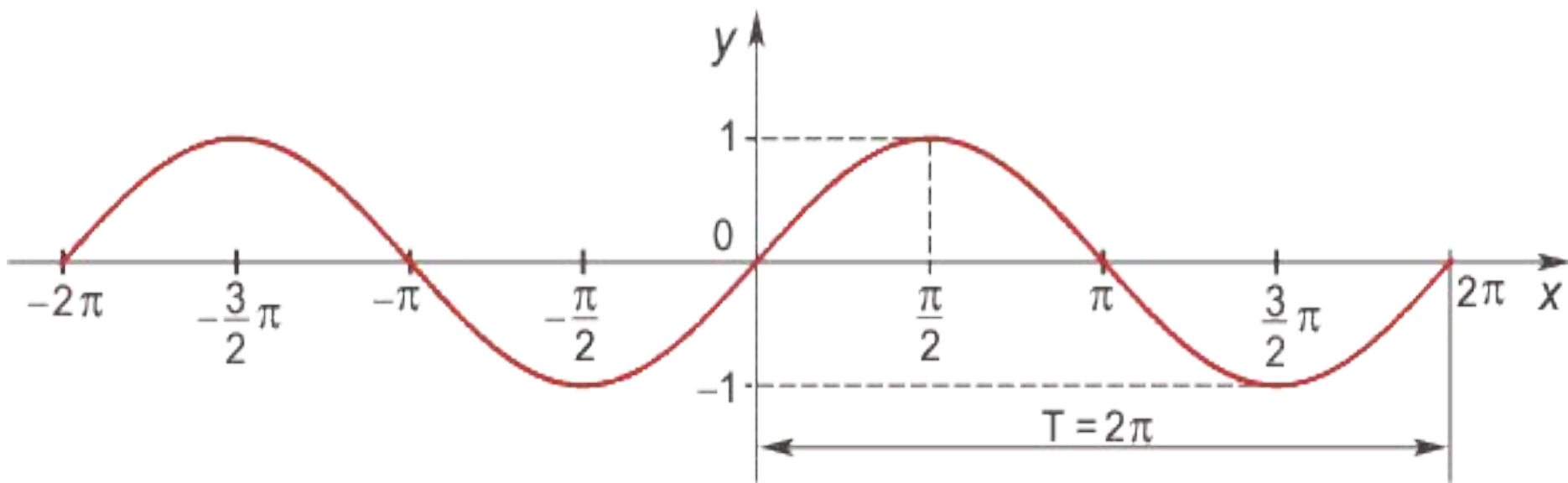
$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

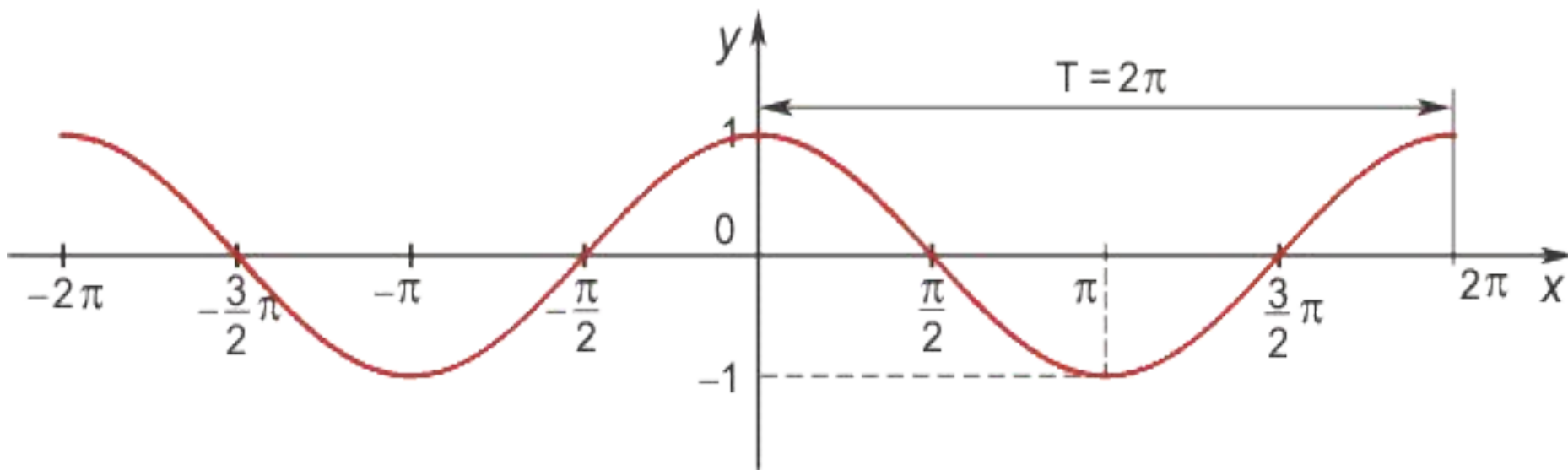
$y = \sin x$

- График функции – *синусоида*
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(x+2\pi k) = \sin x$



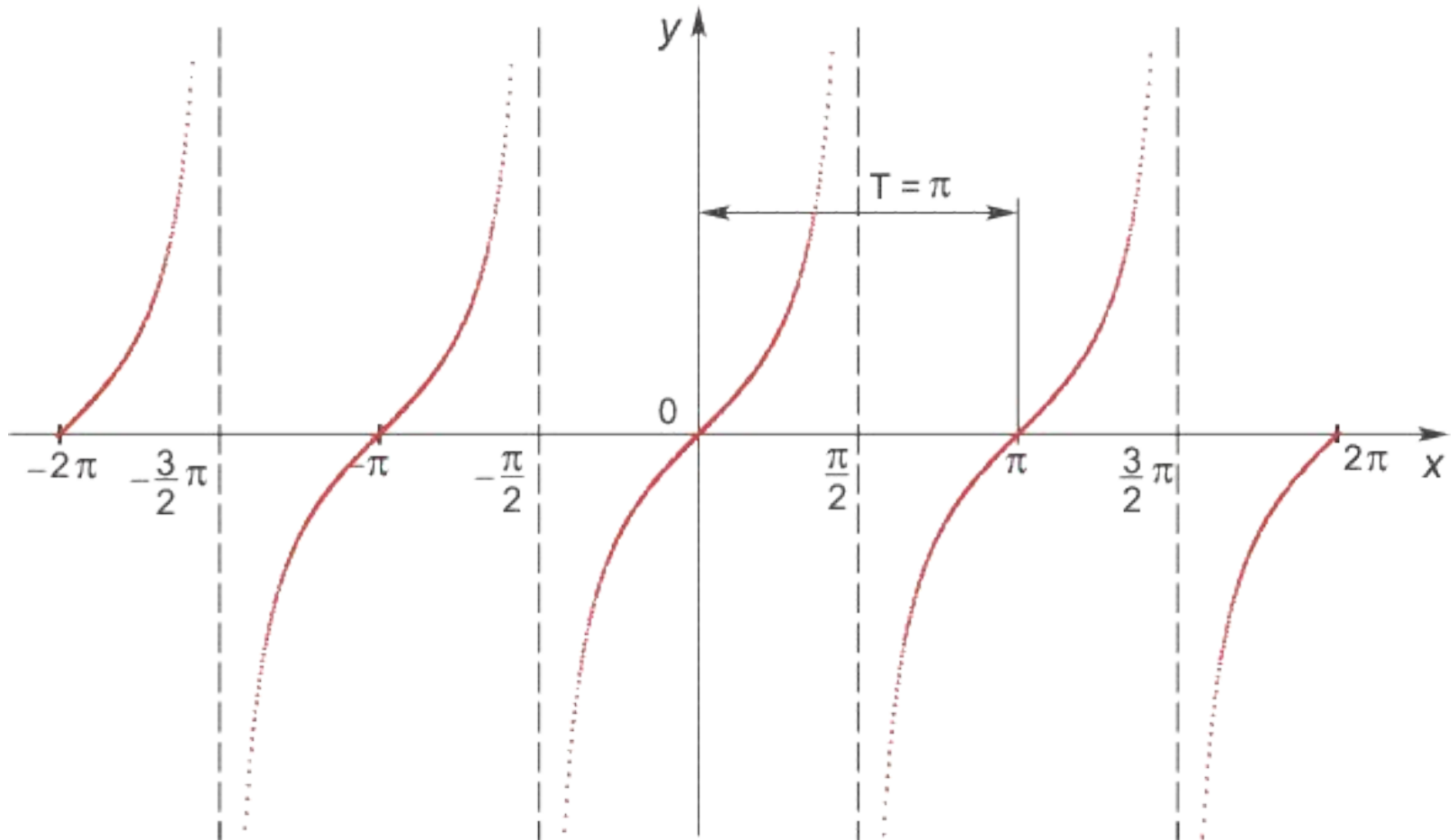
$y = \cos x$

- *График функции - косинусоида*
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$



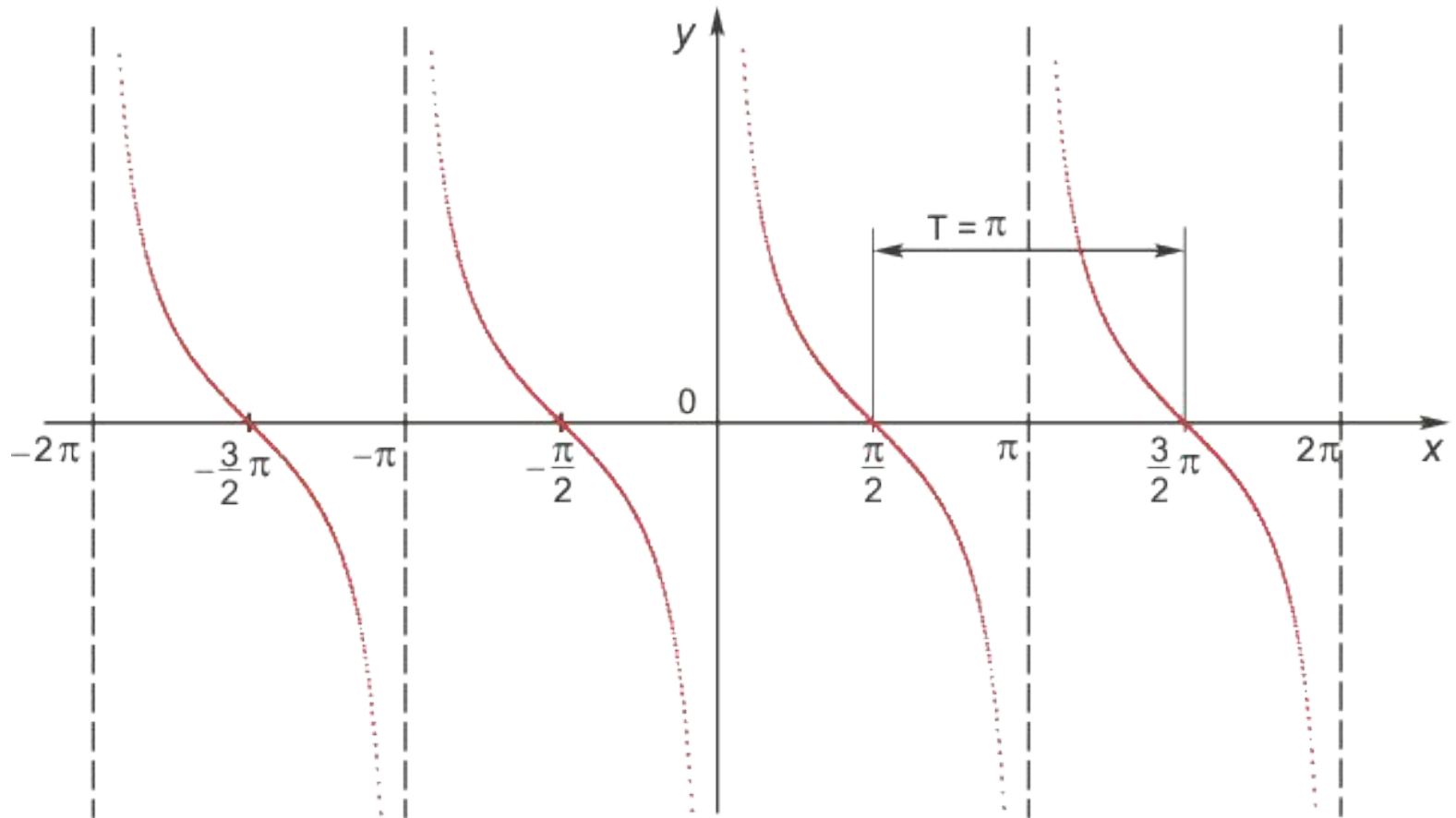
$y = \tan x$

- График функции – **тангенсоида**
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(x + \pi k) = \tan x$



$y = \cot x$

- График функции – **котангенсоида**
- $\cot(-x) = -\cot x$
- $\cot(x + \pi k) = \cot x$



5). Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x$$

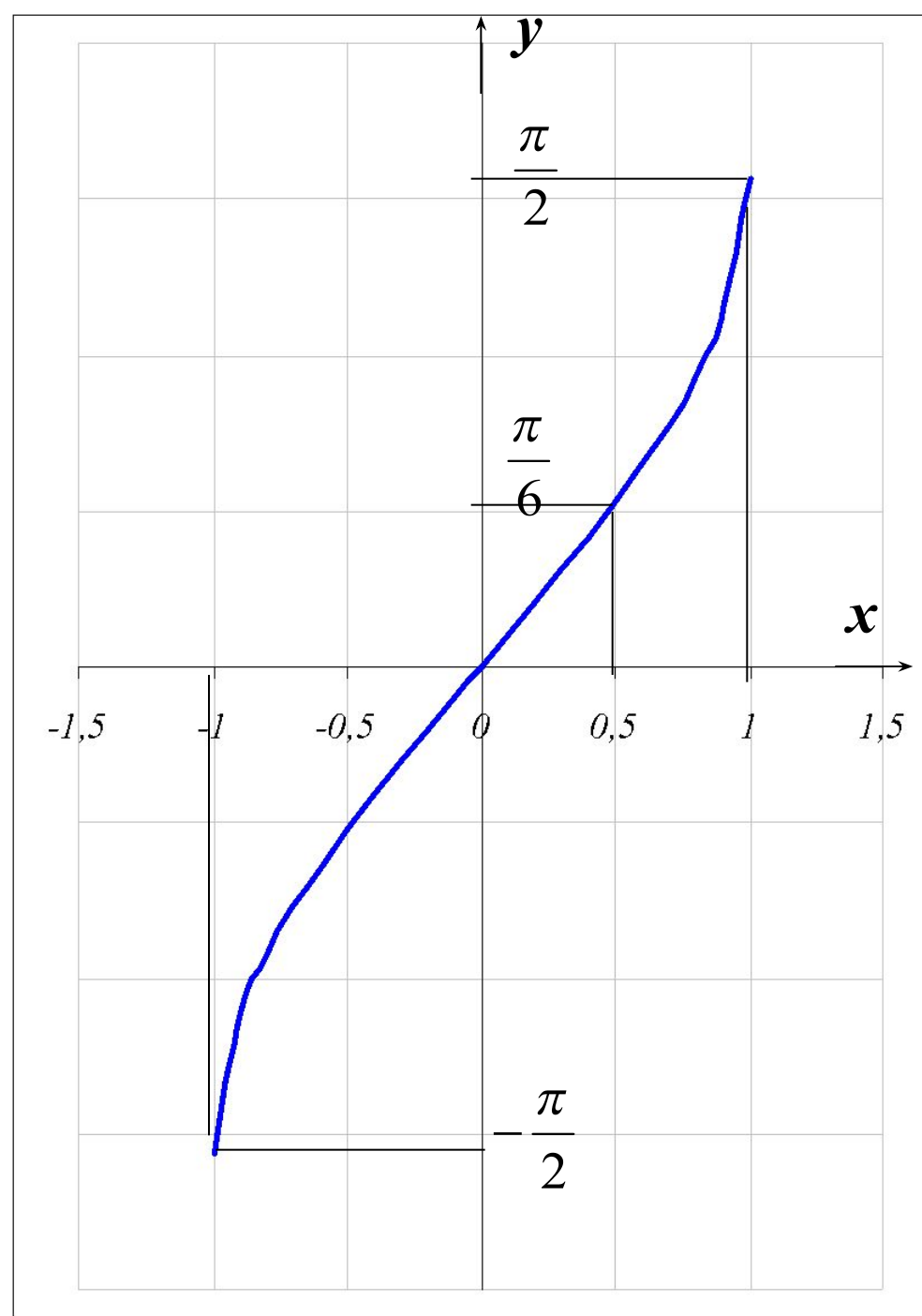
$$y = \arccos x$$

$$y = \arctan x$$

$$y = \operatorname{arccot} x$$

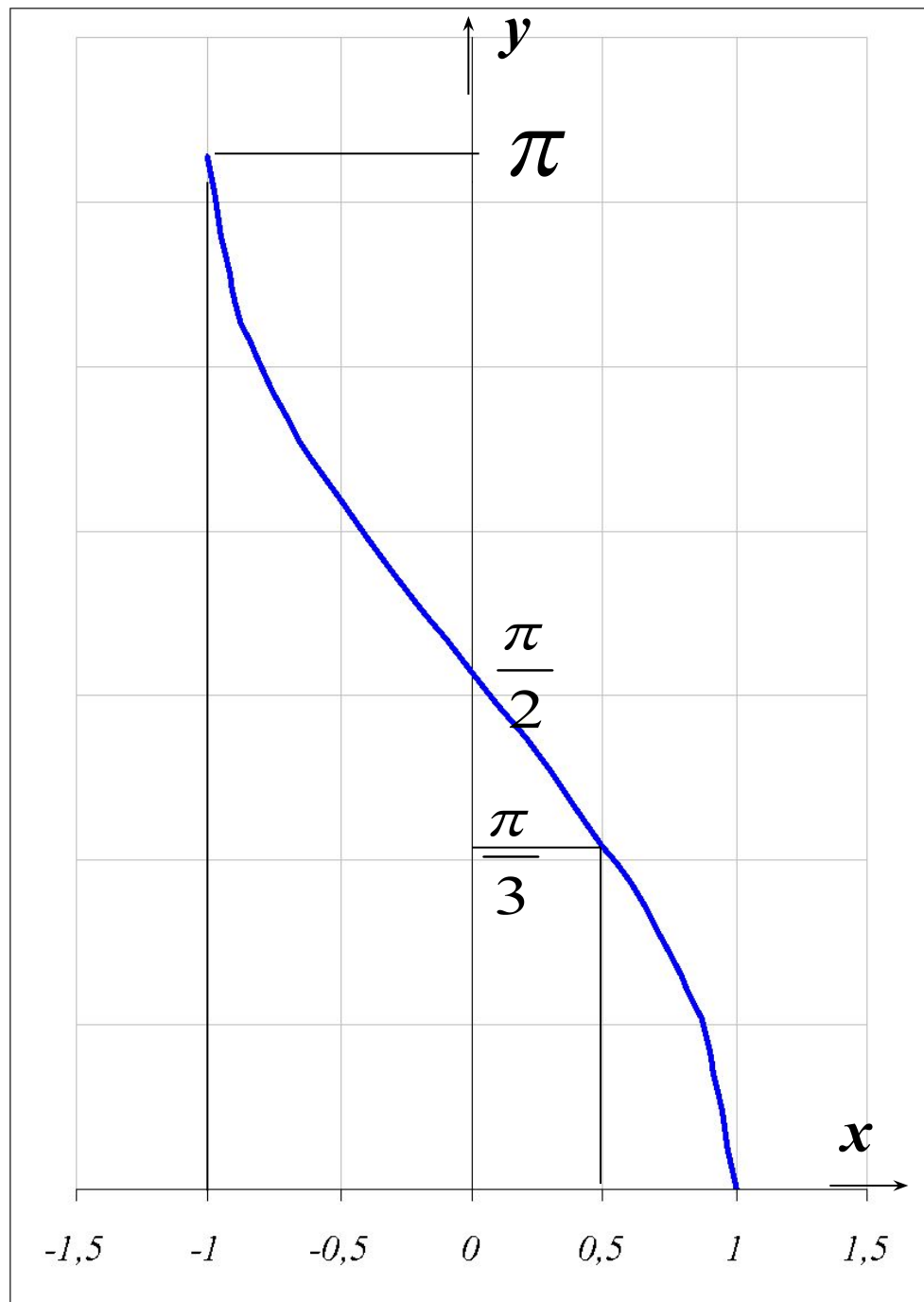
$$y = \arcsin x$$

- $\arcsin(-x) = -\arcsin x$



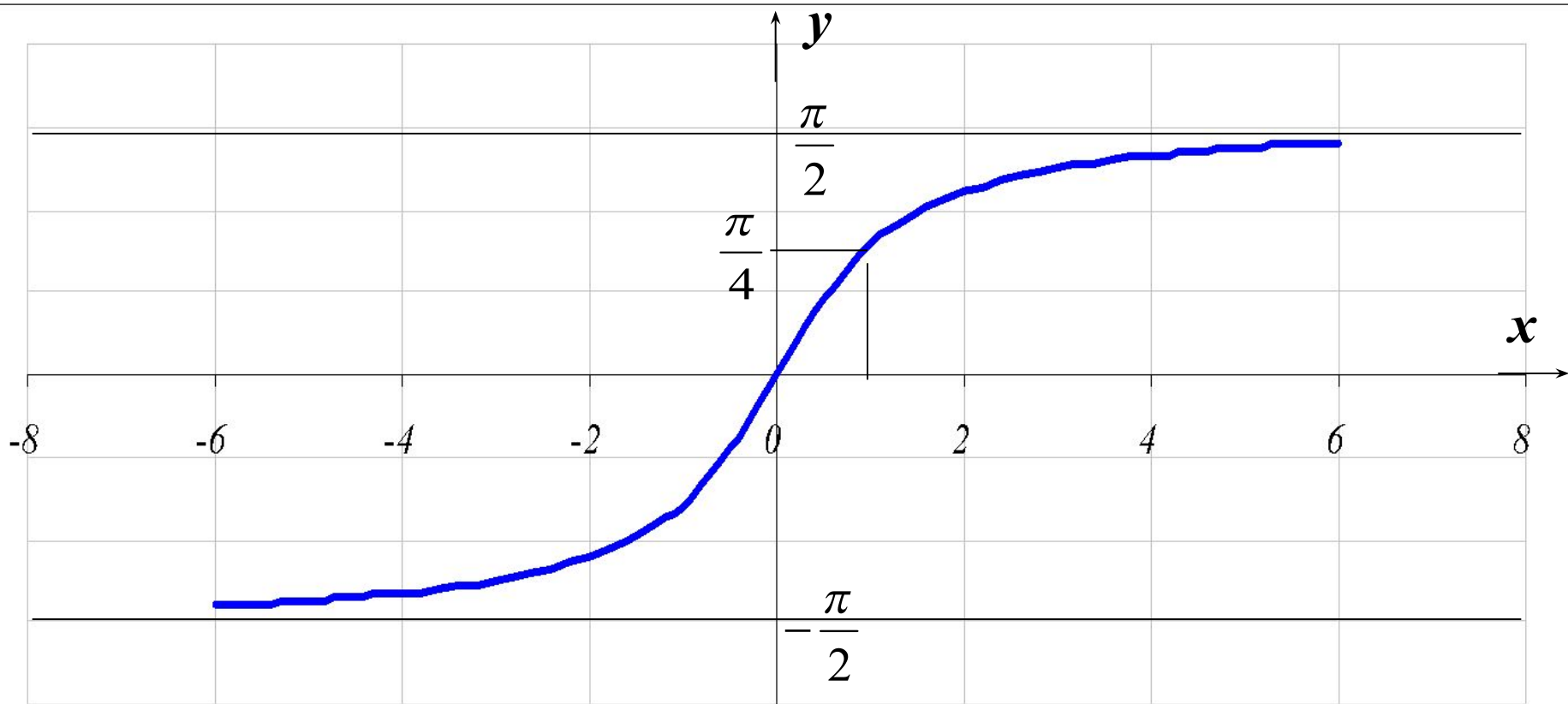
$$y = \arccos x$$

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$



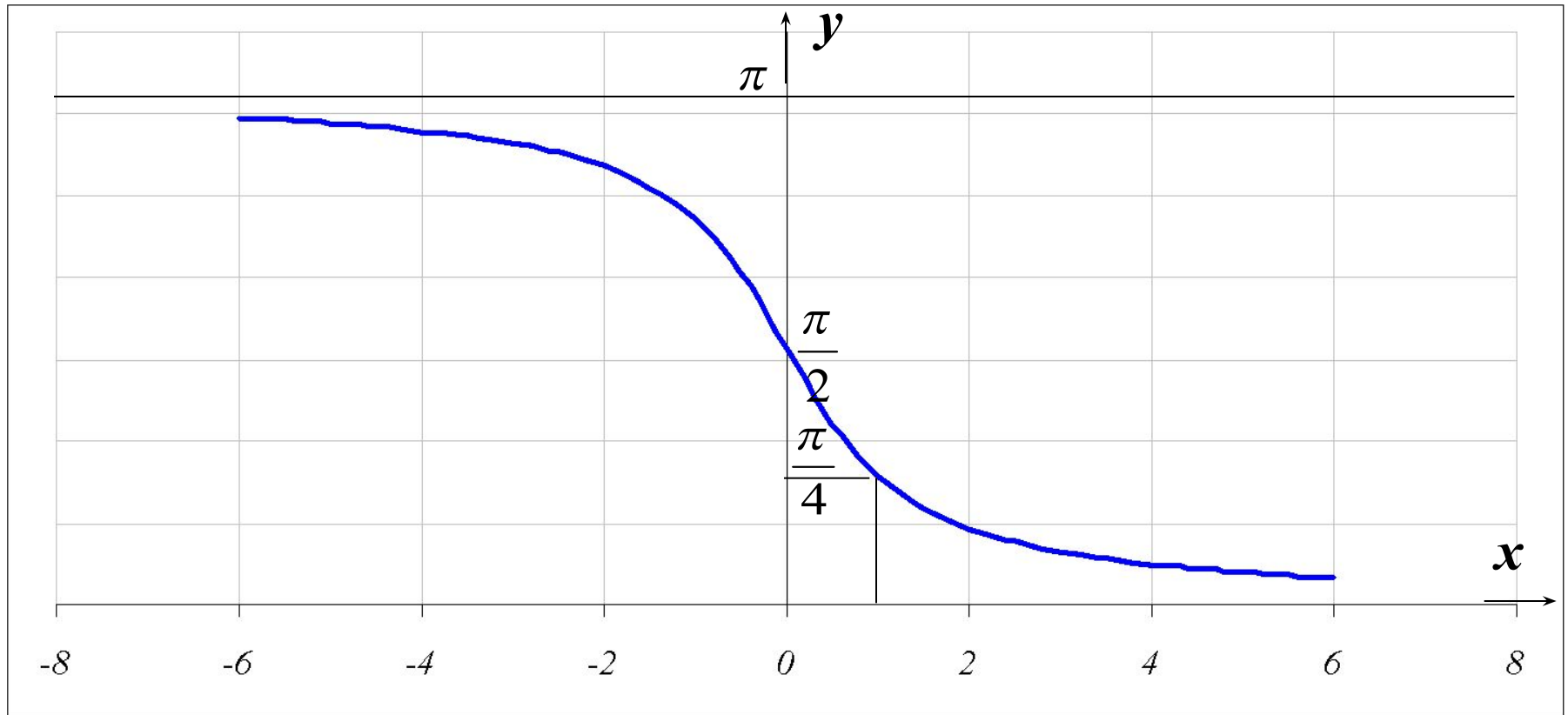
$$y = \arctan x$$

- $\arctan(-x) = -\arctan x$



$$y = \operatorname{arccot} x$$

- $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$



- Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (+, -, ·, ÷) и операций взятия функции от функции, называется элементарной функцией.

$$y = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{\tan x}{8x^2 + 3}$$

$$y = |x| = \sqrt{x^2}$$

$$y = \log(2 + x^3)$$

примеры элементарных функций

Примеры неэлементарных функций:

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \dots$$

(Количество операций, которое нужно произвести для получения y , не является ограниченным)

5. Сложение графиков функций

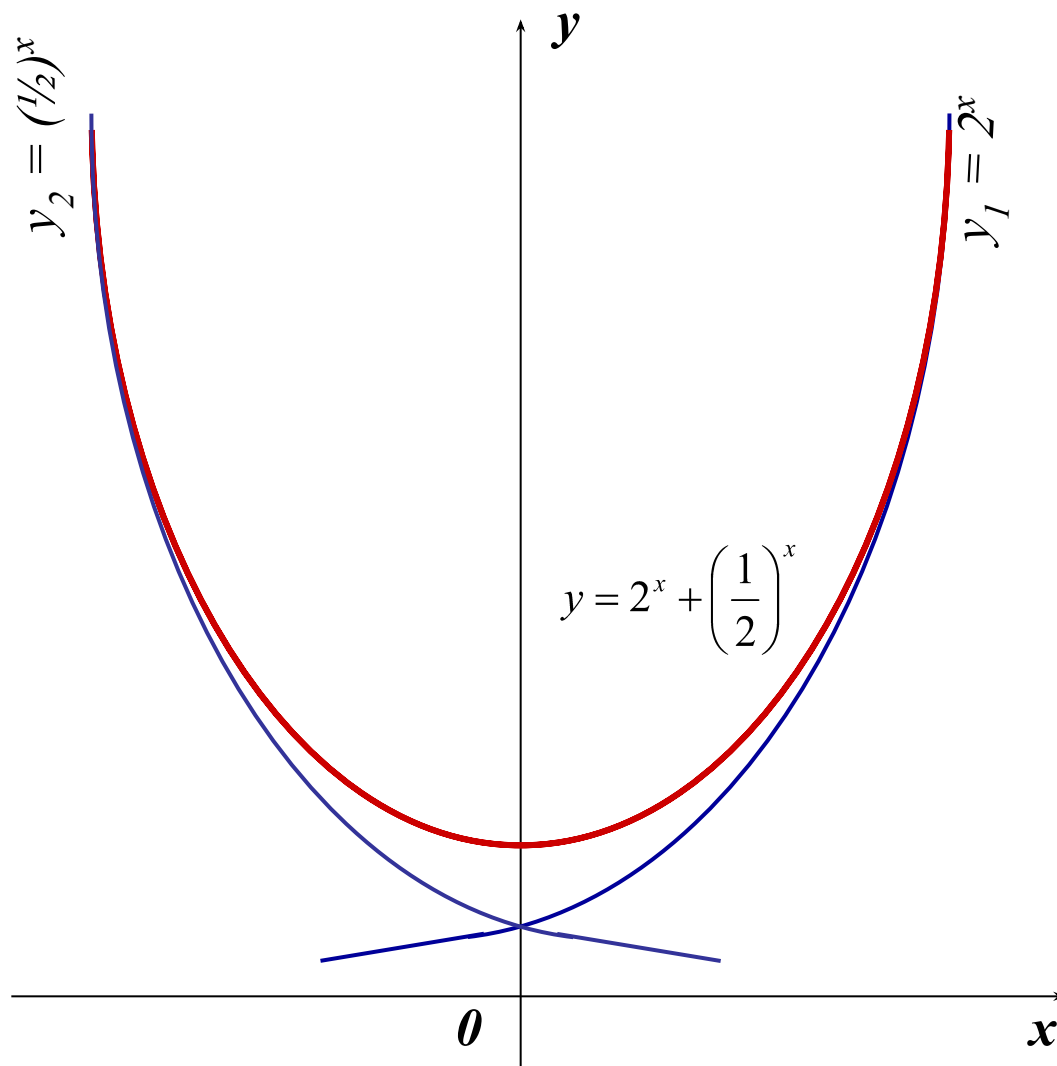
- *Чтобы сложить графики функций нужно сложить их ординаты.*
- $y = y_1 + y_2$

Сложите графики двух функций

$$y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y_1 = 2^x$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

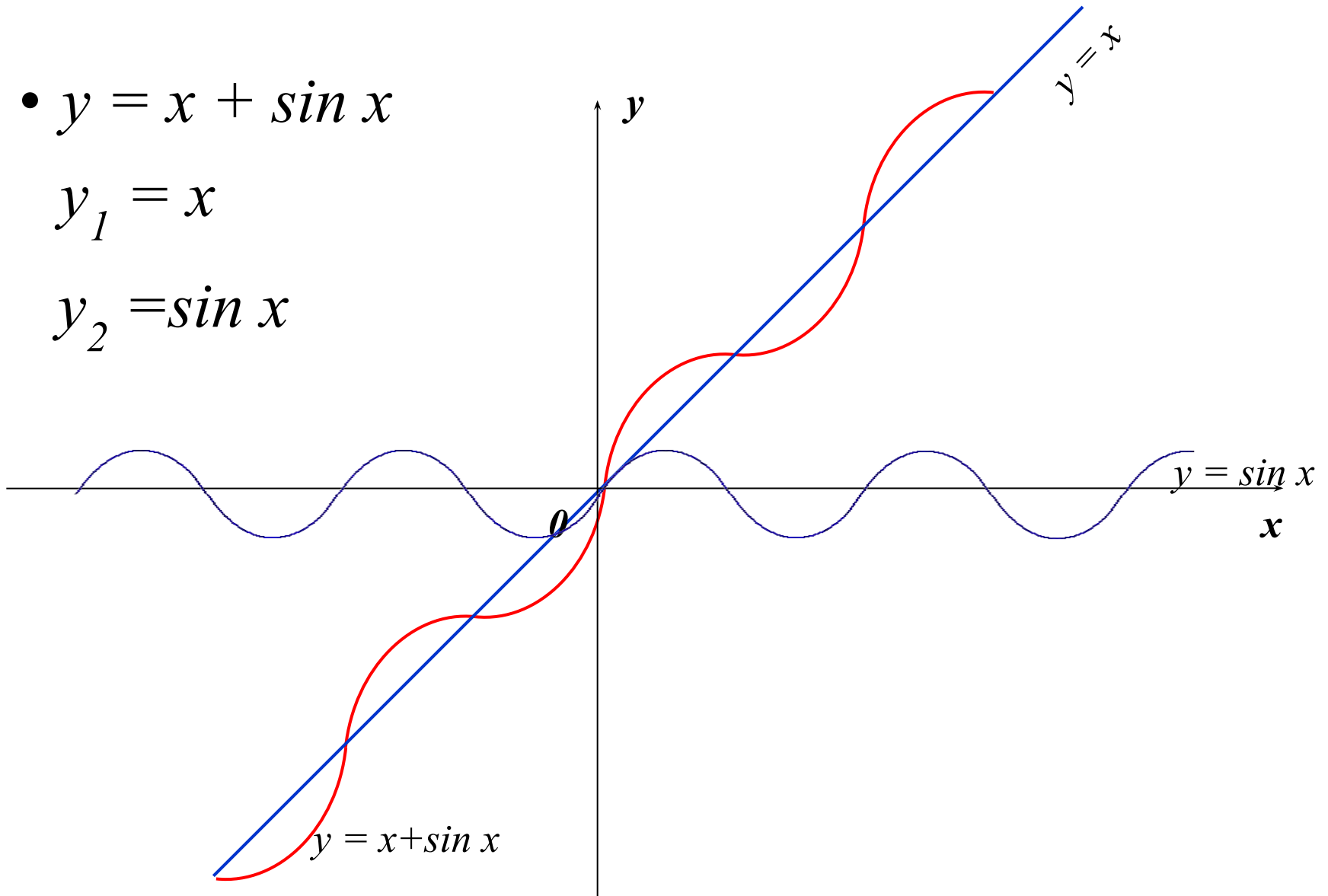


Сложите графики двух функций

- $y = x + \sin x$

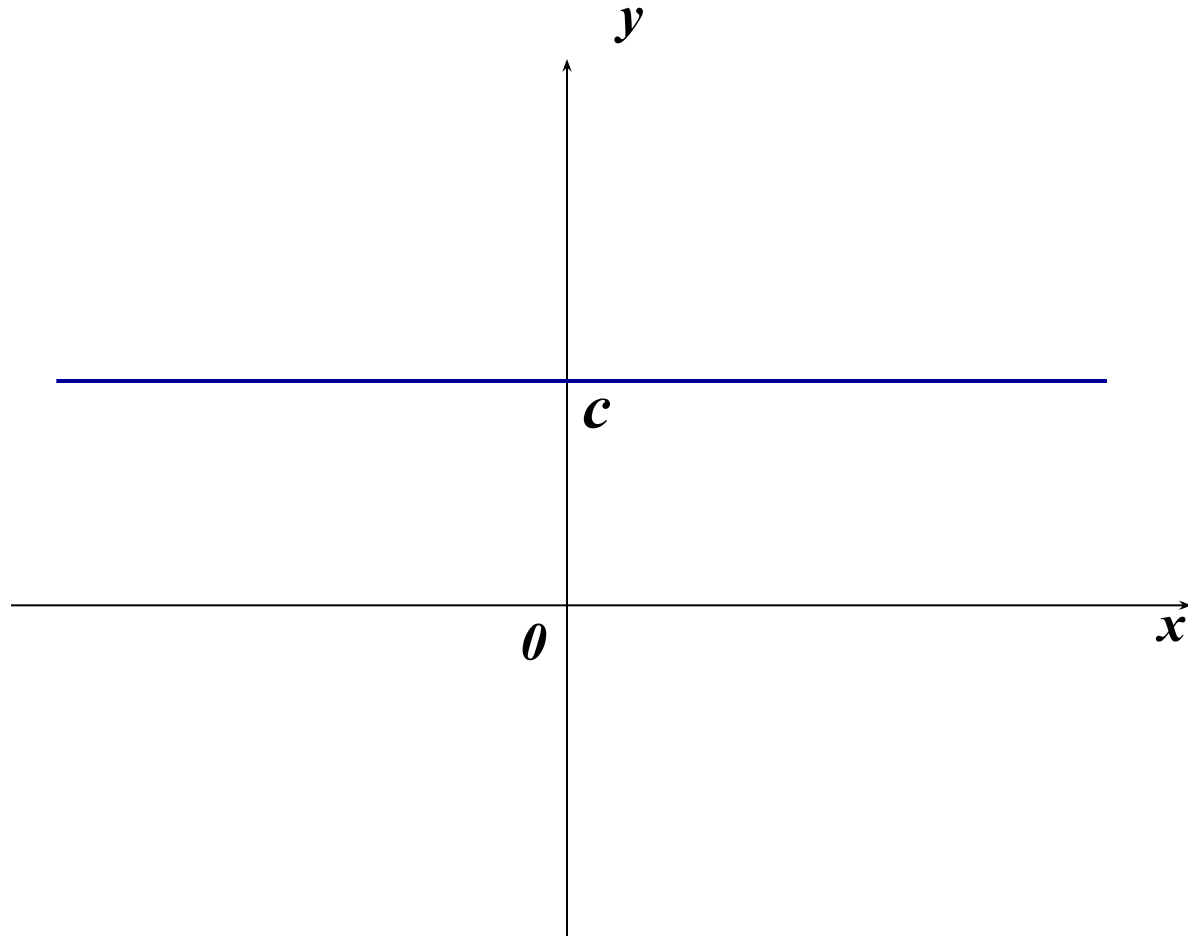
$$y_1 = x$$

$$y_2 = \sin x$$



Повторение: ещё некоторые функции

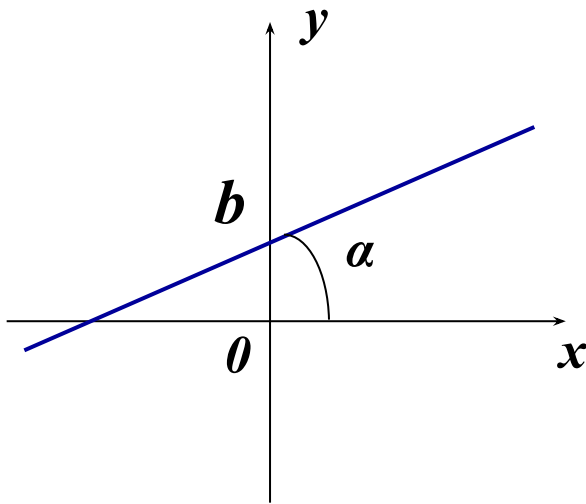
Постоянная функция



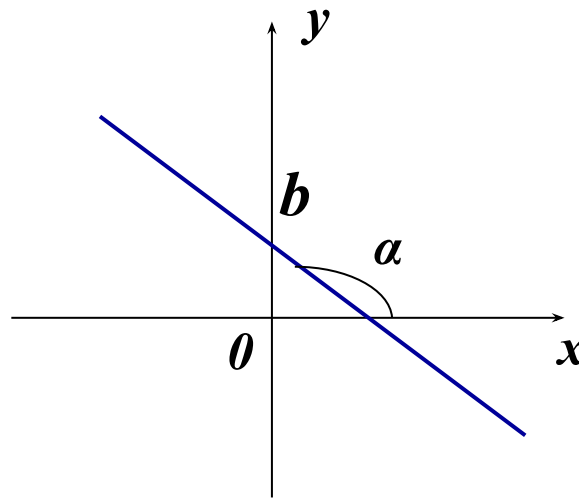
$$y = c, c \in R$$

Линейная функция

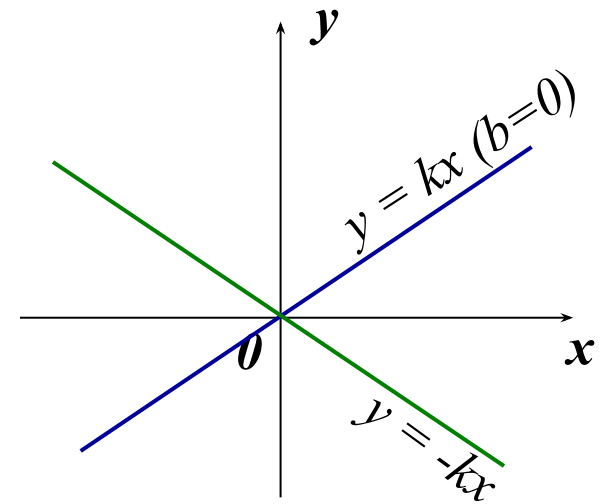
- $y = kx + b$ ($k \neq 0$), $k, b \in R$
- График – прямая

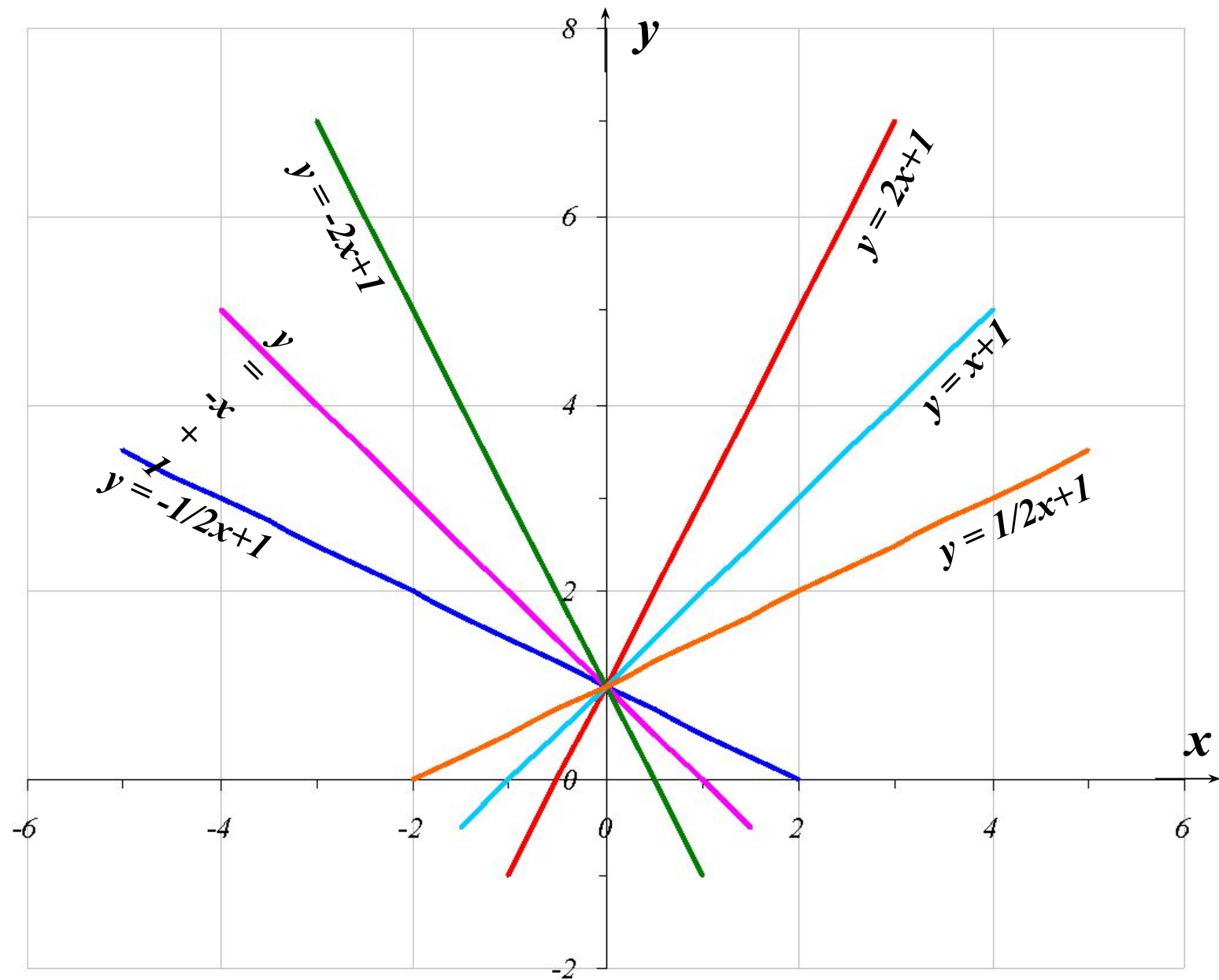


$$k > 0$$

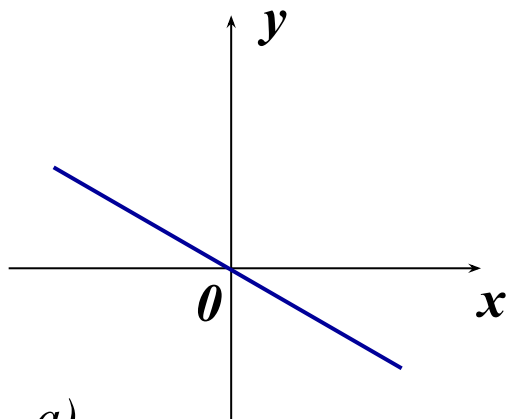


$$k < 0$$

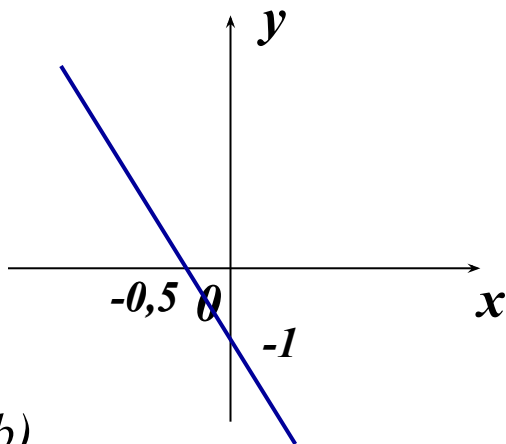




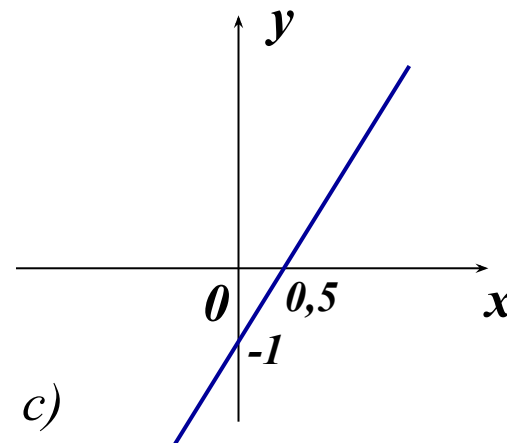
На каком из рисунков изображён график функции $y = -2x + 1$?



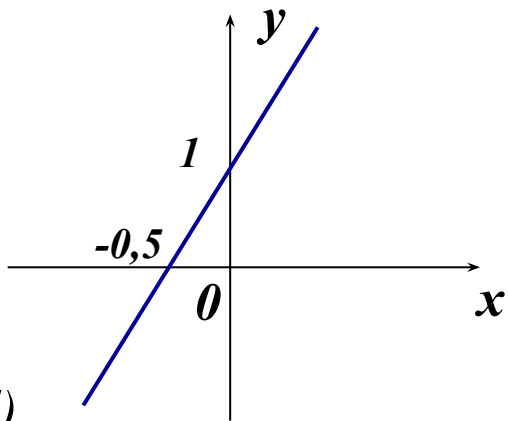
a)



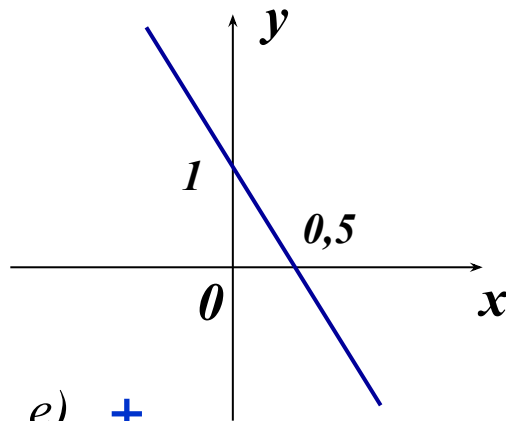
b)



c)

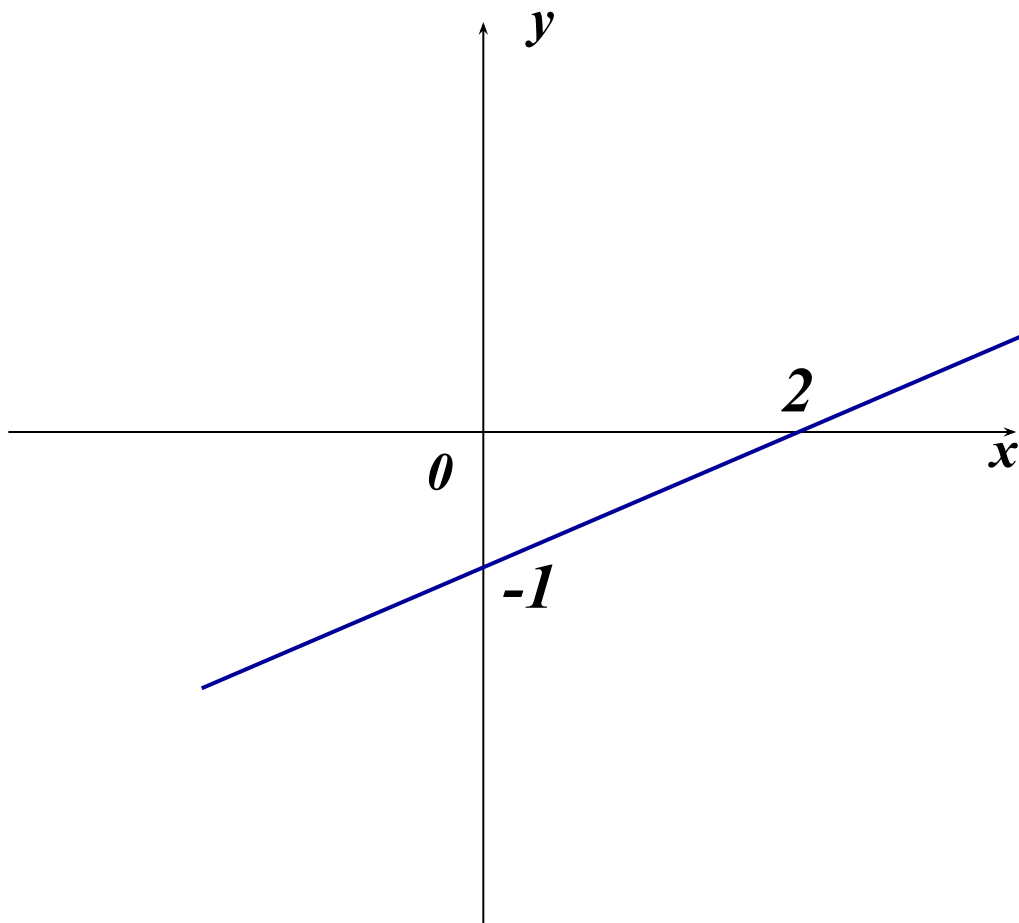


d)



e) +

График какой функции изображён на рисунке?



a) $y = 2x - 1$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$ +

d) $y = \frac{1}{2}x + 1$

e) $y = \frac{1}{2}x$

Квадратичная функция

- $y = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R} \neq 0$

- График – парабола

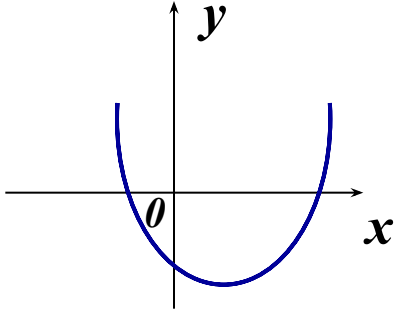
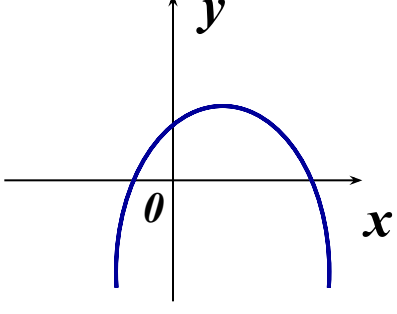
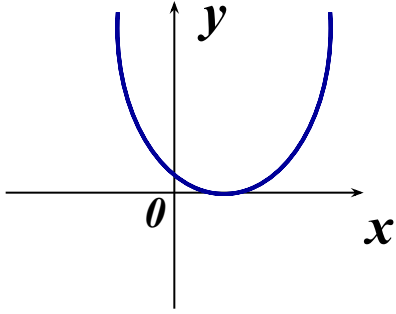
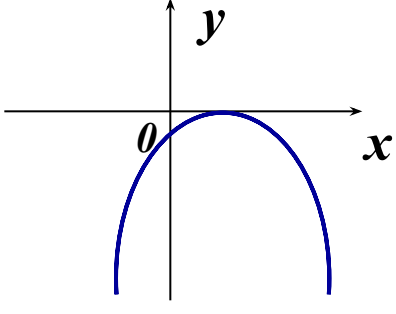
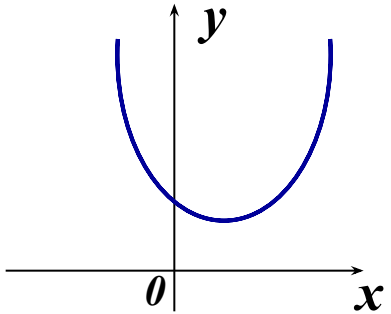
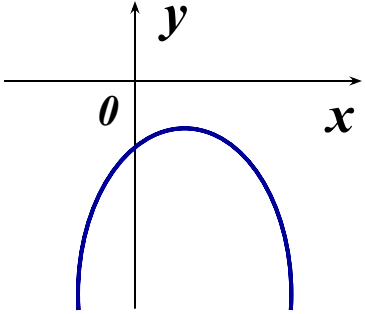
-

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_e = \frac{-b}{2a}$$

Квадратичная функция

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens upwards, intersecting the x-axis at two distinct points, one to the left and one to the right of the y-axis.</p>	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens downwards, intersecting the x-axis at two distinct points, one to the left and one to the right of the y-axis.</p>
$D = 0$	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens upwards, with its vertex touching the x-axis at a single point on the positive x-axis.</p>	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens downwards, with its vertex touching the x-axis at a single point on the positive x-axis.</p>
$D < 0$	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens upwards, with its vertex located above the x-axis, so it does not intersect the x-axis.</p>	 <p>A coordinate system with x and y axes. The origin is labeled '0'. A blue parabola opens downwards, with its vertex located below the x-axis, so it does not intersect the x-axis.</p>

$$y = |x|$$

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

