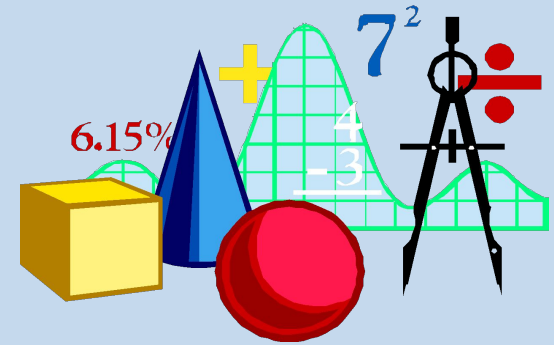


Тема урока:

Комбинация шара с геометрическими телами.



Задачи:

Образовательные – формировать знания, умения, навыки по решению стереометрических задач на тему: “Комбинация геометрических тел”.

Развивающие – развивать творческую и мыслительную деятельность учащихся на уроке посредством решения задач с несформулированным вопросом, анализа данных, сравнения задач. Способствовать развитию интеллектуальных качества личности школьников таких, как самостоятельность, гибкость, антикомформизм мышления, способность к «видению проблемы», оценочным действиям, обобщению, быстрому переключению; способствовать формированию навыков коллективной и самостоятельной работы; формировать умения чётко и ясно излагать свои мысли.

Воспитательные – прививать учащимся интерес к предмету посредством применения информационных технологий (с использованием компьютера); формировать умения аккуратно и грамотно выполнять математические записи.



К сведению учащихся ...



Основные определения

1. Шар называется вписанным в многогранник, а многогранник описанным около шара, если поверхность шара касается всех граней многогранника.
2. Шар называется описанным около многогранника, а многогранник вписанным в шар, если поверхность шара проходит через все вершины многогранника.
3. Шар называется вписанным в цилиндр, усеченный конус (конус), а цилиндр, усеченный конус (конус) – описанным около шара, если поверхность шара касается оснований (основания) и всех образующих цилиндра, усеченного конуса (конуса).
(Из этого определения следует, что в любое осевое сечение этих тел может быть вписана окружность большого круга шара).
4. Шар называется описанным около цилиндра, усеченного конуса (конуса), если окружности оснований (окружность основания и вершина) принадлежат поверхности шара.
(Из этого определения следует, что около любого осевого сечения этих тел может быть описана окружность большого круга шара).

Общие замечания о положении центра шара.

1. Центр шара, вписанного в многогранник, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника. Он расположен только внутри многогранника.

2. Центр шара, описанного около многогранника, лежит в точке пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих через их середины. Он может быть расположен внутри, на поверхности и вне многогранника.

Фронтальная проекция фигур.

Основные принципы фронтального косоугольного проектирования сводятся к следующему:

а) проекция прямолинейного отрезка, параллельного плоскости проекций, сохраняет размеры и направление проектируемого отрезка независимо от расстояния последнего от плоскости проекций;

б) проекция прямолинейного отрезка, направленного перпендикулярно к плоскости проекций, изображается в виде отрезка, направленного под углом в 45° к прямой, принятой за горизонтальную, причём длина этой проекции уменьшается вдвое сравнительно с длиной проектируемого отрезка (рис.1)

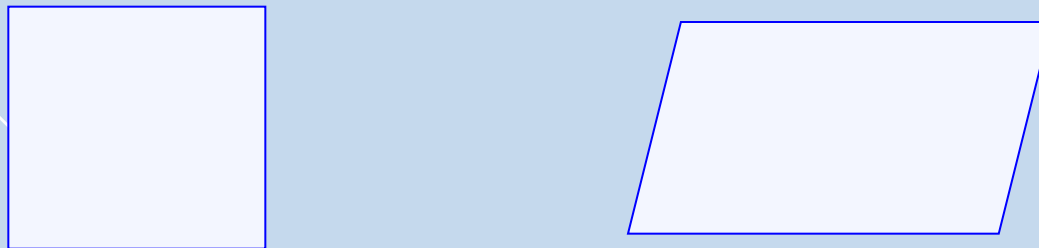


Рис.1 Фронтальная диметрическая проекция прямоугольника

в) при изображении круглых тел круги, лежащие в плоскостях, не параллельных плоскости проекций, изображаются в виде эллипсов. Если плоскость круга расположена горизонтально, то обычно в учебниках геометрии большую ось эллипса располагают в направлении, принятом на чертеже за горизонтальное. Такое построение является отступлением от принципов фронтального косоугольного проектирования, но принимается как наиболее простое и не противоречащее наглядности изображения (рис.2)

Этих трёх правил совершенно достаточно, чтобы построить любую из встречающихся в учебной практике фигур.

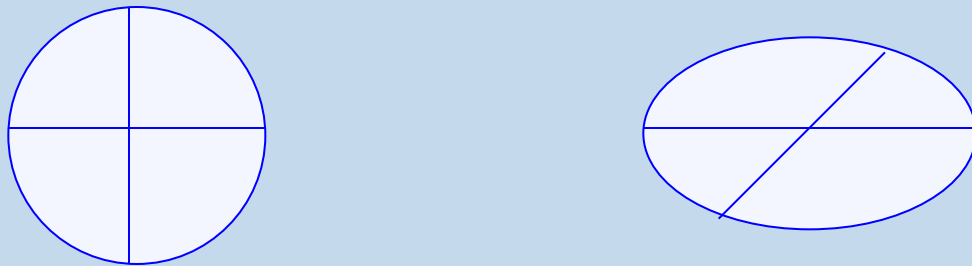


Рис.2 Фронтальная диметрическая проекция окружности

К правилам построения следует присоединить ещё несколько условных правил оформления чертежа, определяющих вид линий различного назначения.

Выводы

а) все части фигуры, данные по условию теоремы или задачи, должны изображаться линиями наибольшей толщины, подходящей к размерам чертежа;

б) все вспомогательные линии, проводимые при развитии доказательства теоремы или решении задачи, а также линии размерные и выносные берутся по толщине в $\frac{1}{4}$ и менее линий основного контура;

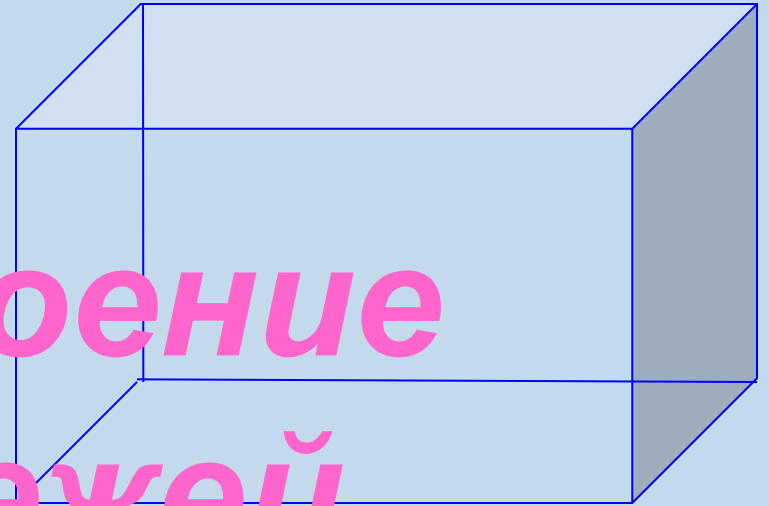
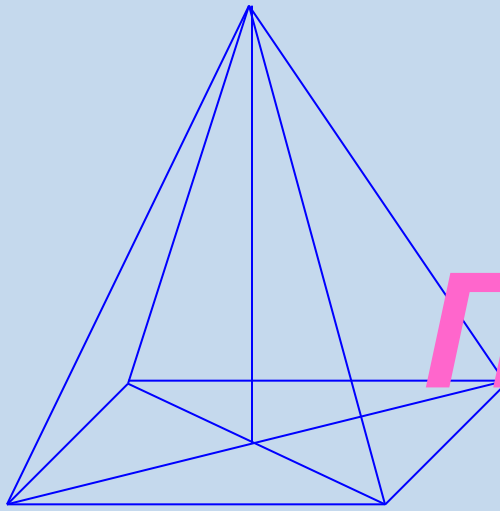
в) линии осевые изображаются штрихпунктиром в $\frac{1}{4}$ толщины основной линии;

г) в пространственных фигурах невидимые части изображаются штриховыми линиями; толщина их берется вдвое меньше сплошных линий соответствующего назначения;

д) для изображения плоских сечений пространственных фигур употребляется параллельная штриховка сплошными линиями; линии штриховки берутся в $\frac{1}{4}$ толщины основных линий. В плоских фигурах для выделения некоторых частей фигуры также может быть употреблена штриховка;

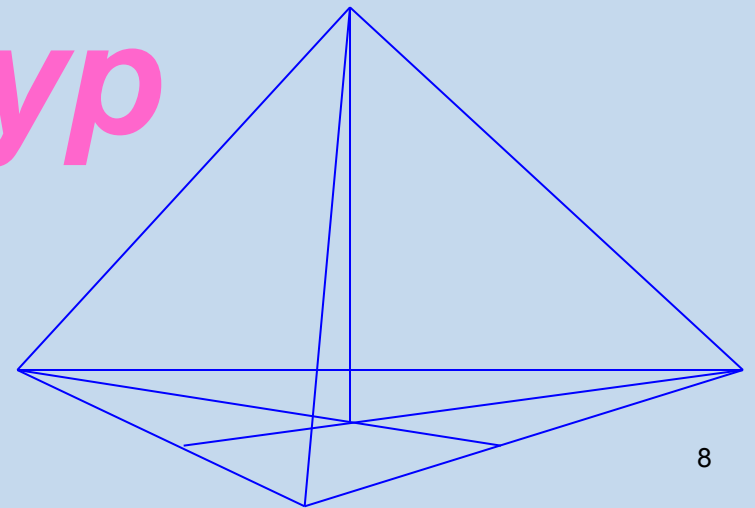
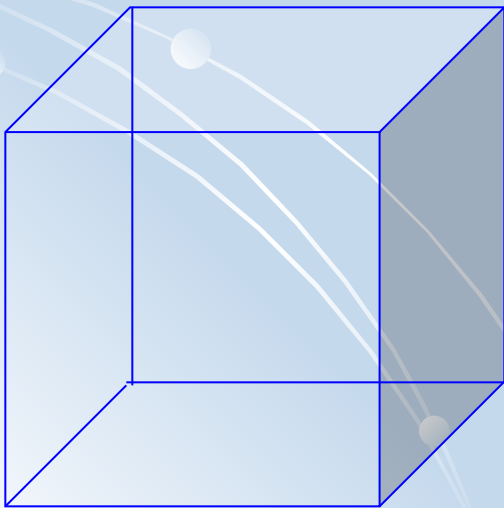
е) в курсе геометрии для указания равенства между собой двух отрезков можно перечёркивать их одинаковым числом штрихов. Равенство углов можно отмечать перечёркиванием их одинаковым числом дуг.

Таковы основные правила изображения фигур в техническом черчении, и этих же правил мы должны строго придерживаться и в курсе геометрии...



Построение чертежей

пространственных фигур



Описанный шар около правильной треугольной призмы

Проводим хорды
 A_1A_2 и C_1C_2

Итак, получили искомую правильную треугольную призму, вписанную в шар радиуса $R=OA$, где точки O_1, O и O_2 лежат на одной прямой, на оси призмы, совпадающей с диаметром шара.

**Попробуйте самостоятельно вписать
Правильную четырёхугольную
призму в шар
в рабочих тетрадях**

Проверьте себя

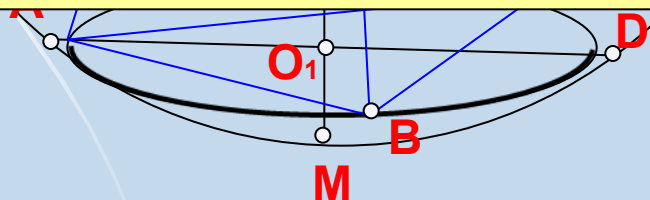
Описанный шар около правильной треугольной пирамиды

Проводим хорду
BC, которая
перпендикулярна

Строим
шар

*Попробуйте самостоятельно
вписать правильную
четырёхугольную пирамиду в шар
в рабочей тетради*

С
и S
П
искомую
пирамиду



Строим

Проверьте себя

Выводы

Теорема 2. Шар можно описать около призмы в том и только в том случае, если призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

Следствие 1. Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр круга, описанного около основания.

Следствие 2. Шар, в частности, можно описать: около прямой треугольной призмы, около правильной призмы, около прямоугольного параллелепипеда, около прямой четырехугольной призмы, у которой сумма противоположных углов основания равна 180 градусов.

Теорема 3. Около пирамиды можно описать шар в том и только в том случае, если около ее основания можно описать окружность.

Следствие 1. Центр шара, описанного около пирамиды лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию пирамиды, проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру, проведенной через середину этого ребра.

Следствие 2. Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равно наклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар. Центр этого шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

Следствие 3. Шар, в частности, можно описать: около треугольной пирамиды, около правильной пирамиды, около четырехугольной пирамиды, у которой сумма противоположных углов равна 180 градусов.

Теорема 5. Около любой правильной усеченной пирамиды можно описать шар (Это условие является достаточным, но не является необходимым).

Теорема 7. Около цилиндра, усеченного конуса, конуса можно описать шар.

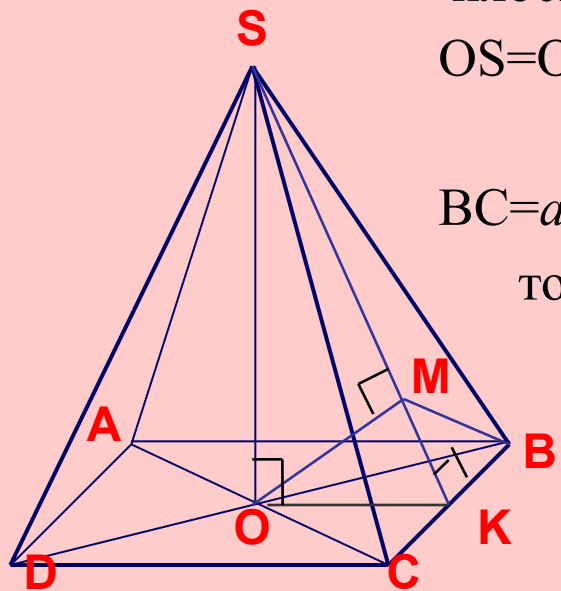
Задача1. Перпендикуляр, опущенный из центра основания правильной пирамиды на её боковую грань, попадает в центр окружности, описанной около боковой грани. Радиус этой окружности равен $\sqrt{6}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Решение. 1) Пусть на рис.3 К–середина BC, О–центр основания, OM проведено \perp апофеме SK. 2) Так как SO и ОК \perp BC, то BC \perp плоскости (SOK), поэтому OM \perp BC, а потому \perp грани BSC. При этом MS=MB как радиусы описанной окружности. Но эти отрезки являются проекциями на плоскость (BSC) наклонных OS и OB. Поэтому OS=OB и $\alpha = \angle SBO = \frac{\pi}{4}$. 3) Введём обозначения

BC=a, $\angle SOK = \beta$, $\angle BSC = \gamma$. Поскольку $OB \cdot \operatorname{tg} \alpha = OK \operatorname{tg} \beta$ то $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$ и $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника BSK

получаем, что

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BK}{SK} = \frac{OK}{SK} = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Отсюда $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ и радиус окружности, описанной около боковой грани, есть $MS = \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$. **4)** Поэтому

$a = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит на пересечении OS и серединного перпендикуляра к SB, так как OS=OB, то это пересечение совпадает с точкой O, а радиус описанного шара есть $OB = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$.

Ответ: $OB = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$.

Задача 2. Боковая грань правильной шестиугольной пирамиды SABDEF составляет с плоскостью основания угол β , $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{10}$. Около пирамиды описан шар радиуса 26 с центром в точке Р. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды PABCDEF.

Обозначения: $\angle SBO = \alpha$, $\angle SKO = \beta$, R – радиус шара описанного около SABCDEF, r – радиус шара описанного около PABCDEF.

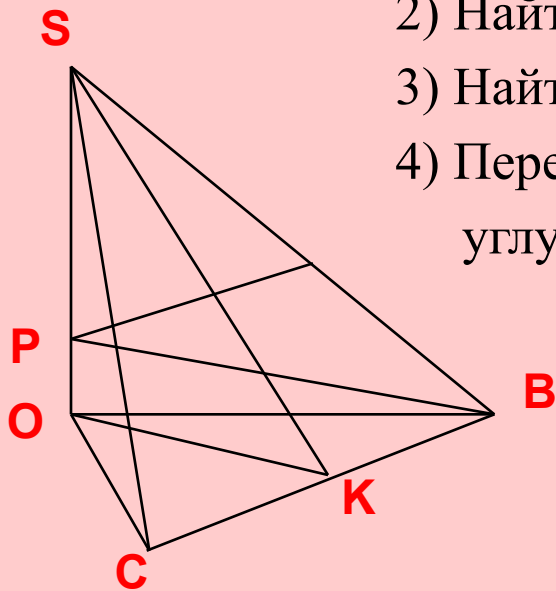
План решения:

1) Найти угол $\angle PBO$ - ?

2) Найти радиусы R, r.

3) Найти $\frac{r}{R}$?

4) Переход $\frac{r}{R}$ от неизвестного угла α к известному углу β .



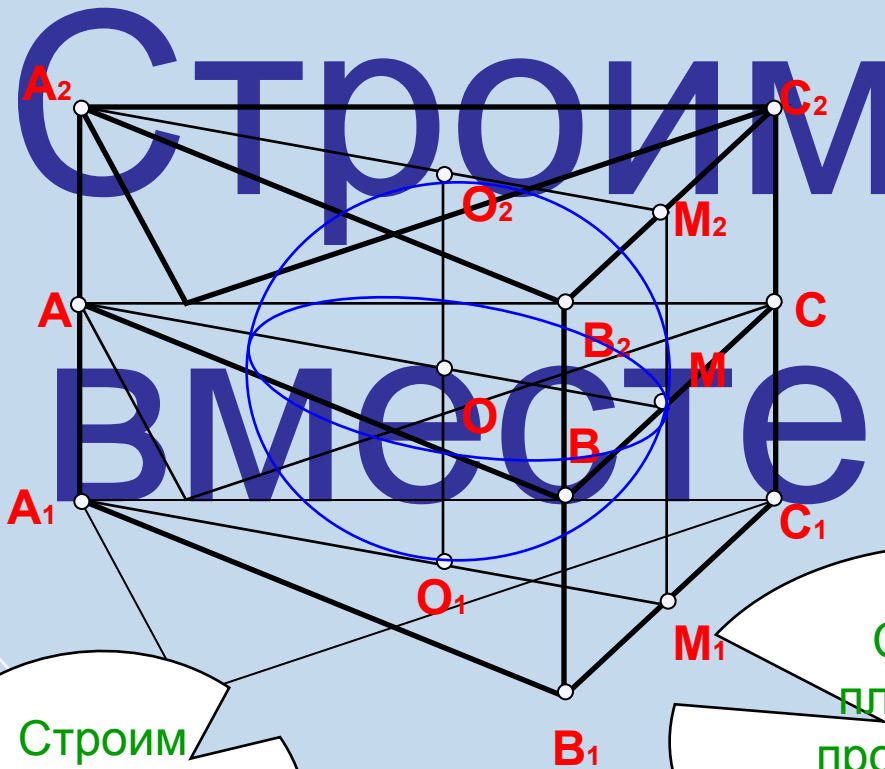
Ответ: 17.

Задача для самостоятельного решения

Задача 3. Около сферы радиуса R описана правильная четырёхугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ:
$$\frac{4R^2 \cos \alpha}{(1 - \sin \alpha) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} .$$

Вписанный шар в правильную треугольную призму.



Строим призму

Проводим медианы A_1M_1 и A_2M_2 и AM

Получаем сечение $A_1A_2M_2M_1$

Строим шар с радиусом OO_1

Проводим высоту O_1O_2

Строим плоскость, проходящую через середины рёбер призмы

Вписанный шар в правильную треугольную пирамиду.

СТРОИМ
ВМЕСТЕ

Восстановим перпендикуляр

Соединим точку S с точками A, B, C . Получим правильную треугольную пирамиду

Проводим биссектрису NN_1

Проводим отрезок AN и строим треугольник ABC

Проведём апофемы SM и SN

Строим шар с радиусом OS_1

Получаем точку пересечения O , являющуюся центром вписанного шара

Делим отрезок AN на 3 равные части

A

M

C

S

N_1

L

O

S_1

N

B

Выводы

Теорема 1. Шар можно вписать в прямую призму в том и только в том случае, если в основание призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности.

Следствие 1. Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит в середине высоты призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание.

Следствие 2. Шар, в частности, можно вписать в прямые: треугольную, правильную, четырехугольную (у которой суммы противоположных сторон основания равны между собой) при условии $H = 2r$, где H – высота призмы, r – радиус круга, вписанного в основание.

Теорема 4. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар.

Следствие 1. Центр шара, вписанного в пирамиду, у которой боковые грани одинаково наклонены к основанию, лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, стороной которого служит высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.

Следствие 2. В правильную пирамиду можно вписать шар.

Теорема 6. В правильную усеченную пирамиду можно вписать шар в том и только в том случае, если апофема пирамиды равна сумме апофем оснований.

Теорема 8. В цилиндр (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если цилиндр равносторонний.

Теорема 9. В любой конус можно вписать шар.

Теорема 10. В усеченный конус (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если его образующая равна сумме радиусов оснований.

Задача 1. В правильную треугольную пирамиду вписан шар радиуса 5. Расстояние от центра этого шара до бокового ребра пирамиды равно 6. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

Решение: 1) Пусть $SABC$ – данная пирамида, SO и SK – соответственно высота и апофема, KM – биссектриса угла SKO , $MN \perp SB$ (рис. 3). Тогда $MO=5$ – радиус шара, $MN=6$ – расстояние от центра этого шара до бокового ребра пирамиды. 2) Кроме того, $\angle SBO=\alpha$ – угол между боковым ребром и плоскостью основания, $\angle SKO=\beta$ – угол между боковой гранью и плоскостью основания, $\angle ASC=\gamma$ – плоский угол при вершине пирамиды, косинус которого надо найти. 3) По свойству биссектрисы KM в $\triangle SKO$ справедлива пропорция $MO:SM=OK:SK=\cos\beta$, поэтому

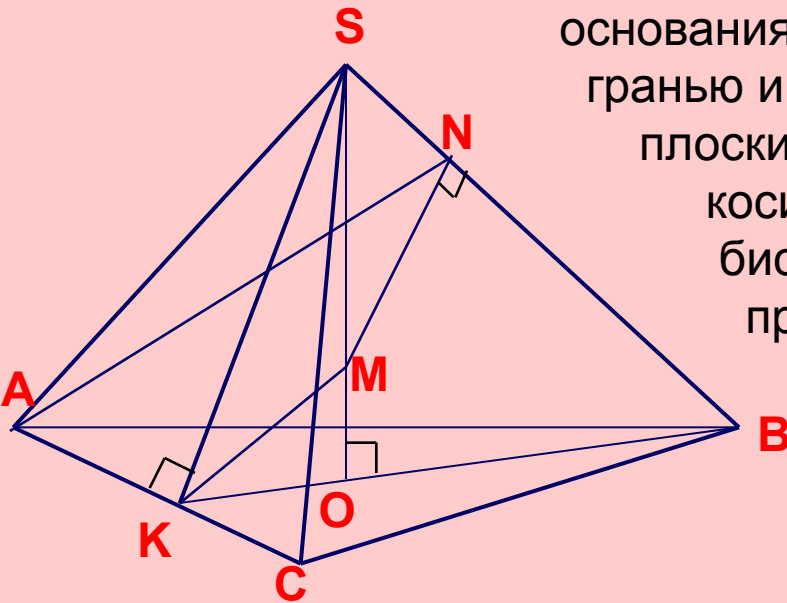


Рис.3

$$SM = \frac{MO}{\cos \beta}.$$

При этом $\angle BSO = 90^\circ - \alpha$ и из $\triangle SMN$ получаем, что $MN = SM \cdot \cos \alpha =$

$$= MO \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

4) Связь между тригонометрическими функциями углов α и β получается так: высоты пирамиды SO выражаем дважды из треугольника SKO и треугольника SOB . Из равенства $OK \cdot \operatorname{tg}\beta = OB \cdot \operatorname{tg}\alpha$ с учётом того, что

$OB=2 \cdot OK$, находим, что $\operatorname{tg}\beta=2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$ или $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Поэтому

$MN = 2 \cdot MO \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ и теперь в треугольнике SKB используем теорему

синусов: $\frac{SB}{\sin \beta} = \frac{SK}{\sin \alpha}$. Отсюда $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{SK}{SB} = \frac{SK}{SC} = \cos \angle KSC = \cos \frac{\gamma}{2}$.

В итоге $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{MN}{2 \cdot MO} = 0,6$ и $\cos \gamma = 2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1 = -0,28$.

Ответ: $-0,28$

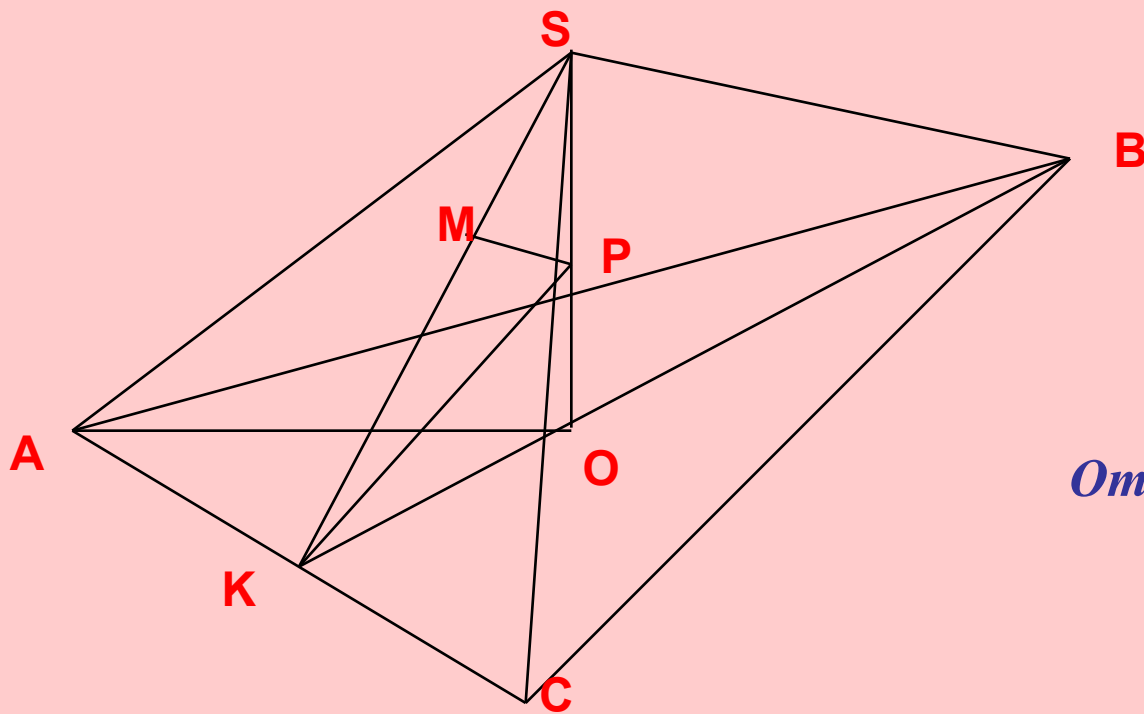
Задача 2. В правильную треугольную пирамиду радиус вписанного шара равен 1. Найдите радиус описанного шара, если известно, что центры этих шаров совпадают.

Обозначения: $\angle SKO = \beta$, $AB = a$.

План решения: 1) Доказать, что $SM = OA$, 3) $SK = SM + KM$,

2) Доказать, что $KA = OK$, 4) $\cos \beta = ?$

5) Составить пропорцию, откуда при $r = 1$ получаем искомый радиус.



Ответ: $R = 3$.

Задача для самостоятельного решения

Задача 3. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все рёбра которой равны a .

Ответ: $\frac{\pi a^2}{6}$.

Тест:

Вопрос 1. Найдите неверное высказывание.

Пирамида называется вписанной в конус, если

- их высоты совпадают, а боковые рёбра пирамиды лежат на боковой поверхности конуса.
- их вершины совпадают, и основание пирамиды – многоугольник, вписанный в окружность основания конуса.
- каждое боковое ребро пирамиды лежит на боковой поверхности конуса.

Вопрос 2. Найдите верное предложение.

Конус называется вписанным в пирамиду, если

- окружность его основания вписана в многоугольник, который является основанием пирамиды.
- их высоты совпадают, а окружность основания конуса вписана в многоугольник, который является основанием пирамиды.
- их вершины совпадают.

Вопрос 3. Найдите неверное высказывание.

Около усечённой пирамиды можно описать сферу, если

- все боковые грани усечённой пирамиды равнобедренные трапеции.
- все боковые грани усечённой пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания.
- все боковые рёбра усечённой пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания.
- около оснований усечённой пирамиды можно описать окружности, причём центры этих окружностей лежат на высоте пирамиды.

Вопрос 4. Укажите ошибочное утверждение.

- Около всякого цилиндра можно описать сферу.
- Около всякого конуса можно описать сферу.
- Во всякий цилиндра можно вписать сферу.
- Во всякий конус можно вписать сферу.

Вопрос 5. Укажите ошибочное предложение.

- Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности его оснований лежат на сфере.
- Усечённый конус называется вписанным в сферу, если окружности его оснований лежат на сфере.
- Конус называется вписанным в сферу, если окружность его основания лежит на сфере.
- Многогранник называется вписанным в сферу, если все его вершины лежат на сфере.

Вопрос 6. Укажите ошибочное предложение.

- Во всякую правильную пирамиду можно вписать сферу.
- Во всякую треугольную пирамиду можно вписать сферу.
- Во всякую четырёхугольную пирамиду можно вписать сферу.
- Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к её основанию, то в эту пирамиду можно вписать сферу.

Анкета для рефлексии учащихся

- 1. Что нового я узнал сегодня на уроке?**
- 2. Сегодня на уроке мне понравилось...**
- 3. Какие затруднения у меня возникли на уроке?**
- 4. Я думаю, что эти затруднения возникли потому, что...**
- 5. Чем мне больше нравится заниматься на уроке?**
- 6. Что бы я хотел делать на следующем уроке?**

Домашнее задание

1. В правильной четырёхугольной пирамиде радиусы вписанной и описанной сфер равны 2 см и 5 см. Найдите сторону основания и высоту пирамиды. (Ответ: $4\sqrt{3}$ см, 6 см или $4\sqrt{2}$ см, 8 см.)

2. Докажите, что если в правильную усечённую четырёхугольную пирамиду можно вписать сферу, то апофема пирамиды равна полусумме сторон оснований её боковой грани.

3. Около прямой призмы, основанием которой служит равнобедренный треугольник со сторонами 5 см и 6 см, описан шар; высота призмы 15 см. Найдите объём шара. (Ответ: $V_{\text{шара}} \approx 720\pi \text{ см}^3$.)