

Средние величины

- **Средним** в статистике называют обобщающий показатель, который характеризует типичный уровень признака в расчете на единичную совокупность.

Особенности средних величин:

- Они отражают то общее, что скрыто в каждой единице совокупности, они улавливают общие черты, закономерности изучаемых общественных явлений.
- В среднем погашаются индивидуальные различия у отдельных единиц совокупности.
- Средние обладают относительной устойчивостью.
- Средние рассчитываются когда возникает потребность обобщения, что позволяет выявить закономерности, присущие массовым общественным явлениям, незаметные в единичных явлениях.

Условия применения среднего:

- Средняя характеризует качественно однородную совокупность.
- Нельзя ограничиваться расчетом средней по всей совокупности, надо определять среднюю и по каждой из групп.
- Наряду с расчетом средних величин рассчитывают наибольшее и наименьшее значение признака.
- Важно правильно выбрать вид средней величины. Выбор зависит от представленного исходного материала и задач исследования.

Вид степенной средней:

$$\bar{X} = \sqrt[k]{\sum x_i^k / n},$$

- где X – среднее значение исследуемого явления,
- k - показатель степени средней,
- n – число значений признака,
- x – конкретное значение, текущее значение усредняемого признака.

Значение показателя степени	Определяющая функция	Формула	Название средней величины
-1	$W = 1/x$	$\bar{X} = n/\sum x$	<i>Гармоническая</i>
0	$W = \ln x$	$\bar{X} = \sqrt[n]{\sum x / n},$	<i>Геометрическая</i>
1	$W = x$	$\bar{X} = x/\sum n$	<i>Арифметическая</i>
2	$W = x^2$	$\bar{X} = \sqrt{\sum x^2 / n},$	<i>Квадратическая</i>

$$X_{\text{гар}} \leq X_{\text{геом}} \leq X_{\text{ар}} \leq X_{\text{кв}}$$

Это свойство степенных средних возрастать с повышением показателя степени определяющей функции называется в статистике **правилом мажорантности средних.**

Средняя арифметическая

- Средняя арифметическая применяется тогда, когда объем варьирующего признака образуется как сумма значений признака у отдельных единиц совокупностей.

- Обозначим отдельные значения признака через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, где n – объем совокупности. Тогда объем варьирующего признака будет равен сумме $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

-
- Если изменить эмпирические значения единиц совокупности (их средние значения), то объем варьирующего признака должен оставаться неизменным.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = X + X + X + \dots + X = nX$$

$$X = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) / n = \sum x_i / n$$

$X = \sum x_n / n$ – средняя арифметическая простая.

Пример. Десять рабочих изготавливают за смену:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43	46	46	38	44	49	43	51	44	46

$$X = \text{общая выработка} / \text{число рабочих} = 450 / 10 = 45$$

Сгруппируем, т.е. представим исходные данные в другом виде:

Выработка за смену одного рабочего	Число рабочих, имеющих данную выработку	Общая выработка
38	1	38
43	2	86
44 (x)	2 (f)	88
46	3	138
49	1	49
51	1	51
Итого	10	450

f - частота или вес, $\text{Хар.взв.} = \sum x f / \sum f$ - Средняя арифметическая взвешенная

$$\text{Хар.взв.} = (1 \cdot 38 + 2 \cdot 43 + 2 \cdot 44 + 3 \cdot 46 + 1 \cdot 49 + 1 \cdot 51) / 10 = 450 / 10 = 45$$

Статистическим весом (частотой) – называются числа, учитывающие значения величины признака (варианта) у единиц совокупности.

- *Средняя арифметическая взвешенная* равна сумме произведений вариантов на соответствующие им веса, деленные на сумму весов, или же, это есть средняя из вариантов, которая повторяется различное число раз, или имеет различный вес.

-
- $d = f / \sum f$, где d – доля.
 - Если доля выражается в процентах, то средняя арифметическая взвешенная определяется следующим образом:
 - $X_{\text{ар.взв.}} = \sum x_i d_i / \sum d$
 - Если долю выразить в коэффициентах, то средняя арифметическая взвешенная:
 - $X_{\text{ар.взв.}} = \sum x_i d_i (\sum d = 1)$

Определение средней арифметической по данным интегрального ряда

Пример. Определить средний стаж

Стаж (x)	Число рабочих (f)	Середина интервала	Общий стаж в каждой группе
До 1	16	0,5	8
1-3	45	2	90
3-5	62	4	248
5-10	50	7,5	375
10-20	19	15	285
свыше 20	8	25	200
Итого	200		1206

$$X_{\text{ар.взв.}} = \sum x f / \sum f = 1206 / 200 \cong 6 \text{ лет}$$

Свойства средней арифметической

- Алгебраическая сумма линейных отклонений индивидуальных значений признака от средней арифметической равна нулю.
- Если все варианты ряда уменьшить или увеличить на одно и то же число, то и среднее уменьшится или увеличится на одно и то же число.

$$(X+a) + (X+a) + \dots + = n (X + a)$$

- Если частоты ряда уменьшить или увеличить в определенное число раз, то средняя от этого не изменится.

$$X_{\text{ар.взв.}} = \sum x af / \sum af = a \sum x f / a \sum f = \sum x f / \sum f$$

- Если все варианты ряда уменьшить или увеличить в определенное число раз, то средняя увеличится или уменьшится в такое же число раз.

$$aX + aX + \dots + = n aX$$

Метод моментов или метод условного нуля

- Все варианты ряда уменьшают на одно и тоже число a : $(x-a)$, т.е. расчет ведут от некоторого произвольного взятого начала (условного нуля). Наибольшее упрощение достигается, когда в качестве « a » выбирается значение одного из центральных вариантов, обладающего наибольшей частотой.
- Полученные отклонения уменьшают в одно и тоже число раз (в K раз – величина интервала).
- Вычисляют среднюю от полученных значений (условную среднюю).

$$X' = \sum x' f / \sum f = \sum \frac{(x-a)f}{K} / \sum f$$

- Умножив условную среднюю на K и алгебраическую сумму a , получим истинную величину средней

$$X = \sum \frac{(x-a)f}{K} / \sum f * K + a$$

Пример.

Численность персонала	Количество предприятий f	Середина а интервала а	X*f	a= 650 X-a	X-a/100= x ^l	x ^l * f
		X				
100-200	2	150	300	-500	-5	-10
200-300	3	250	750	-400	-4	-12
300-400	8	350	2800	-300	-3	-24
400-500	10	450	4500	-200	-2	-20
500-600	11	550	5050	-100	-1	-11
600-700	16	650	10400	0	0	0
700-800	12	750	9000	100	1	12
800-900	9	850	7650	200	2	18
900-1000	4	950	3800	300	3	12
1000-1100	2	1050	2100	400	4	8
1100 и более	3	1150	3450	500	5	15
	80		50800			-12

$$X_{\text{ар.взв.}} = 50800 / 80 = 635$$

$$x^l = -12 / 80 = -0,15 \quad X = -0,15 * 100 + 650 = 635$$