

НАТУРАЛЬНЫЕ
И ЦЕЛЫЕ
ЧИСЛА.





Числа, используемые для счёта предметов называют натуральными: $1; 2; 3; \dots \in \mathbb{N}$

Натуральные числа можно складывать и умножать – в результате получится натуральное число:

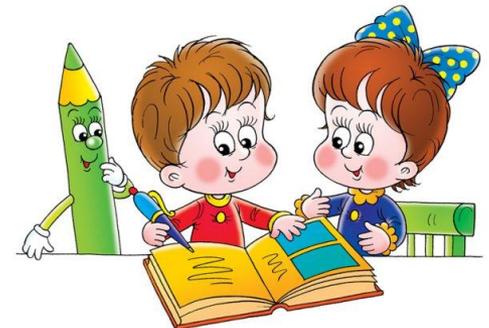
$$5 + 7 \in \mathbb{N}$$

$$2 \cdot 6 \in \mathbb{N}$$

Операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел выполнимы не всегда:

$$5 - 7 \in \mathbb{N} - ?$$

$$2 : 6 \in \mathbb{N} - ?$$

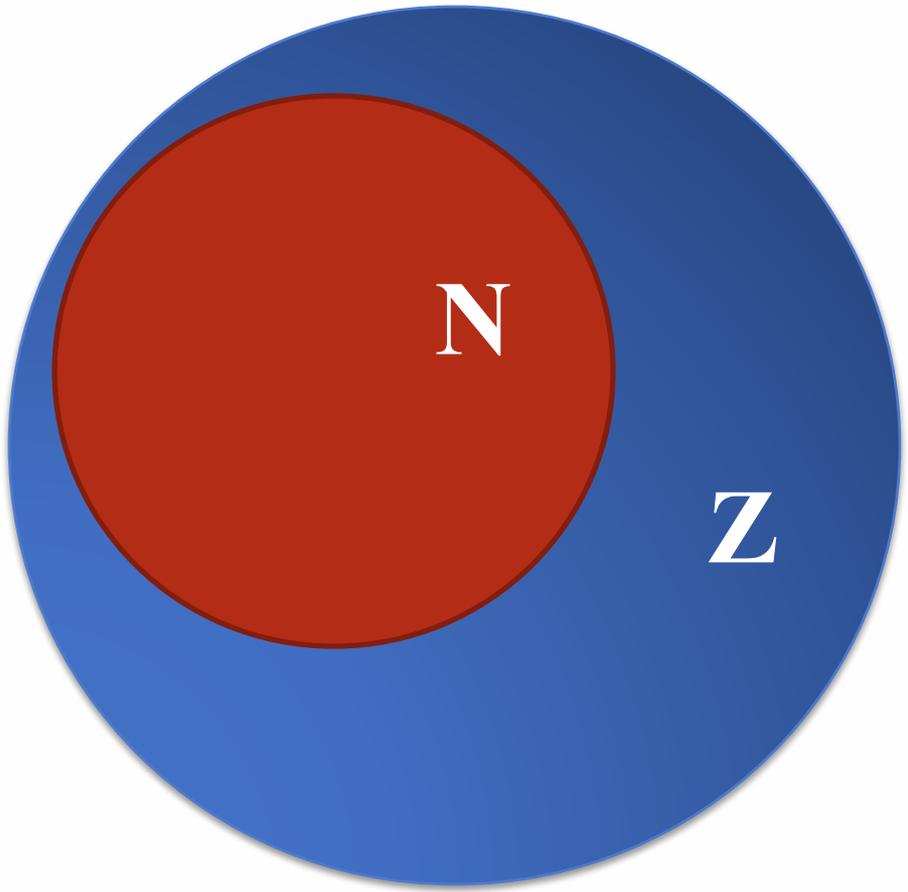




Более широкий класс чисел составляют *целые числа*. К ним относят натуральные числа, число 0 и числа $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$. Над целыми числами выполнимы операции сложения, умножения и вычитания.

Натуральные числа называют также *целыми положительными числами*, а если к множеству натуральных чисел добавить число 0, то получим *множество неотрицательных целых чисел*.

$\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots \in \mathbf{Z}$



$$N \subset Z$$



Делимость натуральных чисел.

Определение 1. Пусть даны два натуральных числа — a и b . Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что число a делится на число b . При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, q — *частным*. Число a называют также *кратным* числа b .

Вместо фразы « a делится на b » часто используют запись $a : b$.



Делимость натуральных чисел.

Свойство 1.

Если $a : c$ и $c : b$, то $a : b$.

Например, из того, что $48 : 6$ и $6 : 3$, можно сделать вывод, что $48 : 3$.

Свойство 2.

Если $a : b$ и $c : b$, то $(a + c) : b$.

Например, из того, что $12 : 3$ и $21 : 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) : 3$.



Делимость натуральных чисел.

Свойство 3.

Если $a : b$ и c не делится на b , то $(a + c)$ не делится на b .

Например, из того, что $12 : 3$ и 22 не делится на 3 , можно сделать вывод, что $(12 + 22)$ не делится на 3 . В то же время из того, что *каждое слагаемое* не делится на b , нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b . Например, 14 не делится на 3 , 22 не делится на 3 , но $(14 + 22) : 3$.

Свойство 4.

Если $a : b$ и $(a + c) : b$, то $c : b$.

Например, из того, что $12 : 3$ и $(12 + 21) : 3$ можно сделать вывод, что $21 : 3$.



Делимость натуральных чисел.

Свойство 5.

Если $a : b_1$ и $c : b_2$, то $ac : b_1b_2$.

Например, из того, что $12 : 3$ и $28 : 7$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 28) : (3 \cdot 7)$.

Свойство 6.

Если $a : b$ и c — любое натуральное число, то $ac : bc$; если $ac : bc$, то $a : b$.

Например, из того, что $12 : 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) : (3 \cdot 5)$ и обратно.



Делимость натуральных чисел.

Свойство 7.

Если $a : b$ и c — любое натуральное число, то $ac : b$.

Например, из того, что $12 : 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) : 3$.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что $ac : b$, нельзя сделать вывод, что или a , или c делится на b . Например, $45 : 15$ и $45 = 9 \cdot 5$, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

Свойство 8.

Если $a : b$ и $c : b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) : b$.

Например, из того, что $12 : 3$ и $21 : 3$, можно сделать вывод, что $(25 \cdot 12 + 271 \cdot 21) : 3$.



Делимость натуральных чисел.

Свойство 9.

Среди n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n .



Признаки делимости.

Признак делимости на 2. Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Признак делимости на 5. Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т. е. цифра единиц либо 0, либо 5).

Признак делимости на 10. Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

Признак делимости на 4. Для того чтобы натуральное число p , содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа p .



Признаки делимости.

Признак делимости на 25. Для того чтобы натуральное число p , содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p .

Признак делимости на 8. Для того чтобы натуральное число p , содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа p .

Признак делимости на 125. Для того чтобы натуральное число p , содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p .



Признаки делимости.

Признак делимости на 3. Для того чтобы натуральное число r делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Признак делимости на 9. Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Признак делимости на 11. Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечетных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на четных местах, делилась на 11.

Например, для числа 24 569 алгебраическая сумма, о которой идет речь в формулировке признака, имеет вид $9 - 6 + 5 - 4 + 2$, она равна 6; поскольку число 6 не делится на 11, то и число 24 569 не делится на 11.

Не выполняя деления, докажите, что число 86849796 делится на 11.



Признаки делимости.

Признак делимости на 7 (на 13). Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для четных граней, делилась на 7 (на 13).

Пример 4. Не выполняя деления, доказать, что число 254 390 815 делится на 7 и не делится на 13.

Решение. Разобьем число на грани 254, 390, 815. Составим алгебраическую сумму граней, начиная с последней грани и чередуя знаки «+» и «-»: $815 - 390 + 254 = 679$. Число 679 делится на 7 и не делится на 13, значит, и заданное число делится на 7 и не делится на 13. ■