


Уравнения и неравенства с параметрами



Часть 1

План

- 1. Что такое задача с параметром?**
- 2. Аналитический метод решения задач с параметрами.**
3. Графический метод решения задач с параметрами.

Что такое задача с параметром

$$F(x, a) = 0$$

Задачи:

1. Решить уравнение (найти все пары чисел (x, a) , которые удовлетворяют данному уравнению).

Например: решить уравнение в целых числах

$$(ax - 4)(ax^2 + 1) = 0$$

2. **Для каждого значения a решить уравнение относительно переменной x .**

Задача с параметром первого типа

Пример:

Решить уравнение относительно x :

$$(b^2 - b)x = 1 - b$$

где b - параметр и может принимать значения из множества $M = \{0, 1, 3\}$.

Семейство уравнений:
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x = 1 \\ 0 \cdot x = 0 \\ 6 \cdot x = -2 \end{array} \right\}$$

Задача с параметром первого типа

Определение

Решить уравнение с переменной x и параметром a – это значит на множестве R решить семейство уравнений, получающихся из данного уравнения при подстановке вместо параметра любых значений из его области изменения.

Замечание. Аналогично определяются понятия неравенства, системы уравнений, системы неравенств с параметром. Кроме того, часто встречаются задачи, в условии которых содержится не один, а несколько параметров.

Задача с параметром второго типа

Примеры

1. Для каких значений a и b уравнение имеет только 2 различных корня?

$$x^4 + ax^3 + b^2x^2 - a = 0$$

2. При каких значениях a минимум функции больше 1?

$$f(x) = ax + |x^2 + 5x - 6|$$

Методы решения задач с параметрами

- Аналитические
- Графические

Аналитические приемы

1. «В лоб»

Этапы:

- обнаружение критических значений параметра и разбиение множества параметров на подмножества
- решение задачи на каждом из выделенных подмножеств
- запись ответа

Решение «в лоб»

Пример

Решить уравнение: $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$

Решение:

1 этап.

1 вывод. Уравнение степени не выше 2

2 вывод. Рассмотреть значения параметра, влияющие на степень уравнения.

1 промежуточный результат:

Первое «критическое» значение параметра $a=1$

Решение «в лоб»

Квадратное уравнение

$$\frac{D}{4} = (2a + 1)^2 - (a - 1)(4a + 3) = 5a + 4$$

2 промежуточный результат:

Второе «критическое» значение параметра: $a = -\frac{4}{5}$

Результат первого этапа: разбиение множества параметров на 4 подмножества:

$$(-\infty; -0,8) \quad \{-0,8\} \quad (-0,8; 1) \cup (1; +\infty) \quad \{1\}$$

Схема решения

2 этап:

1. $a \in (-\infty; -0,8)$ уравнение не имеет корней, поскольку дискриминант квадратного уравнения отрицательный.
2. $a = -0,8$ – дискриминант квадратного уравнения обращается в ноль, и уравнение имеет корень $x = -\frac{1}{3}$
3. $a \in (-0,8; 1) \cup (1; +\infty)$ уравнение является квадратным с положительным дискриминантом, и его корнями являются два различных числа:
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-2a - 1 + \sqrt{5a + 4}}{a - 1} \\ x = \frac{-2a - 1 - \sqrt{5a + 4}}{a - 1} \end{array} \right.$$
4. $a = 1$ – уравнение имеет вид: $6x + 7 = 0$ и единственный корень:
$$x = -\frac{7}{6}$$

Схема решения

3 этап.

Ответ:

при $a \in (-\infty; -0,8)$ корней нет;

при $a = -0,8$ $x = -\frac{1}{3}$;

при $a \in (-0,8; 1) \cup (1; +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-2a - 1 + \sqrt{5a + 4}}{a - 1} \\ x = \frac{-2a - 1 - \sqrt{5a + 4}}{a - 1} \end{array} \right.$$

при $a = 1$ $x = -\frac{7}{6}$

Решение «в лоб»

Замечание.

При определении пограничных значений параметра следует обращать внимание на:

- обращение в 0 старшего коэффициента;
- обращение в 0 дискриминанта;
- границы области определения параметра;
- ОДЗ уравнения (неравенства...) и др.

Аналитические приемы

2. Метод равносильных переходов

Используются теоремы о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений (неравенств, систем).

Пример: решить неравенство

$$\sqrt{x+a} \geq x+1$$

2. Метод равносильных переходов

Решение:

⊠

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x + a \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \\ x + a \geq x^2 + 2x + 1 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq -a \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x^2 + x + 1 - a \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq -a \end{array} \right.$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x^2 + x + 1 - a \leq 0 \end{array} \right.$$

Решение

$$(I) \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -a \end{cases}$$



при $a \leq 1$ решений нет

при $a > 1$ $x \in [-a; -1)$

Решение

$$(II) \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 1 - a \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 - a \leq 0$$



$$D=4a-3$$

при $a < \frac{3}{4}$ решений нет;

при $a = \frac{3}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$;

при $a > \frac{3}{4}$ $\frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$

Решение

Ответ:

при $a < \frac{3}{4}$ решений нет;

при $a = \frac{3}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$

при $\frac{3}{4} < a \leq 1$ $\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$

при $a > 1$ $-a \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$

Аналитические приемы

3. Замена переменной

1. исходя из свойств какой-то функции
2. упрощающая вычисления

3. Замена переменной

Пример 1. $\sqrt{1-x^2} > a-x$

При каких значения параметра a неравенство имеет решения

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$

$$x = \sin(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} > a - \sin t \Leftrightarrow \cos t > a - \sin t \Leftrightarrow \cos t + \sin t > a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) > a$$

так как $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, то $a < \sqrt{2}$

3. Замена переменной

Пример 2.

При каких значениях параметра c система имеет решение?

$$\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$$

$$(1) \quad 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \Leftrightarrow 2^{3x-4y} - 2^{4y-3x} \cdot 8 = 2$$

Пусть $z = 2^{3x-4y}$

$$z - \frac{8}{z} - 2 = 0, \quad z=4 \quad 2^{3x-4y} = 2^2 \Leftrightarrow 3x - 4y = 2$$

$$\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x^2 + y^2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-4y}{3} \\ (2+4y)^2 + 9y^2 = 9c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-4y}{3} \\ 25y^2 + 16y + 4 - 9c = 0 \end{cases} \quad c \geq \frac{36}{225}$$

Аналитические приемы

4. Использование свойств функций

1. **МОНОТОННОСТЬ**
2. **ограниченность**
3. **свойства линейной и квадратичной функций**

4. Использование свойств функций

Пример 1. (ограниченность)

При каких целых значениях параметра k система имеет решения?
$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arccos} y)^2 = \pi^2 k \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccos} y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq (\operatorname{arctg} x)^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \quad 0 \leq (\operatorname{arccos} x)^2 \leq \pi^2$$

$$0 \leq (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arccos} x)^2 \leq \frac{5\pi^2}{4} \quad 0 \leq \pi^2 k \leq \frac{5\pi^2}{4} \quad \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

4. Использование свойств функций

Пример 2. (монотонность)

При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно 3 корня?

$$(1) \quad 4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-(x^2-2x)} \log_{1/3}(2|x-a|+2) = 0$$

$$f(t_1) = f(t_2)$$

$$2^{-2|x-a|} \cdot 2 \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{-(x^2-2x)} \log_3(2|x-a|+2)$$

$$2^{x^2-2x+1} \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|} \cdot \log_3(2|x-a|+2)$$

$$f(t) = 2^t \log_3(t+2) \quad (1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-a|$$

4. Использование свойств функций

Пример 3.

Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения лежат по разные стороны от 1 $(a^2 - 1)x^2 + (2a + 1)x - 3 = 0$

1 вывод: $a^2 - 1 \neq 0$ И $(2a + 1)^2 + 12(a^2 - 1) > 0$

2 вывод: $(a^2 - 1)(a^2 - 1 + 2a + 1 - 3) < 0$

$$\begin{cases} (a^2 - 1)(a^2 + 2a - 3) < 0 \\ 16a^2 + 4a - 13 > 0 \end{cases}$$

Аналитические приемы

5. Поиск необходимых условий

1. использование симметрии аналитических выражений
 - присутствует требование единственности решения
 - есть аналитическое выражение, обладающее симметрией относительно одной из переменных
2. ПОИСК «ВЫГОДНОЙ» ТОЧКИ

5. Поиск необходимых условий

Пример 1.

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Необходимое условие: $x=0$.

$$\begin{cases} y = a - 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

5. Поиск необходимых условий

Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнения равносильны?

$$(1) \sin(2x) + a = \sin x + 2a \cos x$$

$$(2) 2 \cos(2x) + a^2 = 5a \cos x - 2$$

$$(1) (\sin x - a)(2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a \\ \cos x = 0,5 \end{cases}$$

$$a^2 - 2,5a + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = 0,5 \end{cases}$$

6. Рассмотрение параметра как равноправной переменной

Пример:

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют общий действительный корень.

$$(1) \quad x^2 + x + 4a = 0$$

$$(2) \quad a^2 x^2 + ax + 4a = 0$$

$$\begin{cases} a^2 x^2 + ax + 4a = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}$$

7. Решение относительно параметра

Пример: $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$

При каких значениях параметра a уравнение имеет решение?

$$\begin{aligned} \sin x = t \quad \sqrt{a + \sqrt{a + t}} = t & \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ a + t = (t^2 - a)^2 \\ t^2 \geq a \end{cases} \\ a^2 - a(2t^2 + 1) + t^4 - t = 0 & \\ a = t^2 + t + 1 & \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ a = t^2 - t \end{cases} & \quad f(t) = t^2 - t \quad [0;1] \\ a = t^2 - t & \quad \begin{cases} t^2 \geq a \\ 0 \leq t \leq 1 \\ a = t^2 - t \end{cases} & \quad \left[-\frac{1}{4}; 0\right] \end{aligned}$$

Задание

1. Решите неравенство: $2a(a-2)x > a-2$
2. Решите уравнение: $\sqrt{a^2 - x}\sqrt{x^2 + a^2} = a - x$
3. Найдите те значения параметра a , при которых разные корни уравнения расположены по одну сторону от 2.

$$x^2 - 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$$

4. При каких значениях параметра уравнения имеют общие корни?

$$x^2 - \frac{x}{2} + a = 0$$

$$4a^2x^2 - ax + a = 0$$

Задание

5. Решить уравнение: $x(2x - 1)\sqrt{1 - x^2} = a$

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (a^2 - a) \sin \frac{x}{2} + 2 \cos y = a + 5 \\ 3 \sin \frac{x}{2} + \cos y = 4 \end{cases}$$

7. Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет три корня: $9^{a^2} \log_2(|x^2 - 4x + 3| + 1) = 3^{3a - |x^2 - 4x + 3|} \log_2(1 + 3a - 2a^2)$

8. При каких значениях a система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$