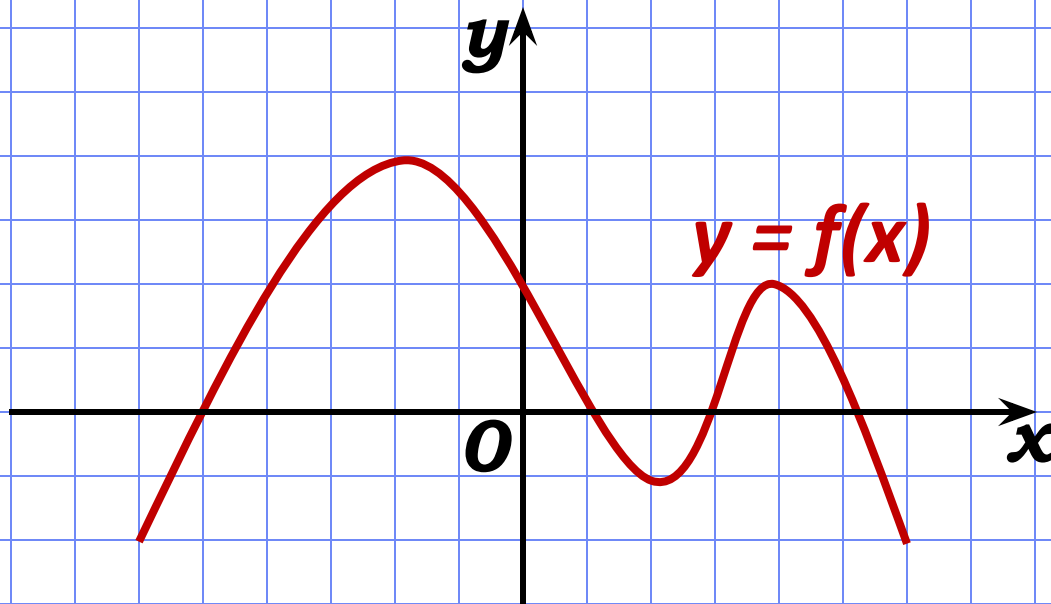


Функции и их свойства



Понятие функции

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y , то говорят, что на этом множестве задана **функция $y(x)$** .

При этом x называют **независимой переменной** или **аргументом**,
а y – **зависимой переменной** или **функцией**.

$$y = f(x)$$

Область определения и множество значений функции

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Обозначается **$D(y)$**

Множество значений (или область значений) функции – это множество всех значений переменной y .

Обозначается **$E(y)$**

Способы задания функции:

- **аналитический** (с помощью формулы);
- **графический** (с помощью графика);
- **табличный** (с помощью таблицы значений);
- **словесный** (правило задания функции описывается словами).

Свойства функций:

МОНОТОННОСТЬ

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на множестве X , если для любых двух элементов из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется условие **$f(x_1) < f(x_2)$** .

(Функцию называют **возрастающей**, если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции)

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на множестве X , если для любых двух элементов из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется условие **$f(x_1) > f(x_2)$** .

(Функцию называют **убывающей**, если **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции)

Свойства функций:

ограниченность

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве X , если существует число **m** , такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство **$f(x) > m$** .

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве X , если существует число **M** , такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство **$f(x) < M$** .

Если функция ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной**

Свойства функций:

наибольшее и наименьшее значения

функции

Число m называют **наименьшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве X , если:
существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$;
для любого значения $x \in X$ выполняется
неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Число M называют **наибольшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве X , если:
существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$;
для любого значения $x \in X$ выполняется
неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Свойства функций:

ЧЕТНОСТЬ ИЛИ НЕЧЕТНОСТЬ

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство **$f(-x) = f(x)$** .

График **четной** функции симметричен относительно **оси ординат**.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство **$f(-x) = -f(x)$** .

График **нечетной** функции симметричен относительно **начала координат**.

Свойства функций:

ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

Точку x_0 называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точку x_0 называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Точки максимума и минимума объединяют общим названием – **точки экстремума**

Свойства функций:

периодичность

Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет **период T** , если для любого $x \in X$ выполняется равенство

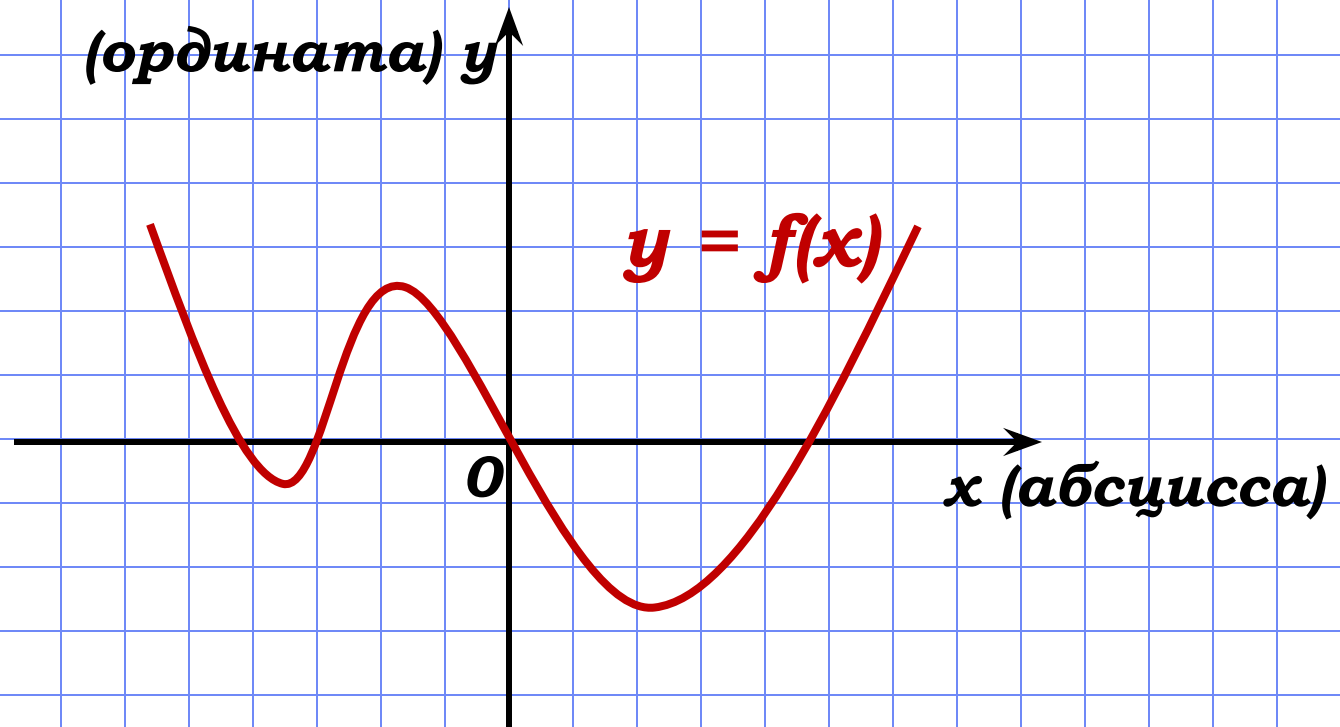
$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$


Функцию, имеющую отличный от нуля период называют **периодической**.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T , то любое число, кратное T (т.е. число вида kT , $k \in \mathbb{Z}$), также является ее периодом.

График функции

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости $(x; y(x))$, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.





Основные элементарные функции, их свойства и графики

Линейная функция $y=kx+b$

Свойства линейной функции $y = kx + b$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3. Если $b = 0$, то функция *нечетная*.

4. а) Нули функции: $(-b/k; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; b)$.

5. а) *возрастает*, если $k > 0$;

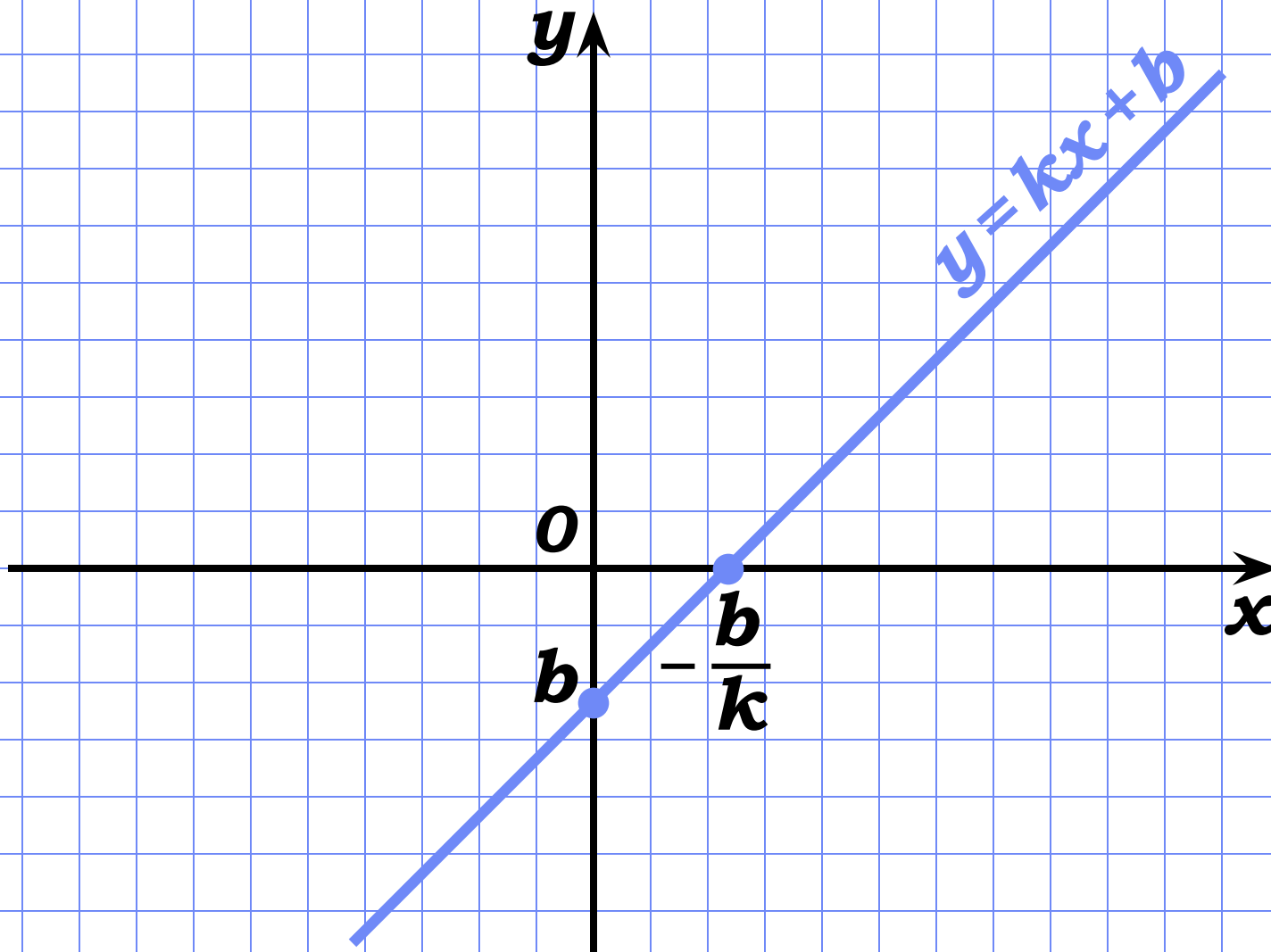
б) *убывает*, если $k < 0$.

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Линейная функция $y=kx+b$



Обратная

$$y = \frac{k}{x}$$

пропорциональность

Свойства функции $y = k/x$:

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Функция нечетная.

4. а) Нули функции: *нет*;

б) точка пересечения с Oy : *нет*.

4. а) если $k < 0$, то $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ – промежутки *возрастания* функции;

б) если $k > 0$, то $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ – промежутки *убывания* функции.

5. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

6. *Нет* ни наибольшего, ни наименьшего значений.

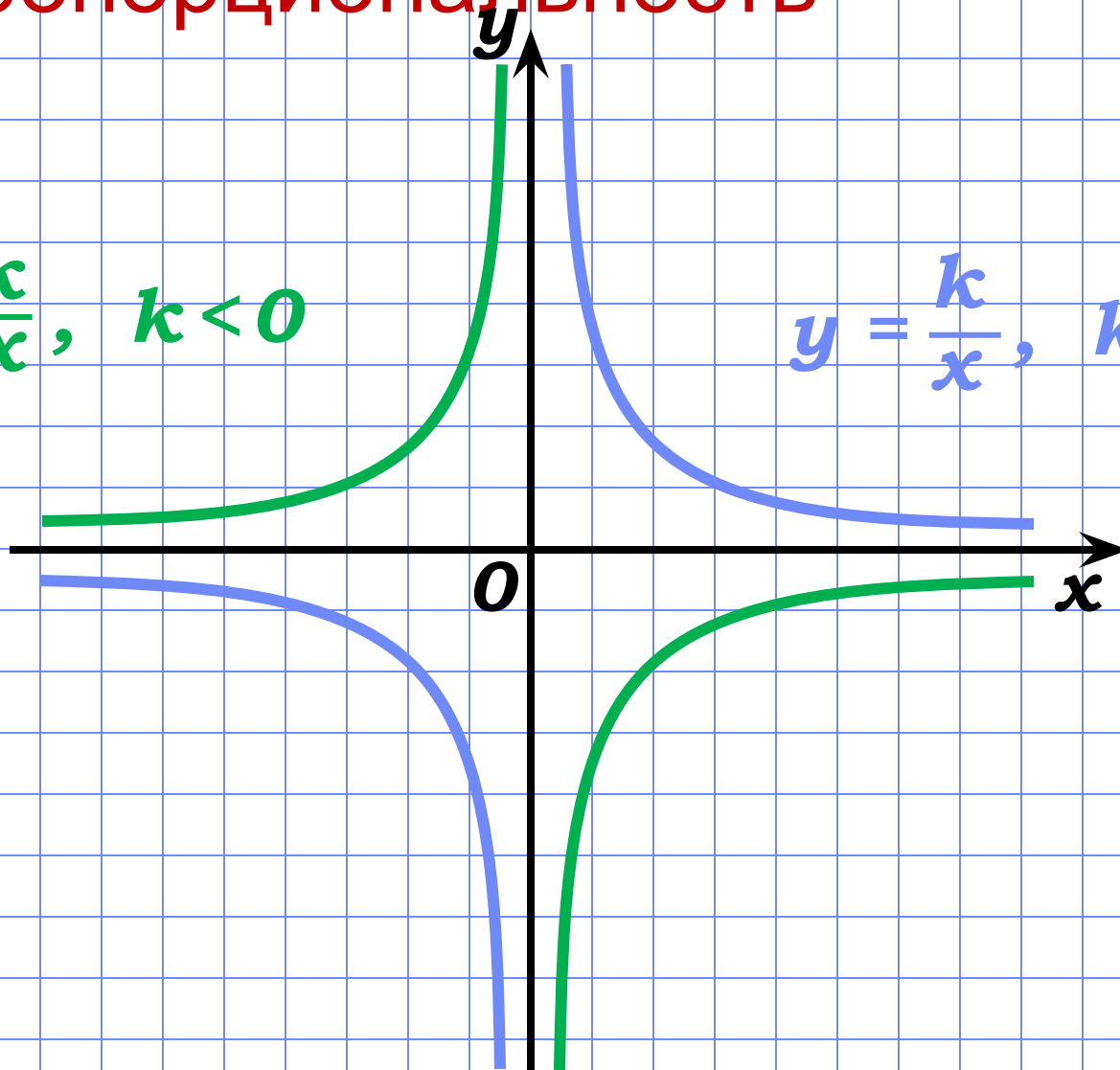
7. Функция непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}, k < 0$$

$$y = \frac{k}{x}, k > 0$$



Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = [0; +\infty)$.

3. Функция *четная*.

4. а) Нули функции: $(0; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.

5. а) $[0; +\infty)$ – промежуток *возрастания* функции;

б) $(-\infty; 0]$ – промежуток *убывания* функции.

6. *Ограничена снизу, не ограничена сверху.*

7. а) $y_{\text{наим.}} = 0$;

б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.

8. Непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

9. *Выпукла вниз.*

Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty; 0]$.

3. Функция *четная*.

4. а) Нули функции: $(0; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.

5. а) $[0; +\infty)$ – промежуток *убывания* функции;

б) $(-\infty; 0]$ – промежуток *возрастания* функции.

6. *Ограничена сверху, не ограничена снизу.*

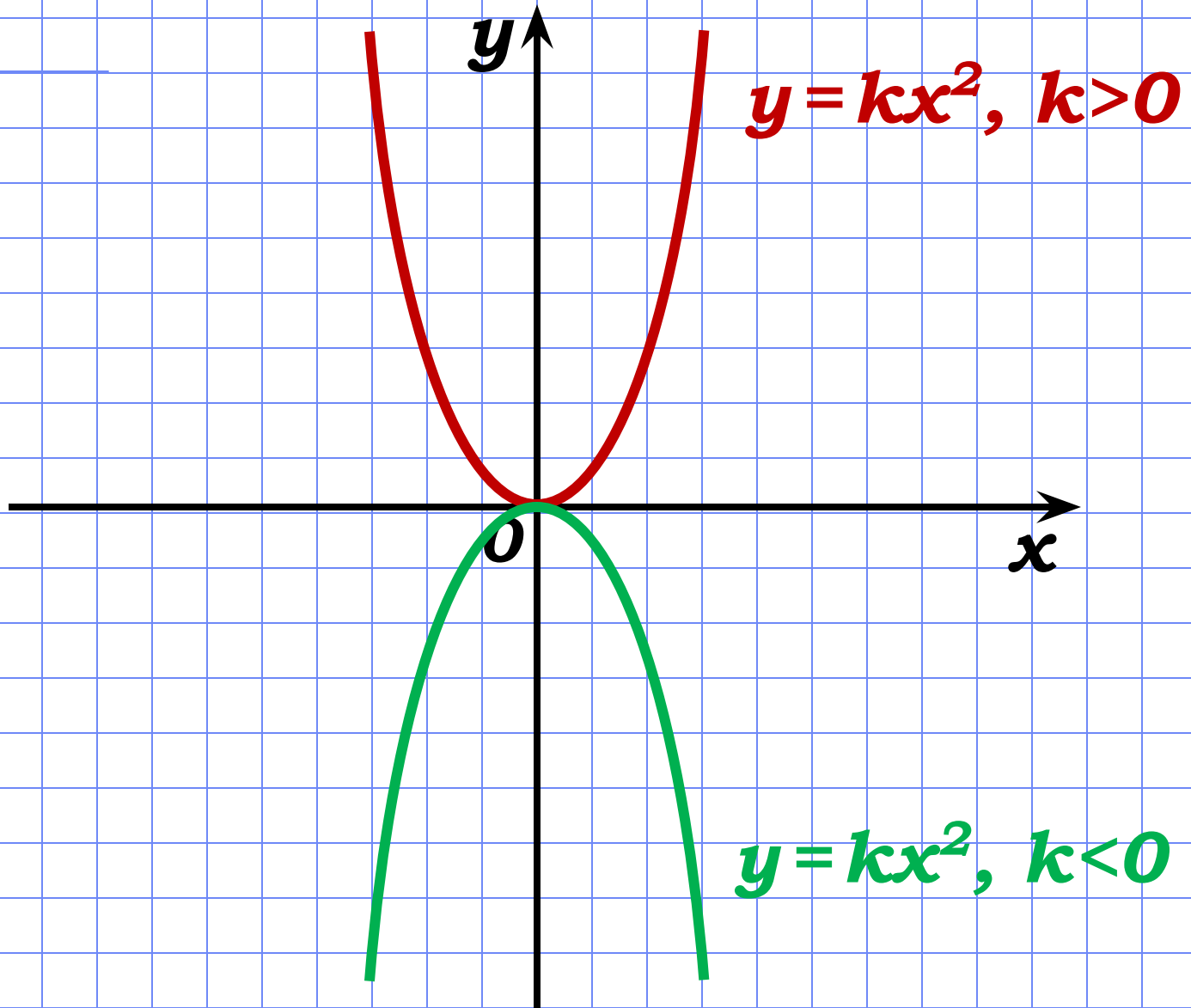
7. а) $y_{\text{наиб.}} = 0$;

б) $y_{\text{наим.}}$ – не существует.

8. Непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

9. Выпукла вверх.

Квадратичная функция $y=kx^2$

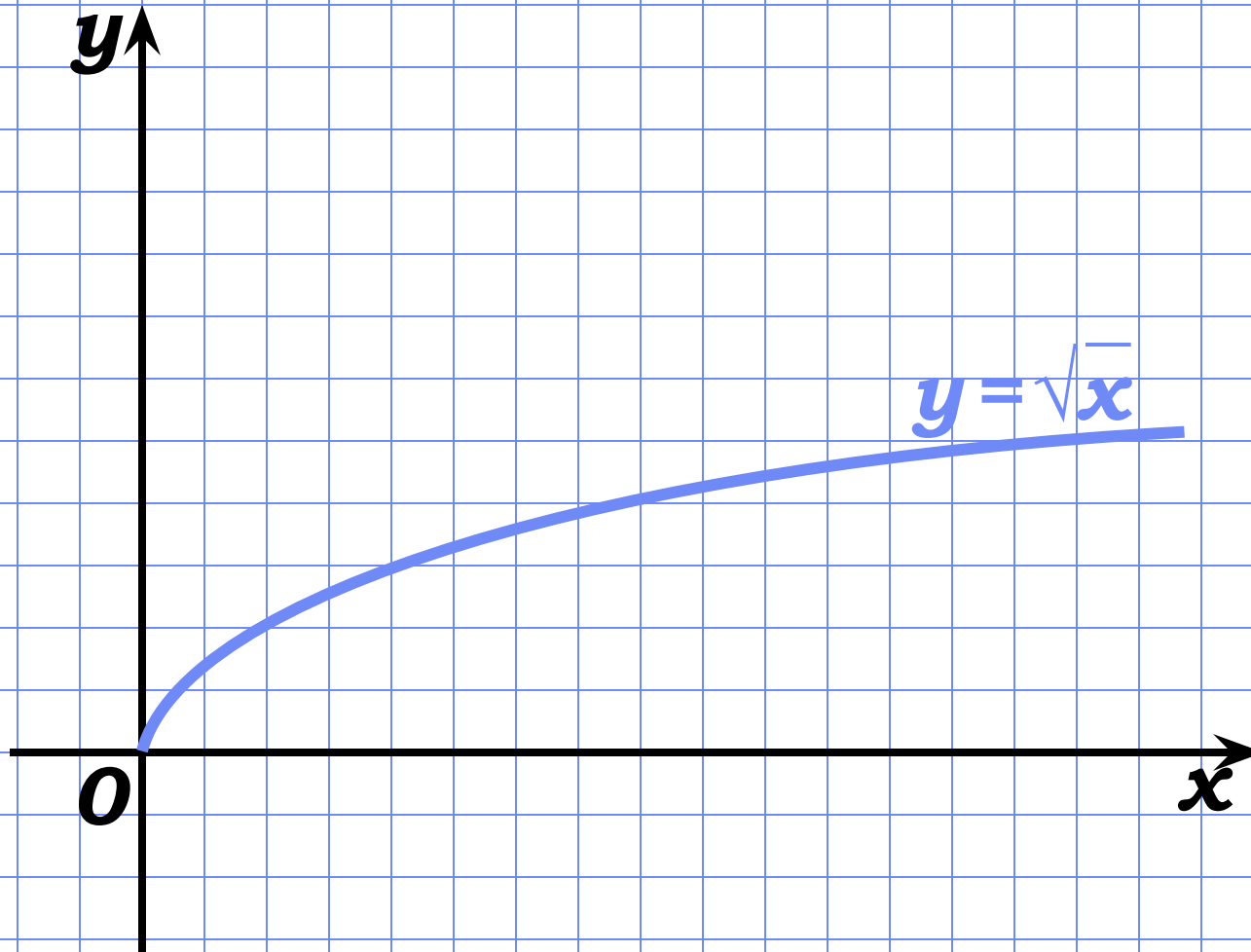


Степенная функция $y = \sqrt{x}$

Свойства функции $y = \sqrt{x}$:

1. $D(f) = [0; +\infty)$.
2. $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$;
б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции.
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{\text{наим.}} = 0$;
б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенная функция $y = \sqrt{x}$



Кубическая функция $y=x^3$

Свойства кубической функции $y = x^3$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3. Функция *нечетная*.

4. а) Нули функции: $(0; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.

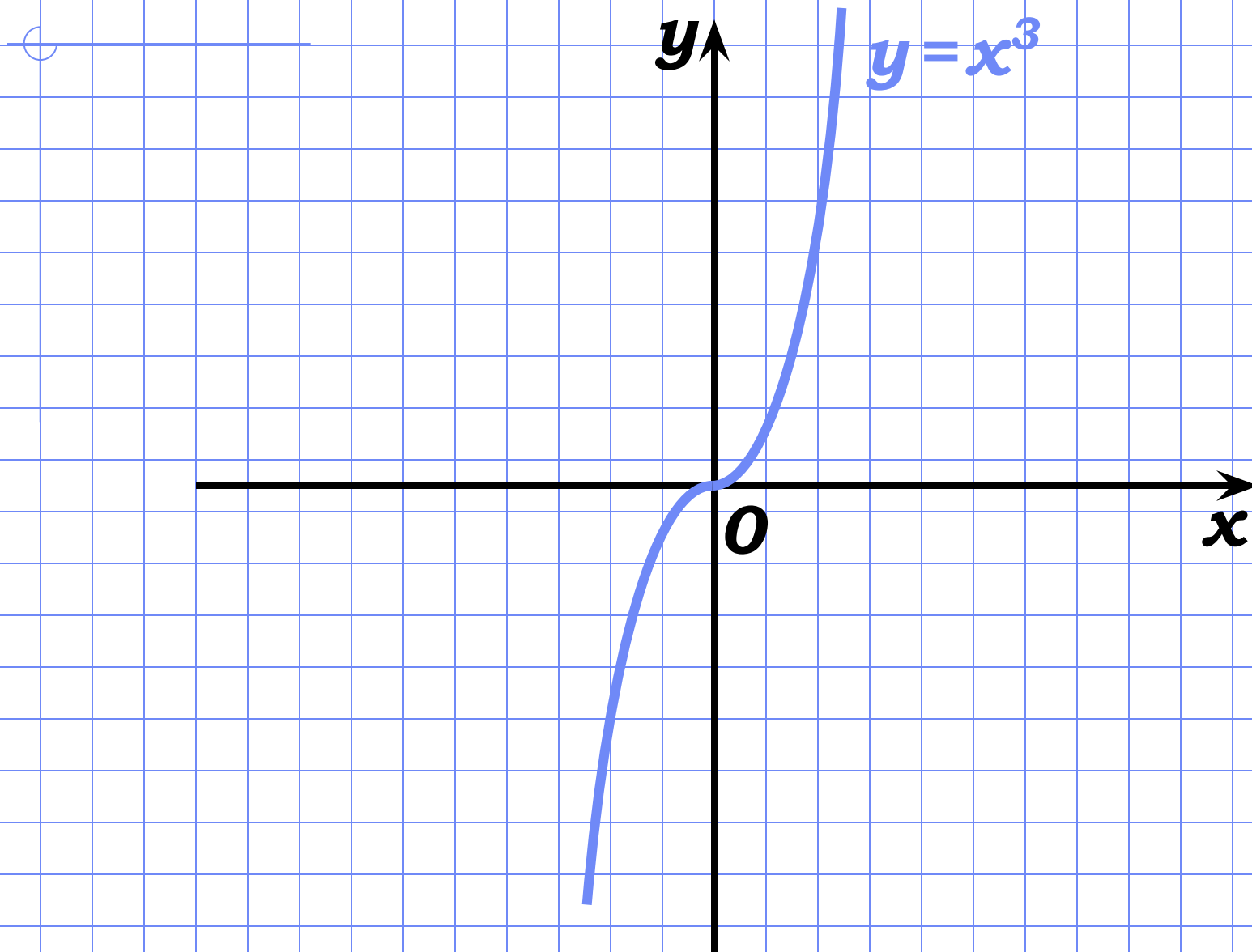
5. *Возрастает* на множестве $(-\infty; +\infty)$.

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Кубическая функция $y=x^3$



Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$:

1. $D(f) = [0; +\infty)$.

2. $E(f) = [0; +\infty)$.

3. Функция ни четная, ни нечетная.

4. а) Нули функции: $(0; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.

5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции.

6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.

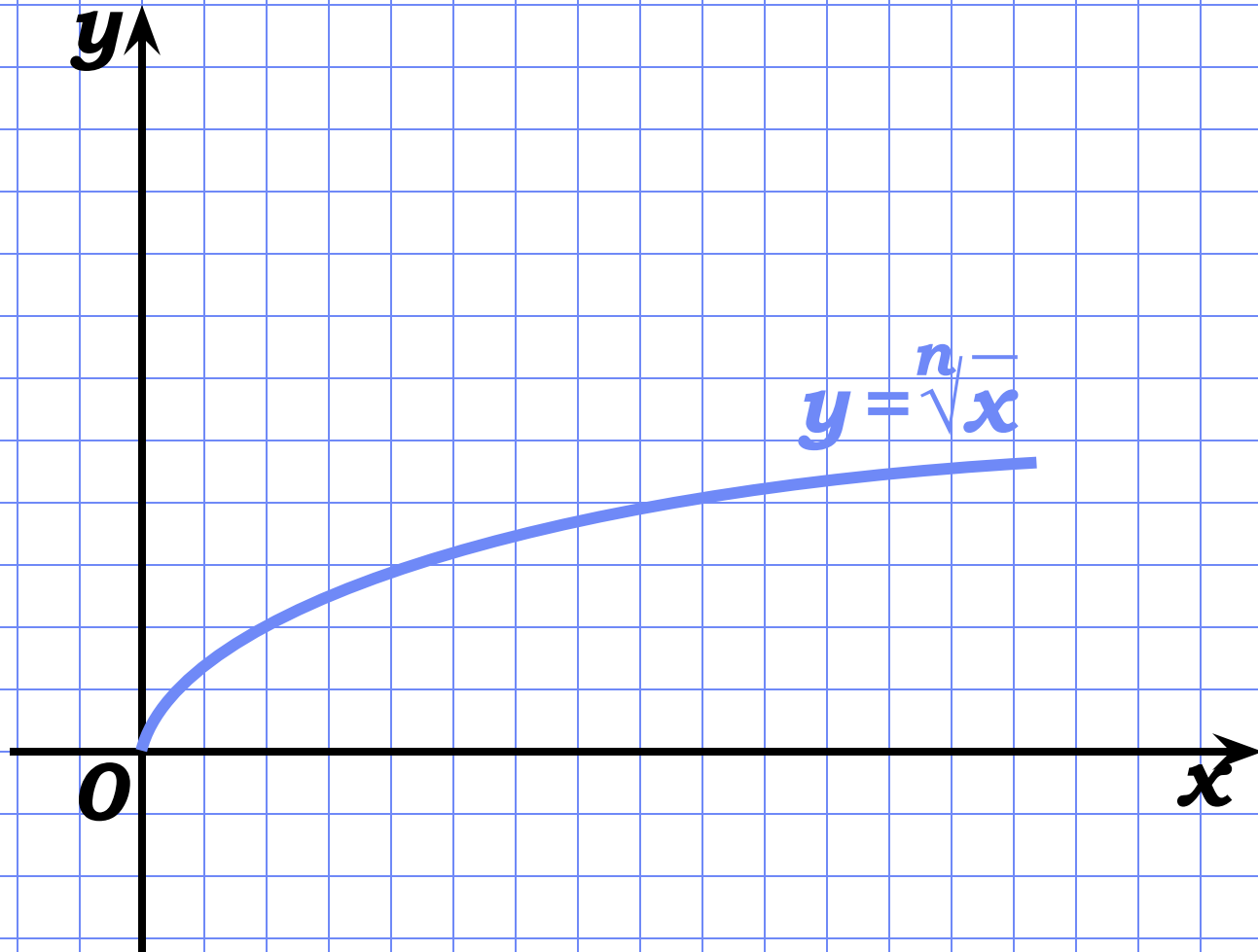
7. а) $y_{\text{наим.}} = 0$;

б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.

8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.

9. Выпукла вверх.

Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$



Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$,

n - нечетное

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 2k+1$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3. Функция *нечетная*.

4. а) Нули функции: $(0; 0)$;

б) точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.

5. *Возрастает* на множестве $(-\infty; +\infty)$.

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$,

n - нечетное

