

Дискретная математика

Введение

Периоды развития математики

В истории цивилизации можно выделить три крупных периода:

- **сельскохозяйственный, или аграрный** — до XVII в.;
- **индустриальный** — с XVII по XX в.;
- **информационный** — с XX в.

Эти периоды определялись научно-техническими революциями и, следовательно, характером тех систем и явлений природы, которые вовлекались в сферу главных производственных интересов и потребностей людей. В каждый период создавались новые технологии производства, новая картина реального мира, новые системы знаний (науки) и, в частности, новая математика.

Периоды развития математики



Новый период развития математики

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов.

Фундаментом дискретной математики являются:

- Теория множеств;
- Математическая логика;
- Теория графов;
- Теория кодирования;
- Теория автоматов.

Новый период развития математики

Стимулы развития дискретной математики:

- растущий поток информации и проблемы ее передачи, обработки и хранения привели к возникновению и развитию **теории кодирования**;
- различные экономические задачи, задачи электротехники стимулировали создание и развитие **теории графов**;
- связь релейно-контактных схем с формулами алгебры логики и их использование для описания функционирования автоматов дали начало развитию и применению **математической логики** и **теории автоматов**.

Обозначения

Кванторы:

- Квантор общности: \forall - «любой», «всякий», «каждый»;
- Квантор существования: \exists - «существует», «найдется», «можно найти»;
- \Leftrightarrow «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»;
- \Rightarrow «следует», «выполняется»;
- $:$ или $|$ «такой, что»

• Пример:

$$(\forall x \in M) (\exists y \in N: y < x)$$

«для любого x из множества M существует y из множества N такой что y меньше, чем x »

Дискретная математика

Теория множеств

Основные понятия

*«Под многообразием, или **множеством**, я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, то есть всякую **совокупность определённых элементов**, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона...»*

Георг Кантор

Основные понятия



Георг Кантор (1845-1918)

Понятие **множества** является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором.

Множество, элементы множества – первичные базисные неопределяемые понятия, на которых строится теория множеств.

Объекты, составляющие множество, называются **элементами множества**.

Пустое множество

Примеры множеств:

- *Множество решений уравнения;*
- *Множество студентов в группе;*
- *Множество предметов мебели в кабинете;*
- *Множество натуральных чисел.*

Среди множеств выделяют особое множество - **пустое множество**. **Пустое множество** - множество, не содержащее ни одного элемента. \emptyset

Примеры неочевидных пустых множеств:

- множество четырехугольников, все углы которых прямые и одновременно диагонали различной длины.
- Множество решений уравнения $x^2 - 17x + 73 = 0$ ($D < 0$)
- Множество чудовищ озера Лох-Несс...

Универсальное множество

Множество U , содержащее все возможные элементы, обладающие некоторым признаком, называется **универсальным** (универсумом).

Пример:

В математическом анализе:

- Все действительные числа.
- Все непрерывные функции на отрезке.

В алгебре:

- Все определители второго порядка,
- Все трехмерные векторы

Основные понятия

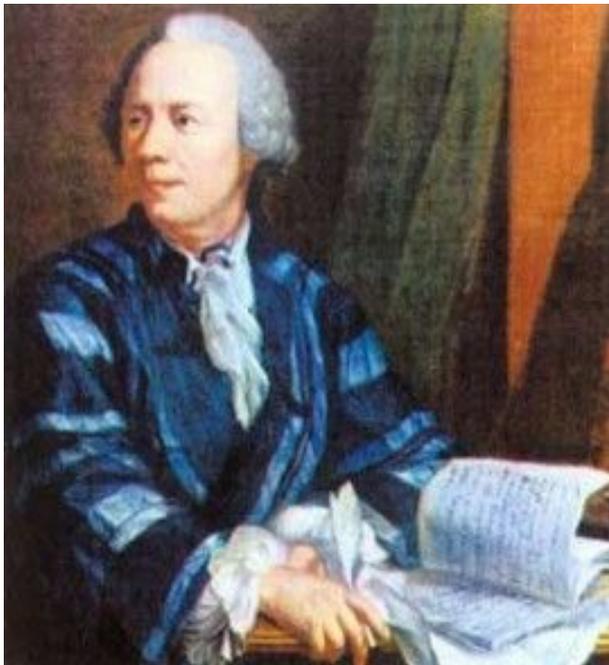
Множества обозначают большими буквами латинского алфавита. Элементы множества – строчными буквами.

$a \in M$  { «элемент, а принадлежит множеству M»
«а является элементом множества M»
«элемент, а содержится во множестве M».

$a \notin M$  «элемент а не принадлежит множеству M»

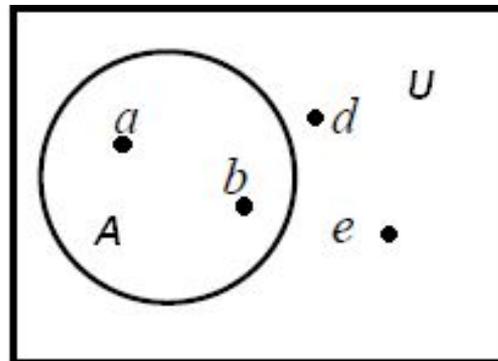
Диаграммы Эйлера-Венна

Множества удобно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна).



Леонард Эйлер
(1707 – 1783г.)

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств, где множества изображаются в виде совокупностей точек на плоскости ограниченных некоторой замкнутой кривой, а универсум – в виде большого прямоугольника.



$a, b \in A$
 $d, e \notin A$

Равные множества

Определение равенства множеств 1.

Два множества называются **равными** ($A=B$) в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

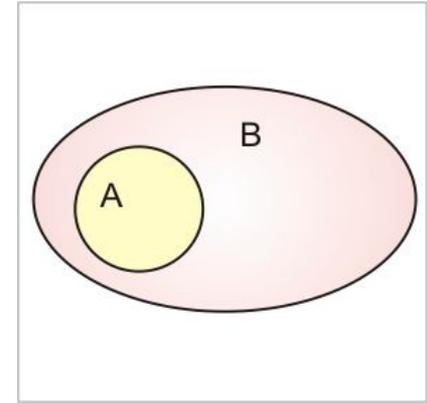
Примеры:

- Множества решений уравнений $4x-8=16$ и $x/15=2/5$ равны, так как их решением является одно и то же число 6.
- Равны множества букв, из которых составлены слова «навес» и «весна».

Подмножество

Множество A называют **подмножеством** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент множества A является элементом множества B :

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$



Множество A называется **собственным подмножеством** множества B , если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Обозначение: $A \subset B$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Все рассматриваемые в задаче множества являются подмножествами универсального множества.

Равные множества

Определение равенства множеств 2.

Множества A и B **равны** ($A=B$) тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$, и $B \subseteq A$, т. е. элементы множеств A и B совпадают.

Булеан множества

Булеаном множества M называется множество $\beta(M)$, элементами которого являются все возможные подмножества множества M .

Конечные и бесконечные

Множество, состоящее из конечного числа элементов называется **конечным** множеством.

Бесконечное множество- непустое множество, не являющееся конечным.

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Обозначение: $|A|$, $|B|$.

$$|\emptyset| = 0$$

Способы задания множеств

Множества могут быть заданы

- списком;
- порождающей процедурой;
- описанием характеристических свойств элементов;
- графическим представлением.

Способы задания множеств

1. Задание *множеств* **СПИСКОМ** предполагает перечисление элементов.

Например:

- множество A состоит из букв a, b, c, d . Обозначается: $A = \{a, b, c, d\}$
- множество N включает цифры $0, 2, 3, 4$ $\rightarrow N = \{0, 2, 3, 4\}$

2. Задание множества **описанием характеристических свойств** элементов: $X = \{x \mid H(x)\}$, т. е. множество X содержит такие элементы x , которые обладают свойством $H(x)$.

Например:

- $V = \{b \mid b = \pi/2 \pm k\pi, k \in \mathbb{N}\}$, где \mathbb{N} - множество всех натуральных чисел;
- M_2^n - это множество чисел, являющихся степенями двойки или $M_2^n = \{m \mid m = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$, где \mathbb{N} - множество всех натуральных чисел.
- $C = A + B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Способы задания множеств

3. Задание *множеств* **порождающей процедурой**, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов.

Например:

a) (1) $5 \in M$;

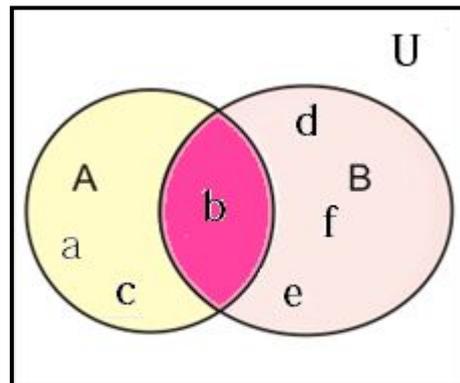
(2) если $a \in M$, то $1/a \in M$;

(3) если $a \in M$, то $(1-a) \in M$.

b) (1) $1 \in \mathbb{N}$; (2) если $n \in \mathbb{N}$, то $n+1 \in \mathbb{N}$.

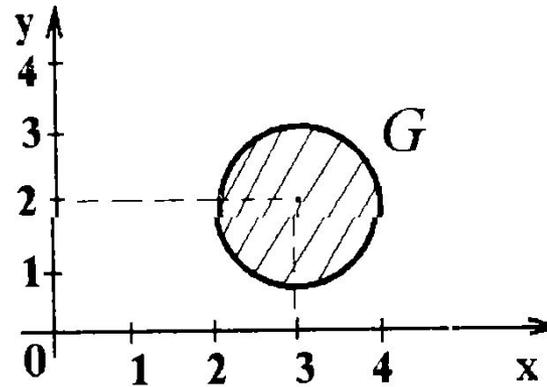
4. Графическое задание множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Например,

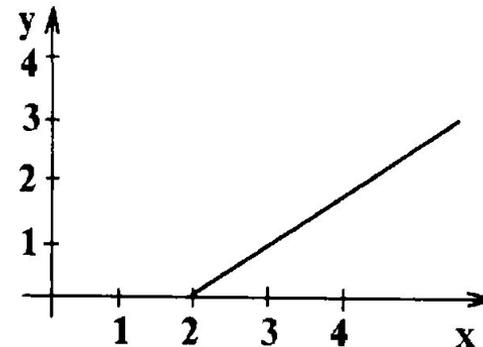


Следовательно, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e, f\}$

Пример 1. Пусть G – множество всех пар действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих соотношению $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$.



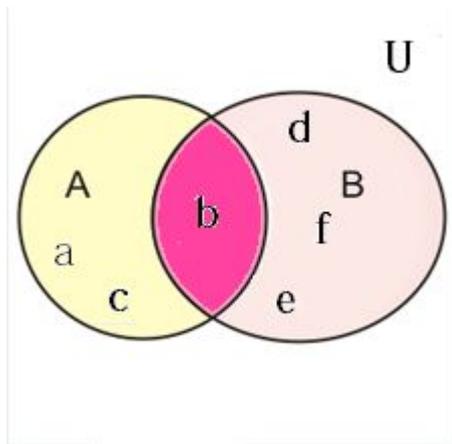
Пример 2. Пусть G – множество точек прямой линии, удовлетворяющей соотношению $x - 2 = y$ при $x, y \geq 0$



Способы задания множеств

3. Задание *множеств порождающей процедурой*, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов.
- Например:
 - а) $2 \in M_{2n}$; б) если $m \in M_{2n}$, то $2m \in M_{2n}$.
 - а) $1 \in N$; б) если $n \in N$, то $n+1 \in N$.
4. Графическое задание множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Например,



Следовательно, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e, f\}$

Способы задания множеств

1. Задайте списком множество:
 - 1) букв в слове «алгебра»;
 - 2) четных однозначных натуральных чисел;
 - 3) нечетных однозначных натуральных чисел;
 - 4) однозначных простых чисел.

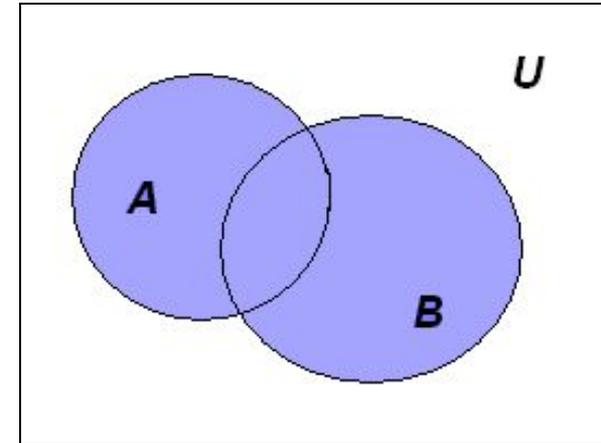
2. Запишите множество описанием характеристических свойств :
 - а) натуральных делителей числа 12;
 - б) натуральных делителей числа 30;
 - в) целых делителей числа 6;
 - г) простых делителей числа 12.

Способы задания множеств

3. По какому характеристическому свойству записаны такие множества:
- {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};
 - {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь};
 - {до, ре, ми, фа, соль, ля, си};
 - {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
4. A — множество четных натуральных чисел, расположенных между числами 25 и 35. Задайте это множество списком, характеристическим свойством, порождающей процедурой.

Операции над множествами

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

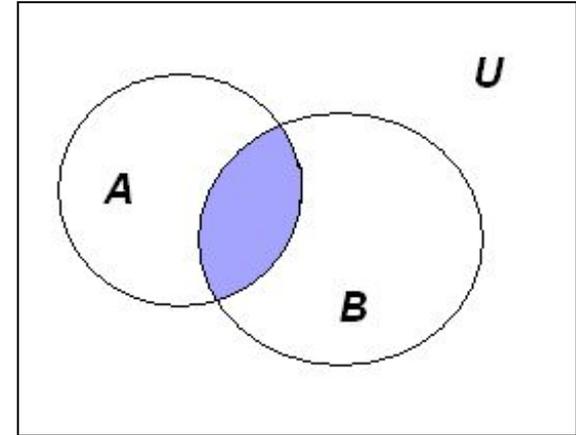
Пример. $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Пример. Даны два множества $A = \{1,2,4,6\}$
 $B = \{0,3,4,6\}$. Найти $C = A \cup B$.

$$C = \{0,1,2,3,4,6\}$$

Операции над множествами

Пересечением множеств A и B называется множество $(A \cap B)$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.



Пример. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

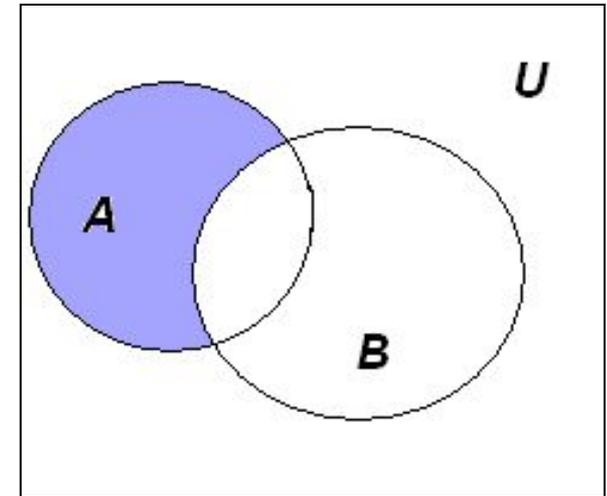
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Пример. Даны два множества $A = \{1,2,4,6\}$ $B = \{0,3,4,6\}$. Найти $C = A \cap B$.

$$C = \{4,6\}$$

Операции над множествами

Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) называется множество всех элементов множества A , которые не содержатся в B .



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Пример. $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$.

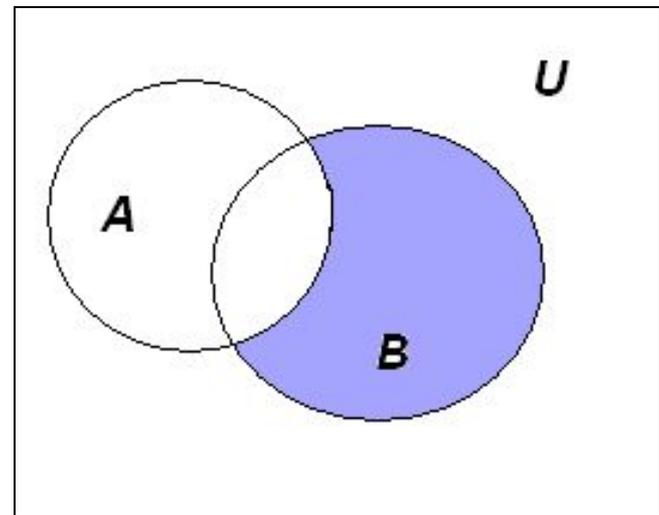
Пример. Даны два множества

$A = \{1,2,4,6\}$ и $B = \{0,3,4,6\}$. Найти $C = A \setminus B$.

$$C = \{1,2\}$$

Операции над множествами

Разностью множеств **B** и **A** ($B \setminus A$) называется множество всех элементов множества **B**, которые не содержатся в **A**.



Пример. $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$.

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$$

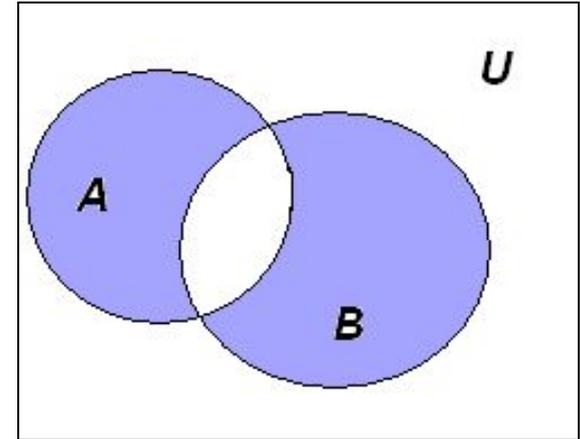
Пример. Даны два множества

$A = \{1,2,4,6\}$ и $B = \{0,3,4,6\}$. Найти $C = B \setminus A$.

$$C = \{0,3\}$$

Операции над множествами

Симметрической разностью множеств A и B ($A \Delta B$ или $A \oplus B$) называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: либо A , либо B , но не являются общими элементами.



$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B); \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Тогда $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 6, 7\}$.

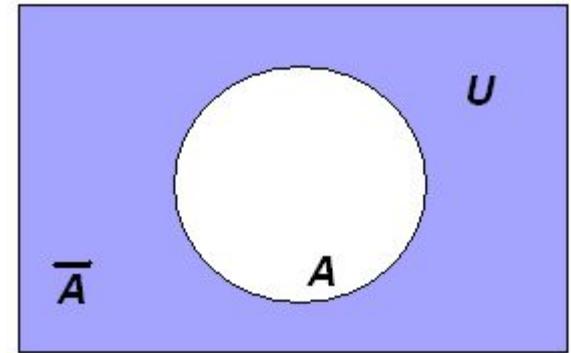
Пример. Даны два множества: $A = \{1, 2, 4, 6\}$ и $B = \{0, 3, 4, 6\}$. Найти $C = A \Delta B$.

$$\begin{aligned} C &= (\{1, 2, 4, 6\} \cup \{0, 3, 4, 6\}) \setminus (\{1, 2, 4, 6\} \cap \{0, 3, 4, 6\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\} \setminus \{4, 6\} \\ &= \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Операции над множествами

Дополнением

(до универсального множества) множества A (\bar{A}) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A , но принадлежащих универсальному множеству.



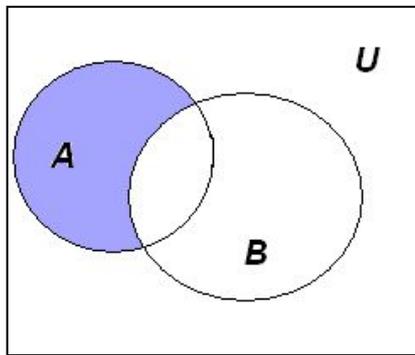
$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A \text{ и } x \in U\}$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

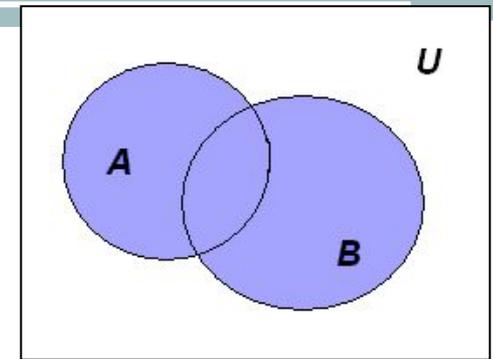
Тогда $\bar{A} = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 4, 5\} = \{3, 6, 7\}$

Пример. Пусть $A = \{a, d, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Найти \bar{A} .

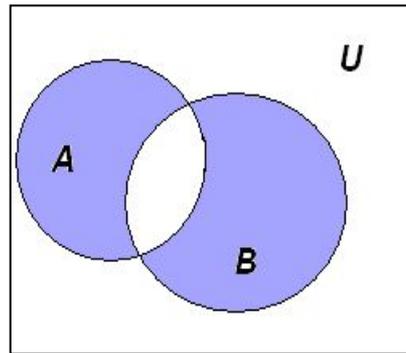
$$\bar{A} = \{a, b, c, d, e, f\} \setminus \{a, d, f\} = \{b, c, e\}$$



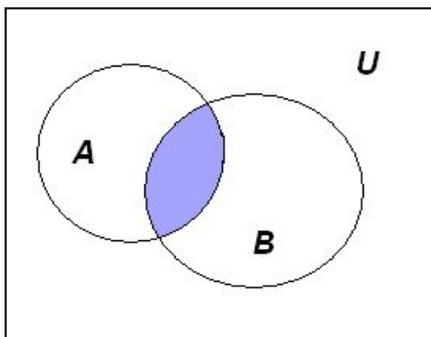
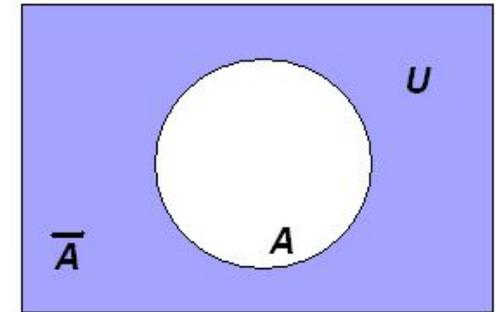
$$A \cap B = \{x | x \in A \ \& \ x \in B\}$$



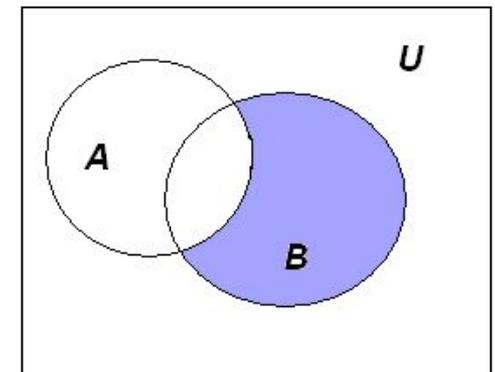
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$$A \setminus B = \{x | x \in A \ \& \ x \notin B\}$$



Операции над множествами

Кортежем длины n (n -кой) называется упорядоченная последовательность из n элементов. Элемент, занимающий первое место, называется *первой компонентой n -ки*, элемент, занимающий второе место, называется *второй компонентой n -ки* и т.д. Обозначение: (a_1, a_2, \dots, a_n) или $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Кортеж длины 2 называют **двойкой** или **парой**.

Прямым произведением двух множеств A и B называется множество всевозможных пар (a,b) , таких, что: $a \in A, b \in B$. Символическая запись:

$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$$

Пример: $A = \{a, b\}; B = \{1, 2\}; A \times B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$.

$$B \times A = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}.$$

Операции над множествами

1. Известно, что $M = \{1;2;5\}$, $N = \{1;4;5;7;9\}$, $K = \{4;7;9\}$.

Найдите:

- 1) пересечение M и N ;
- 2) пересечение M и K ;
- 3) пересечение N и K ;
- 4) объединение M и K ;
- 5) объединение N и K ;
- 6) разность M и N ;
- 7) разность M и K ;
- 8) разность N и K ;
- 9) дополнение K до N ;
- 10) дополнение M , N , K до универсума, если U – все цифры.
- 11) Прямое произведение K и N , N и K ;
- 12) Симметрическую разность M и K , M и N , \overline{K} и N

Операции над множествами

1. Дано:
 $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{3, 4\}$

Найти: $A \times B$, $B \times A$, $(A \times B) \cap (B \times A)$

Решение:

По определению прямого произведения:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(3, 3)\}$$

Операции над множествами

2. Найти булеан множества $M=\{a,b,c\}$.

$$\beta(M)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

3. Найти булеан множества $M=\{1,3,5,7\}$

$$\beta(M)=\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{1,3,5\}, \{1,3,7\}, \{1,5,7\}, \{3,5,7\}, \{1,3,5,7\}\}$$

4. Объясните, почему выполняется равенство:

$$1) A \cup \emptyset = A ; 2) A \cup A = A ; 3) A \cap \emptyset = \emptyset ; 4) A \cap A = A.$$

Домашнее задание

1. Дано: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 7\}$.
Найти: а) $A \cup C$; б) $B \setminus (C \Delta \bar{A})$; в) $A \times B$;
г) $(C \cup B) \cap (A \setminus B)$; д) $\overline{(A \cap B)} \setminus C$.
2. Выписать булеан множества A , если A – множество нечетных однозначных чисел.

Свойства операций над множествами

Пусть U — универсальное множество; A, B, C — его подмножества. Тогда имеют место следующие тождественные равенства:

$$1. \left. \begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ассоциативность объединения и} \\ \text{пересечения} \end{array}$$

$$2. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Дистрибутивность объединения} \\ \leftarrow \text{относительно пересечения} \\ \leftarrow \text{Дистрибутивность пересечения} \\ \leftarrow \text{относительно объединения} \end{array}$$

$$3. \left. \begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \right\} \text{коммутативность объединения и пересечения}$$

Свойства операций над множествами

4. $A \cap A = A,$
 $A \cup A = A.$ } Идемпотентность объединения и пересечения

5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ } законы де Моргана

6. $A \cup (A \cap B) = A$
 $\bar{A} \cap (A \cup B) = \bar{A}$ } тождества поглощения

7. $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$ } Свойства пустого множества.

$A \cap U = A$
 $A \cup U = U$
 $\bar{A} \cup \bar{A} = \bar{A}$ } Свойства универсума

$$\bar{\emptyset} = U \quad \bar{U} = \emptyset$$

Доказательства

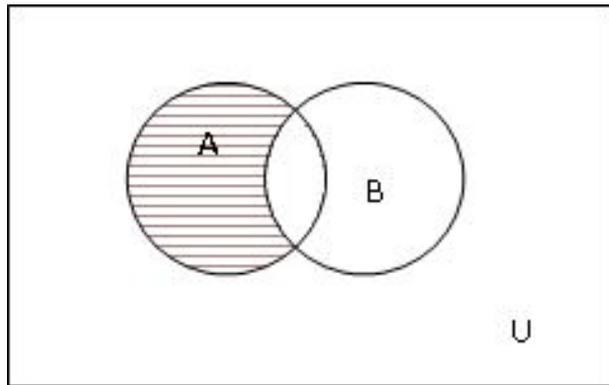
Доказательства используются в любой аксиоматической теории, например в любом разделе классической и высшей математики, дискретной математики, в том числе теории множеств и др.

под доказательством будем понимать способ получения (вывод) новых соотношений (знаний) из уже имеющихся путем корректных преобразований, гарантирующих получение истинных знаний в той мере, в какой можно гарантировать истинность исходных знаний.

Доказательства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Эйлера-Венна

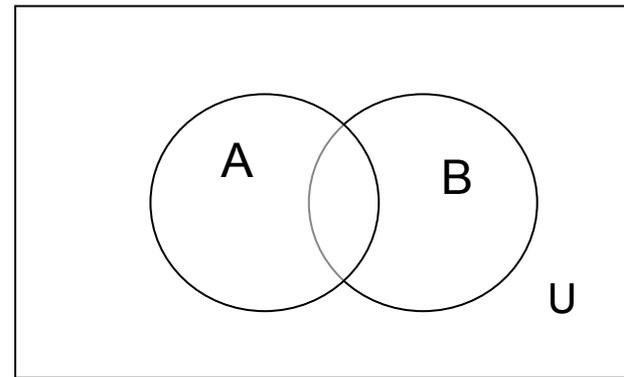
Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера-Венна равенство $A \setminus B = A \cap \bar{B}$



$A \setminus B$

-- $A \setminus B$

=



$A \cap \bar{B}$

A

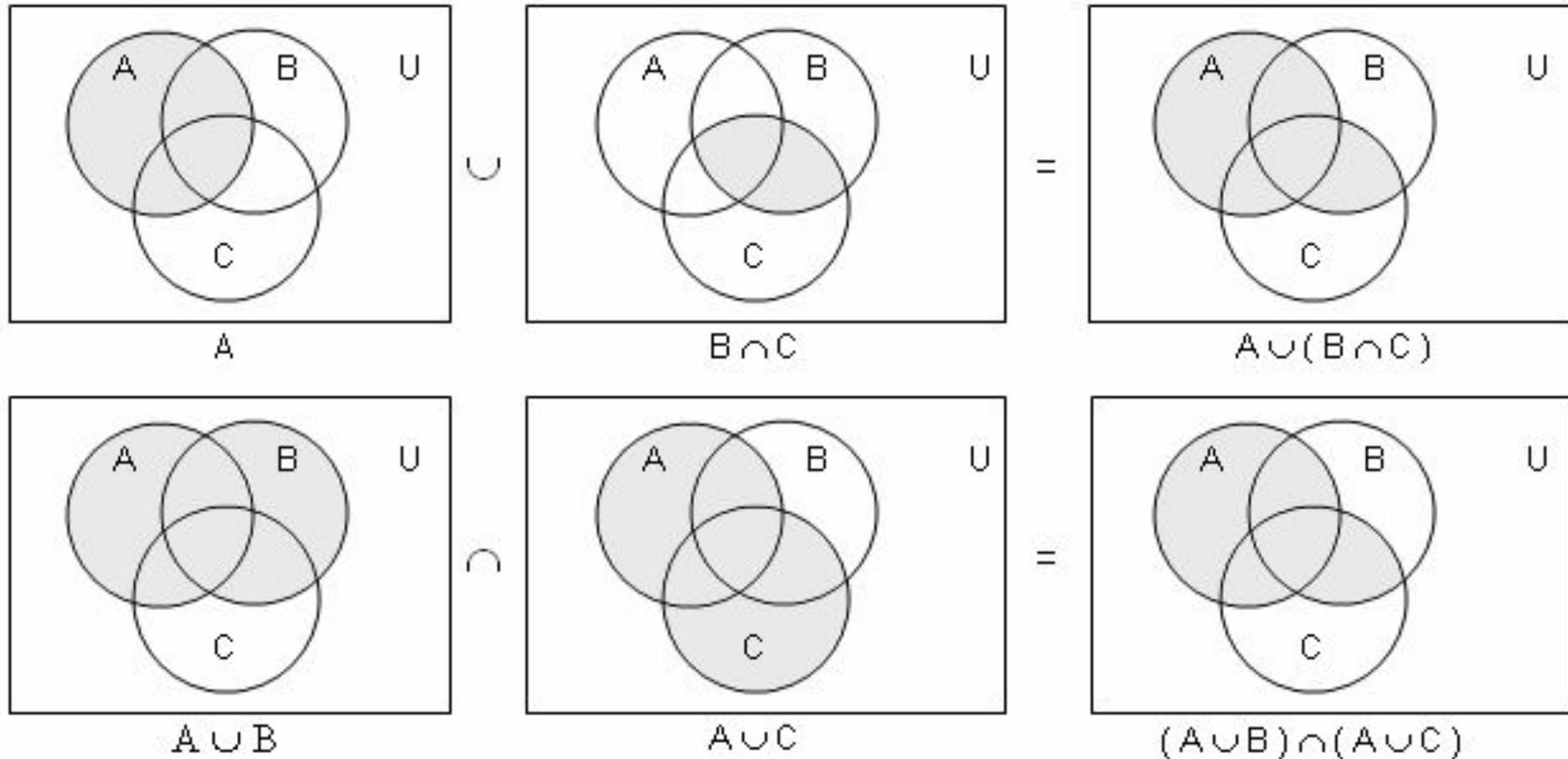
\bar{B}

$A \cap \bar{B}$

Т.к. диаграммы Эйлера-Венна для множества $A \setminus B$ и множества $A \cap \bar{B}$ совпадают, то эти множества равны.

Свойства операций над множествами

- Докажем равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Доказательства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Докажите тождество, используя диаграммы Венна.

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

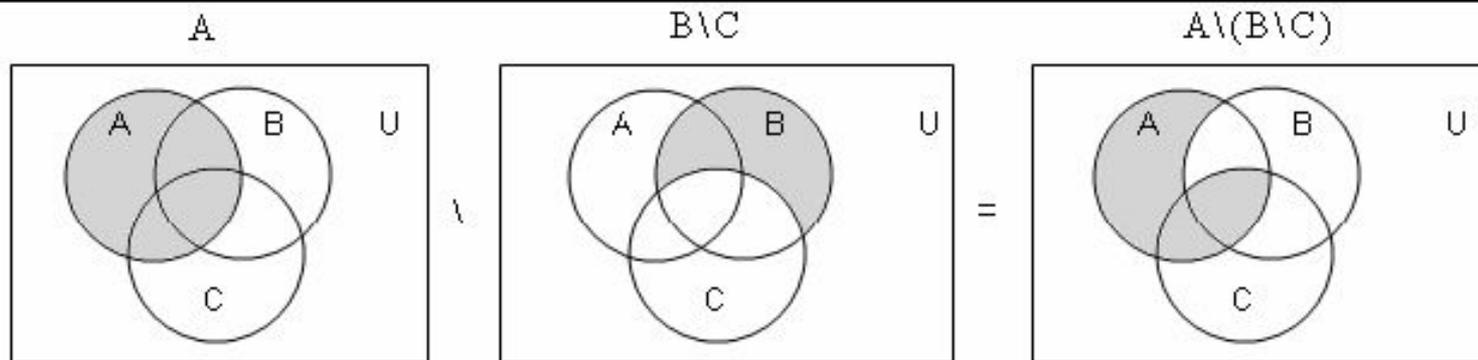


Диаграмма Венна $A \setminus (B \setminus C)$

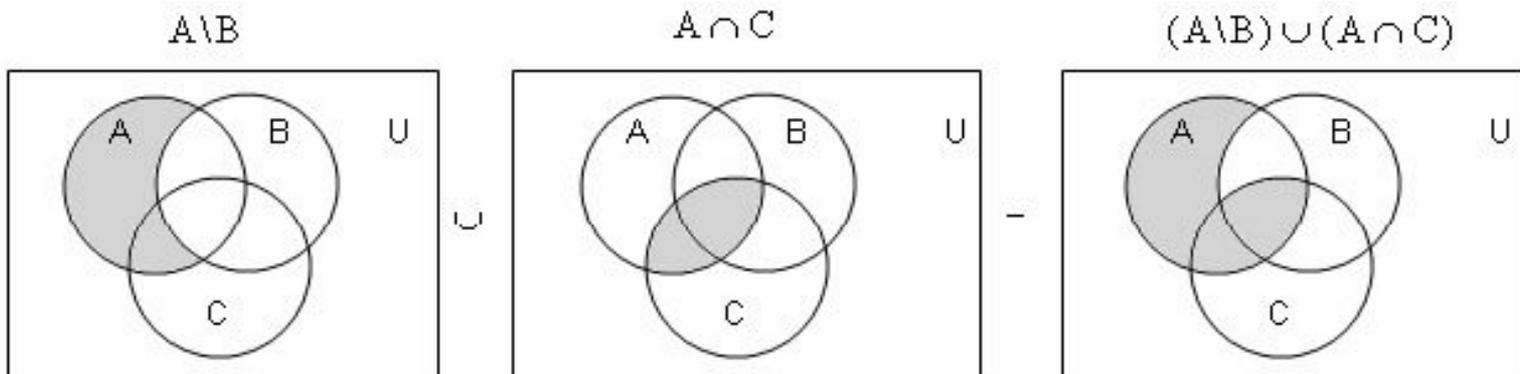
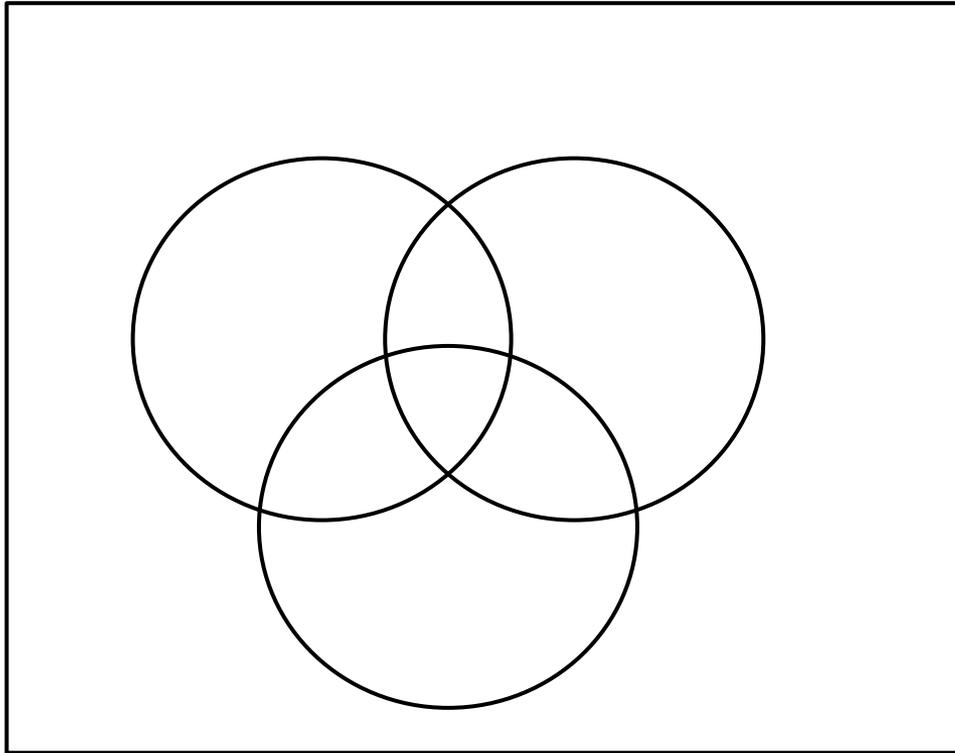


Диаграмма Венна $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Доказать, что:

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,$
4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$
5. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C,$
6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C),$
7. $A \cap B = A \cap (B \setminus A),$
8. $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A,$
9. $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A,$
10. $(\overline{A} \cap B) \cap A = A \cap B,$
11. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C),$
12. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cap (A \cap C),$
13. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \setminus C.$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \setminus C$$



Доказательства (аналитически)

Справедливость законов алгебры множеств доказывается на основе определения равенства: $X = Y$, если

$$1) X \subseteq Y: \forall x \in X \Rightarrow x \in Y;$$

$$2) Y \subseteq X: \forall y \in Y \Rightarrow y \in X.$$

Сформулированный принцип называют **интуитивным принципом объемности**

Для доказательств будем использовать следующие обозначения ($\{$ - и ; $[$ - или) и соотношения :

$$x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

$$x \in A \setminus B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

$$x \notin A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$$

$$x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$$

$$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \bar{B} \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases}$$

Доказательства

Используя отношения принадлежности, доказать тождество
 $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

Пусть $X = (A \Delta B) \setminus C$; $Y = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

$$1) \text{ Если } x \in X \Rightarrow x \in (A \Delta B) \setminus C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Delta B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ x \notin C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array} \right. \\ x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array} \right. \\ x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{array} \right.$$

$$(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).$$

Доказательства

2) Если $y \in Y \Rightarrow y \in (A \setminus C) \Delta (B \setminus C) \Rightarrow$

$$y \in [(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)] \cup [(B \setminus C) \setminus (A \setminus C)] \\ \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \{y \in A \setminus C \\ y \notin B \setminus C\} \\ \\ \{y \in B \setminus C \\ y \notin A \setminus C\} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{y \in A \\ y \notin C\} \\ \{y \in B \\ y \notin C\} \end{array} \right] \text{ И } \left[\begin{array}{l} \{y \notin B \\ y \in C\} \\ \{y \notin A \\ y \in C\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{y \in A \\ y \notin C\} \\ \{y \notin B \\ y \notin A\} \end{array} \right] \text{ ИЛИ } \left[\begin{array}{l} \{y \notin B \\ y \in C\} \\ \{y \notin A \\ y \in C\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{y \in A \\ y \notin B \\ y \notin C\} \\ \{y \notin A \\ y \in B \\ y \notin C\} \end{array} \right]$$

Доказательства

$$\text{Отсюда } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{x \notin B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \in B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \notin B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y \notin A} \\ \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{array} \right.$$

Следовательно тождество верно.

Доказательства

Докажем закон дистрибутивности:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство.

1) Если $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Rightarrow$

$x \in A$ и $(x \in B \text{ или } x \in C) \Rightarrow$

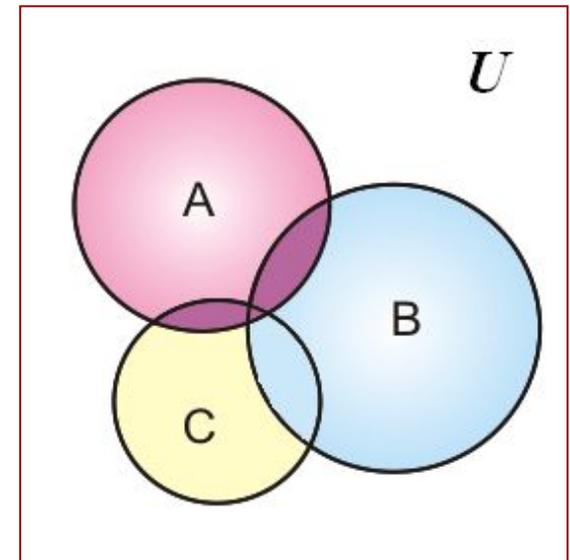
$(x \in A \text{ и } x \in B)$ или $(x \in A \text{ и } x \in C) \Rightarrow$

$(x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) \Rightarrow$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$



$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Доказательства

Докажем включение в обратную сторону:

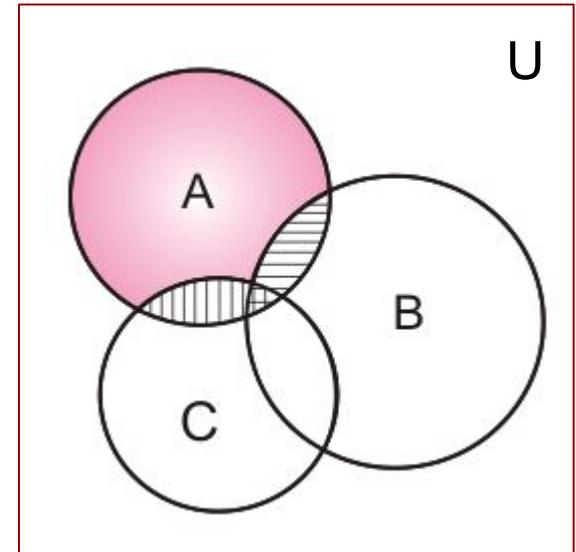
Если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$
 $(x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) \Rightarrow$
 $(x \in A \text{ и } x \in B)$ или $(x \in A \text{ и } x \in C) \Rightarrow$
 $x \in A$ и $(x \in B \text{ или } x \in C) \Rightarrow$
 $x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Так как $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Тест

Вставьте слово или фразу

1. **Пересечением** множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые _____
- A. принадлежат множествам A и B одновременно;
 - B. принадлежат хотя бы одному из множеств A или B ;
 - C. которые принадлежат множеству A , но не содержатся в B ;
 - D. принадлежат одному из множеств: либо A , либо B , но не являются общими элементами.

Вставьте слово или фразу

2. **Разностью** множеств **B** и **A** называется множество всех элементов множества **B**, которые _____
- A. принадлежат множествам **A** и **B** одновременно;
 - B. принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B**;
 - C. не принадлежат множеству **A**, но принадлежат универсальному множеству;
 - D. которые принадлежат множеству **B**, но не содержатся в **A**.

Вставьте слово или фразу

3. **Объединением** множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые _____
- A. принадлежат множествам A и B одновременно;
 - B. принадлежат хотя бы одному из множеств A или B ;
 - C. не принадлежат множеству A , но принадлежат универсальному множеству;
 - D. которые принадлежат множеству A , но не содержатся в B .

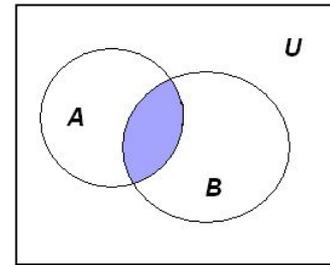
Вставьте слово или фразу

4. **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые _____
- A. принадлежат множествам A и B одновременно;
 - B. принадлежат хотя бы одному из множеств A или B ;
 - C. которые не содержатся в B ;
 - D. принадлежат одному из множеств: либо A , либо B , но не являются общими элементами;

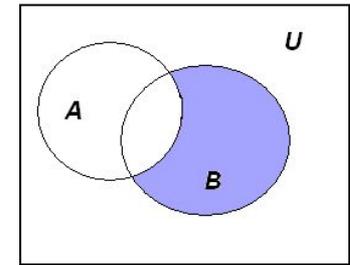
5. Установите соответствие

- A. Объединение
- B. Пересечение
- C. Разность B/A
- D. Симметрическая разность
- E. Разность A/B
- F. Дополнение \bar{A}

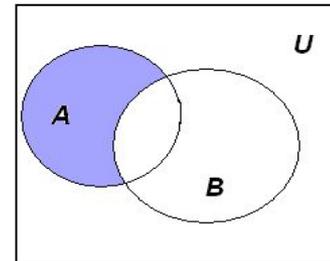
A	
B	
C	
D	
E	
F	



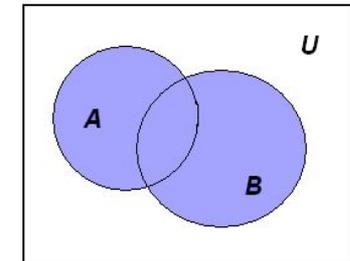
1



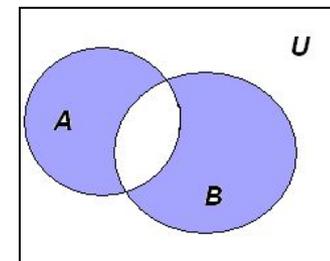
2



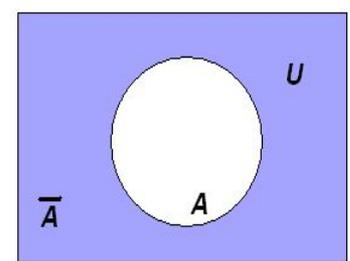
3



4



5



6

6. Выбрать верное утверждение

1 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$

2 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3 $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

7. Заданы множества $X = \{1, 2\}$, $Y = \{0, 2, 3\}$.
Найти множество: $X \cup Y$

Выбрать верный вариант
ответа:

-
- 1 $\{1, 2\}$
- 2 $\{2\}$
- 3 $\{0, 1, 2, 3\}$
-

8.

Какие из приведенных множеств заданы верно?

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 2, 7\}$, M - множество цифр (арабских).

Выбрать верный вариант ответа

-
- 1 верно заданы множества A и B
- 2 верно заданы множества A и M
- 3 верно заданы множества A, B, M
-

9. Даны множества $C = \{a, b, c, d, e\}$ и $D = \{c, a, f\}$.
Найти мощности этих множеств. Является ли множество D
собственным подмножеством множества C ?

Выбрать верный вариант ответа

-
- 1 $|C| = 5$ и $|D| = 2$, да, является
- 2 $|C| = 5$ и $|D| = 3$, нет не является
- 3 $|C| = 5$ и $|D| = 3$, да, является
-

10. Дано множество $S = \{1, 3, 5\}$.

Составить булеан множества и определить его мощность.

Выбрать верный вариант ответа

1 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{3\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$.
 $|S| = 3, |\beta(S)| = 8.$

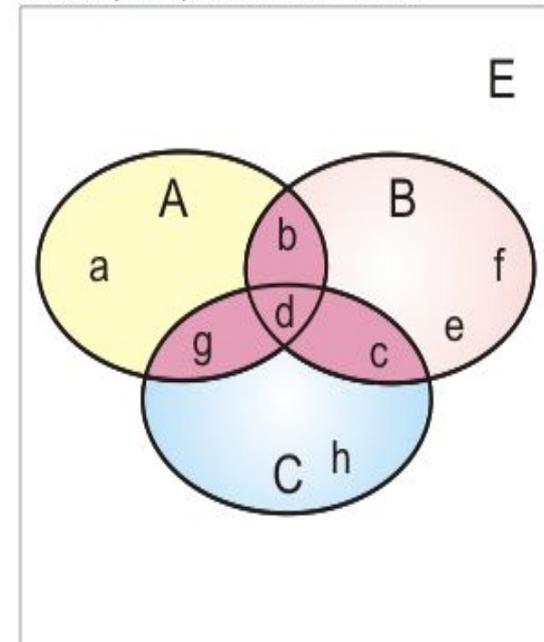
2 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 1\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{5, 3, 1\}\}$.
 $|S| = 3, |\beta(S)| = 12.$

3 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 1\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$.
 $|S| = 3, |\beta(S)| = 8.$

11. Заданы универсальное множество $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

и множества A, B и C

Записать элементы множеств A, B и C .



Выбрать все верные утверждения:

1 $A = \{a, b, d, g\}, B = \{b, c, e, d, f\}, C = \{c, d, g, h\}$

2 $A = \{a, b, d, g\}, B = \{b, f, c, e, d\}, C = \{d, g, c, h\}$

3 $A = \{a, b, d, g\}, B = \{e, f\}, C = \{h\}$

12. Заданы множества $A, B : A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 0\}$

Найти элементы множества $F: F = \{f \mid f = a \times b, a \in A, b \in B\}$

Выбрать все верные
утверждения:

1 $F = \{1, 2, 3, 0\};$

2 $F = \{0, 1, 2, 3\};$

3 $F = \{0, 0, 0, 1, 2, 3\};$

13. множество X включает в себя корни уравнения $x(x + 1)(x - 2) = 0$,
а множество Y содержит значения $\{-1, 0, 1\}$.

Найти элементы множества $Z = \{z \mid z = x - y, x \in X, y \in Y\}$.

Выбрать верный вариант

ответа:

1 $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

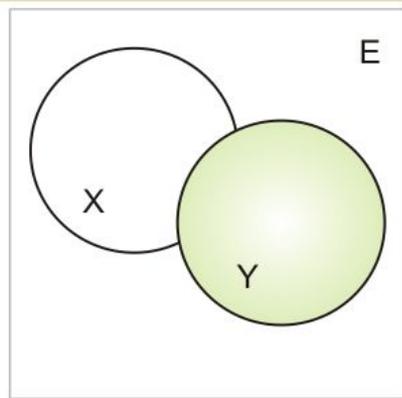
2 $Z = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3 $Z = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

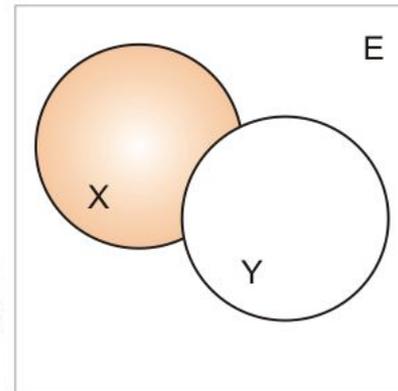
14. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, X = \{1, 5\}, Y = \{1, 2, 4\},$

Найти множество и дать графическую интерпретацию операциям: $X \cap \bar{Y}$

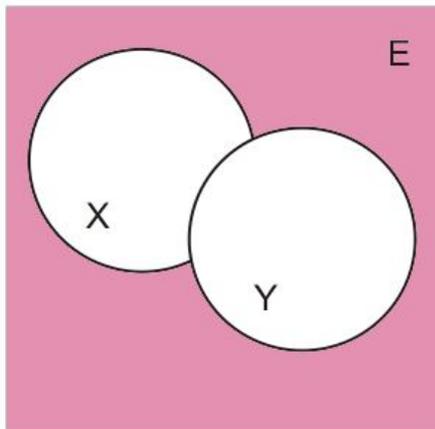
1 ● {5}



2 ● {5}



3 ● {1, 2, 5}



15. Установите соответствие

A $x \in A \cap B$
 \Rightarrow

B $x \in A \setminus B$
 \Rightarrow

C $x \in A \cup B \Rightarrow$

D $x \notin A \cap B \Rightarrow$

E $x \notin A \cup B \Rightarrow$

F $x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \bar{B} \Rightarrow$

1 $\begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$

2 $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

5 $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases}$

6 $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$

A	
B	
C	
D	
E	
F	

$$16. \quad |A \cup B \cup C| =$$

Выбрать верный вариант

ответа:

-
- 1 $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
- 2 $|A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$
- 3 $|A| - |B| - |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- 4 $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
-

Кол-во баллов	Оценка
Менее 20	2
20-23	3
24-26	4
27, 28	5

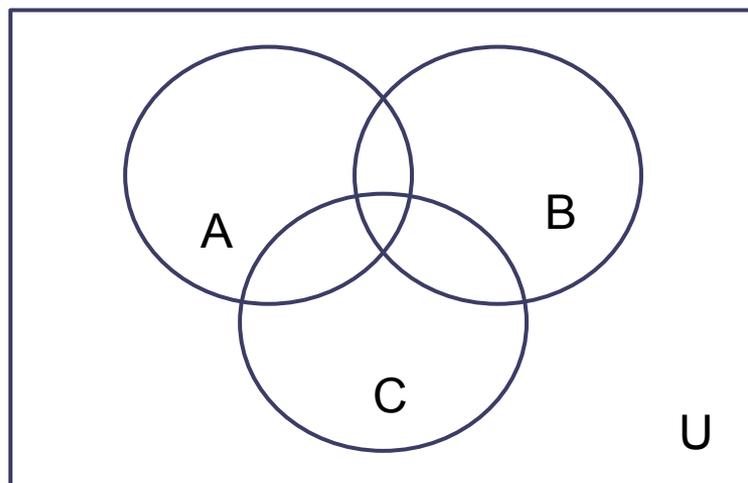
Решение задач

1. Даны множества $K=\{a,б,д\}$, $L=\{б,в,д\}$, $M=\{a,в,г\}$, $U=\{a,б,в,г,д\}$.

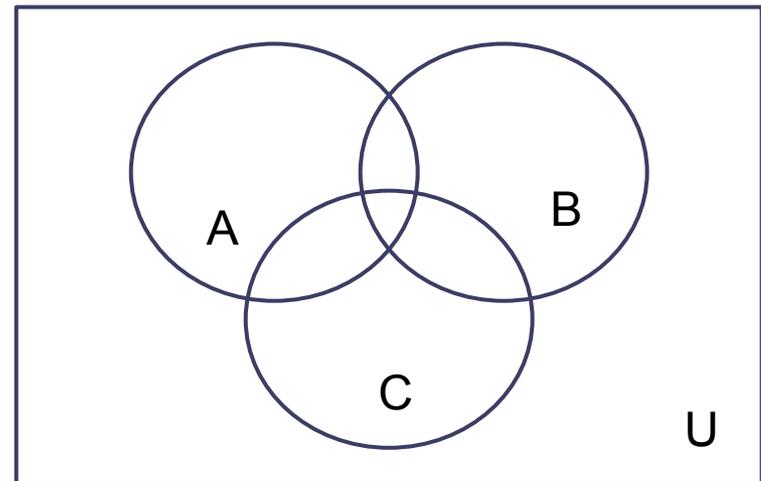
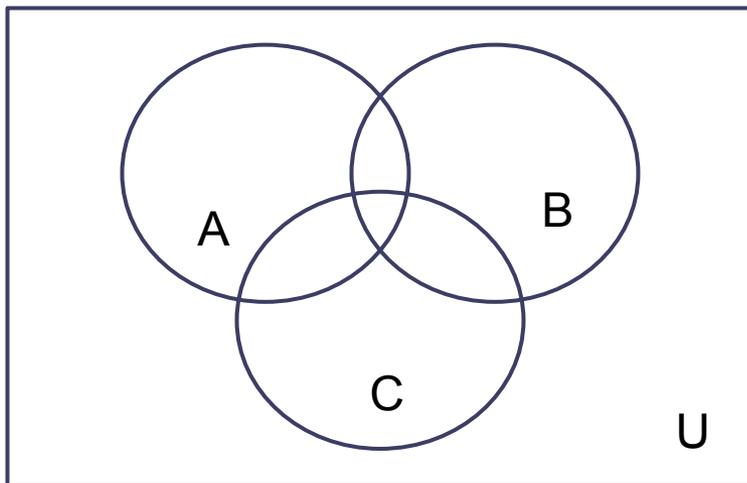
Найти множества:

- a) $(\overline{K \cap M}) \setminus L$
- b) $L \cup (K \Delta \overline{M})$
- c) $M \times L$

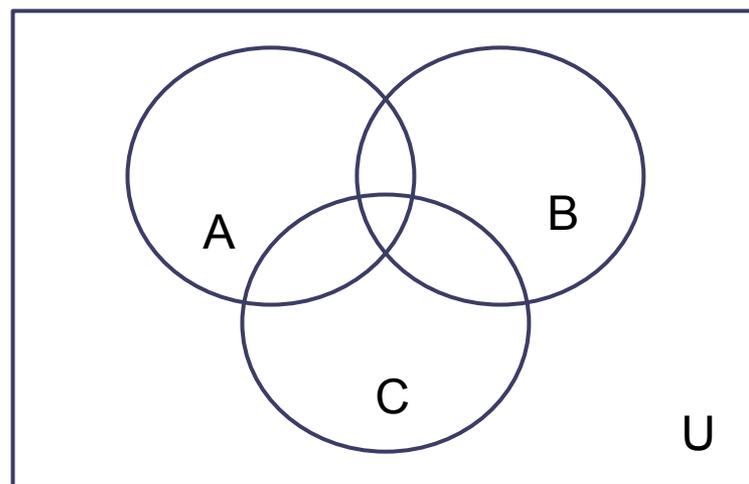
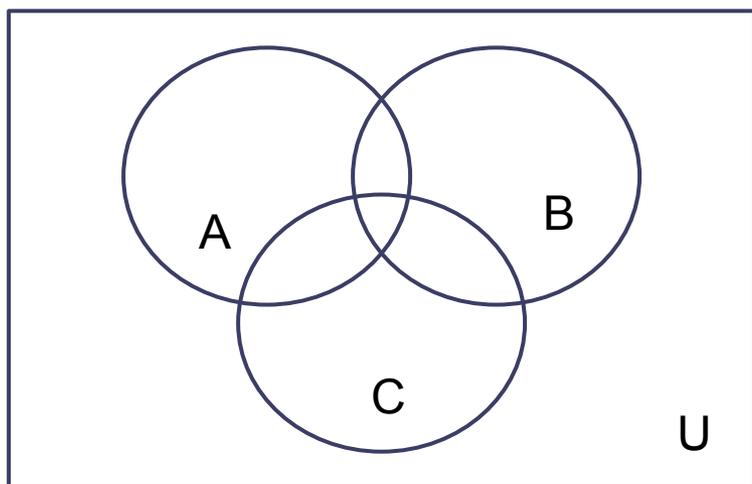
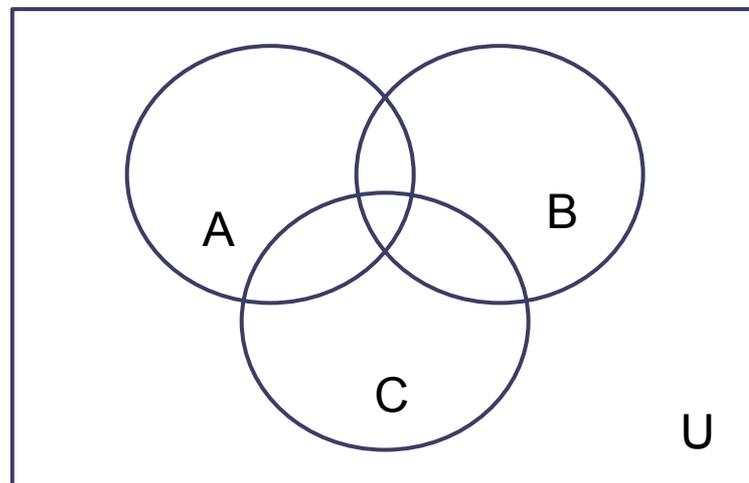
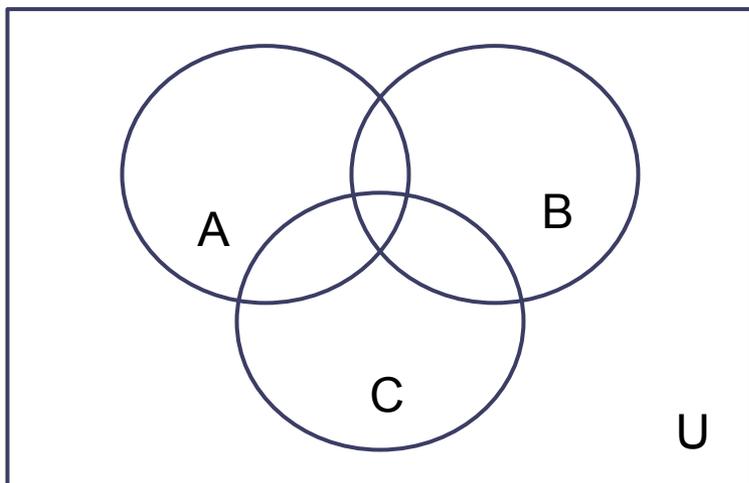
2. Построить диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$



3. Доказать равенство множеств $(C \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \setminus C$
- a) с помощью диаграммы Эйлера – Венна;
 - b) аналитически



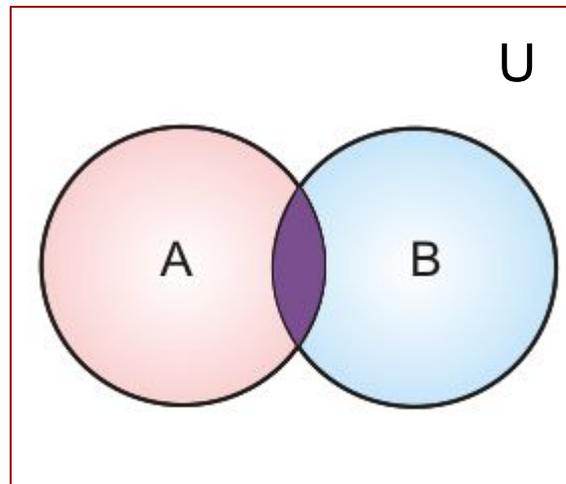
3. Доказать равенство множеств $(C \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \setminus C$
б) аналитически



Нахождение мощности объединения множеств

Мощность объединения двух множеств равна сумме мощностей этих множеств без мощности их пересечения:

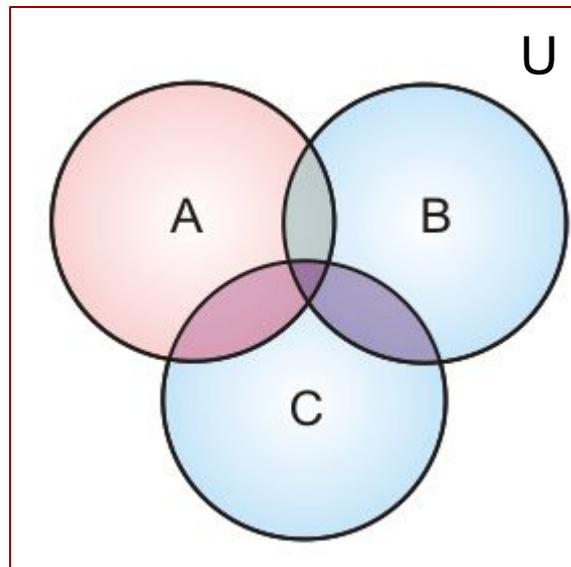
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Нахождение мощности объединения множеств

Мощность объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Нахождение мощности объединения множеств

Пример. На потоке из 100 студентов 28 человек изучают английский язык, 30 человек - немецкий язык, 42 человека - французский язык. Причем 8 человек изучают два языка - английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек - немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка. Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?

Решение. Обозначим Y - множество студентов, изучающих иностранные языки.

X - множество студентов, не изучающих иностранный язык.

Пусть – S множество студентов, $|S|=100$ (студентов).

A - мн-во студентов, изучающих англ. язык, $|A|=28$;

H - мн-во студентов, изучающих нем. язык, $|H|=30$;

Φ - мн-во студентов, изучающих фр. язык, $|\Phi|=42$.

Соответственно множества студентов, изучающих по 2 или 3 ин. языка:

$$|A \cap H| = 8, |A \cap \Phi| = 10,$$

$$|H \cap \Phi| = 5, |A \cap H \cap \Phi| = 3$$

По формуле мощности объединения трех множеств

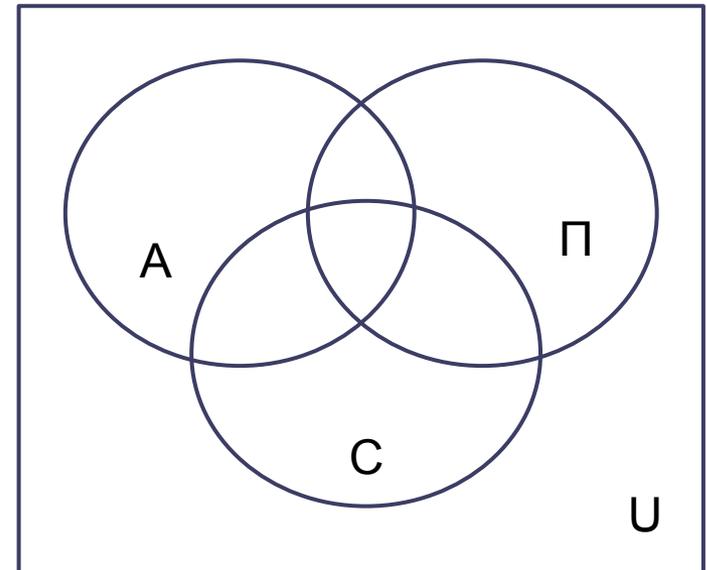
$$|Y| = |A| + |H| + |\Phi| - |A \cap H| - |A \cap \Phi| - |H \cap \Phi| + |A \cap H \cap \Phi| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$$



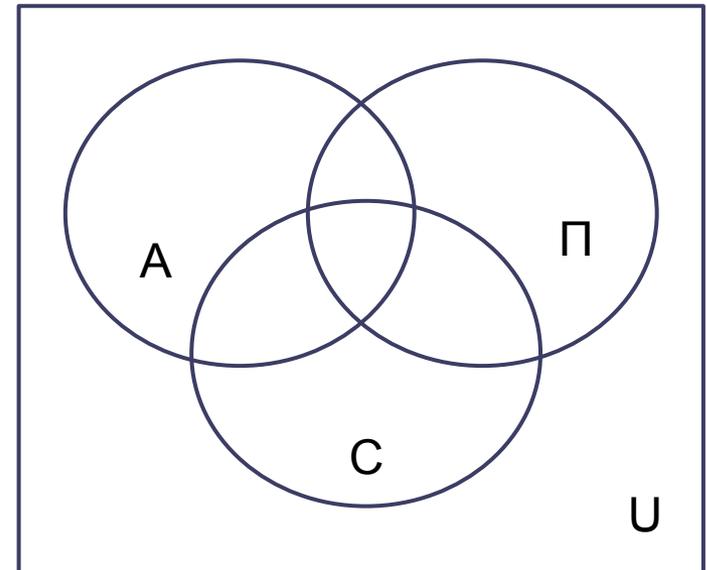
$$|X| = 100 - 80 = 20.$$

Ответ: 20 студентов не изучает ни один из перечисленных языков

Задача. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?



Задача. В студенческой группе 25 человек. Во время летних каникул 9 из них выезжали в турпоездки за границу, 12 – путешествовали по России, 15 – отдыхали в Сочи, 6 – путешествовали за границей и по России, 7 – были и за границей и в Сочи, 8 – и путешествовали по России и были в Сочи и 3 – участвовали во всех трех поездках. Сколько студентов никуда не выезжало?



Задача. Из 220 школьников 163 умеют играть в хоккей, 175 – в футбол, 24 не умеют играть в эти игры. Сколько школьников одновременно умеет играть в хоккей и футбол?

Ответ: 142

Задача. По итогам экзаменов из 37 студентов отличную оценку по математике имели 15 студентов, по физике – 16, по химии – 19, по математике и физике – 7, по математике и химии – 9, по физике и химии – 6, по всем трем предметам – 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

Ответ: 32

Задача. Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе: Всего – 45 студентов. Футбольная секция – 25 человек, баскетбольная секция – 30 человек, шахматная секция – 28 человек, футбольная и баскетбольная – 16, футбольная и шахматная – 18, баскетбольная и шахматная – 17. В трех секциях одновременно занимаются 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

Домашняя работа

- В течение 30 дней сентября было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре была хорошая погода?
- В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Подготовка к контрольной работе

1. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$;

з) $Q = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n < 20, n - \text{простое}\}$;

и) $S = \left\{n \mid n \in \mathbf{Z}, \frac{n^2 - 2n + 5}{(n-1)^2} - \text{целое}\right\}$;

2. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.

а) {сумма; разность; множитель; частное};

б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};

в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};

г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};

д) {4; 6; 12; 81; 441; 1113};

е) {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур};

ж) $\left\{\frac{3}{4}; \frac{7}{11}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{9}{16}; \frac{2}{9}\right\}$;

з) {шар; пирамида; параллелограмм; цилиндр; конус}.

3. Докажите, что

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A) = B \setminus A.$$

4. Покажите с помощью диаграмм Эйлера–Венна, что

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)].$$

5. Даны множества $K = \{a, б, д\}$, $L = \{б, в, д\}$, $M = \{a, в, г\}$, $U = \{a, б, в, г, д\}$.

Найти множества:

- a) $(\overline{K \cup M}) \setminus L$
- b) $L \cap (\overline{K \Delta M})$
- c) $M \times \overline{L}$

6. Постройте диаграммы Эйлера–Венна для множеств

- a) $(C \setminus B) \cup \overline{(A \setminus C)}$; в) $(A \setminus C) \cup (B \Delta C)$; с) $(C \Delta A) \setminus (B \cap A)$.

Контрольная работа



Продолжительность 45 минут



Критерии оценки:

- На «3» - 2 и 3 задания
- На «4» - 1, 2, 3, 4а)
- На «5» - все! (и правильно)



Удачи!

