

МНОЖЕСТВА

- **Множество** – это совокупность объектов произвольной природы, определенная некоторым правилом.

если a является элементом множества A , то пишут

$$a \in A$$

если же нет, то - $a \notin A$

Примеры:

- **Числовое множество**

$$A = \{1; 3, 5\} (1 \in A, 2 \notin A)$$

- **Множество участников олимпиады по информатике**

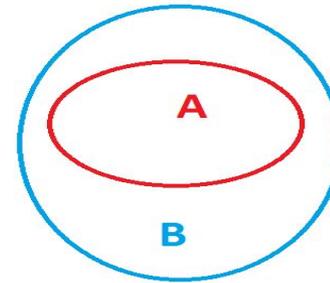


- **Множество летающих крокодилов**



Подмножество

- Множество A является подмножеством множества B , если все элементы A принадлежат B .

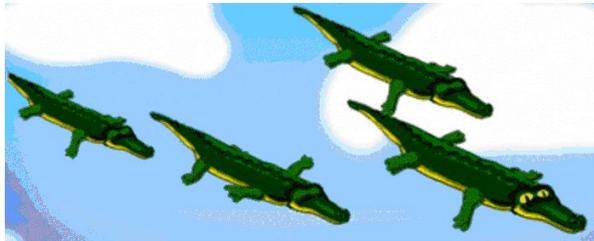


- Запись: $A \subset B$
- $A = \{1, 3, 5\} \subset B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- Можно сказать также, что в A нет такого элемента, который не принадлежал бы множеству B .

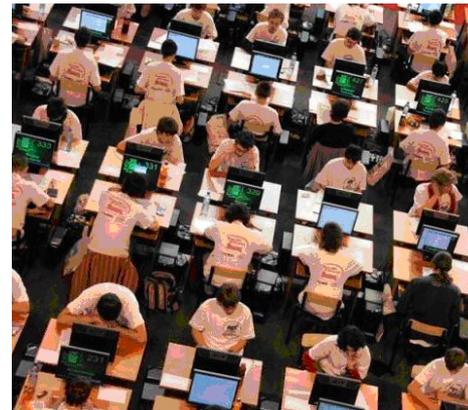
Пустое множество – МНОЖЕСТВО, В КОТОРОМ НЕТ ЭЛЕМЕНТОВ



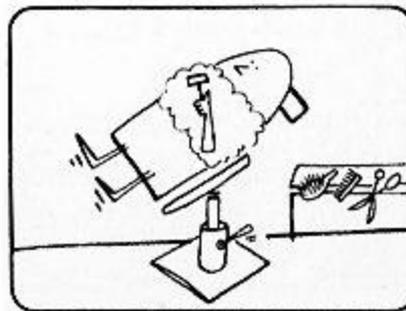
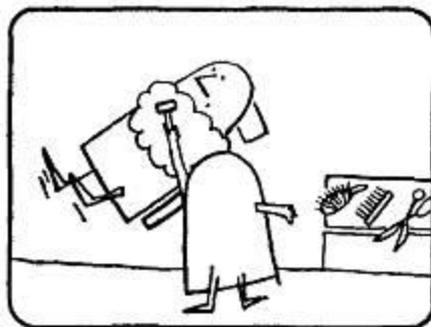
$= \emptyset$



\cup



ПАРАДОКС БРАДОБРЕЯ



Так брить или не брить ему себя?!

От парадоксов надо избавляться!

Подход Г. Кантора – «Наивная теория множеств»

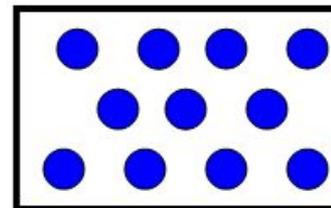
Разрешается работать со множествами, которые «встречаются в природе», а также со множествами, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями.

Прежде, чем определять разумные теоретико-множественные операции, введем несколько символов.

Элементы логической символики

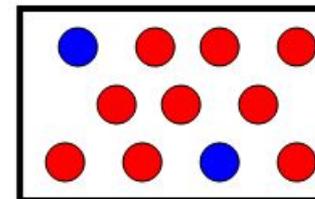
КВАНТОР ОБЩНОСТИ \forall (любой, каждый, всякий)

\forall (любой) КРУЖОЧЕК В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ - СИНИЙ

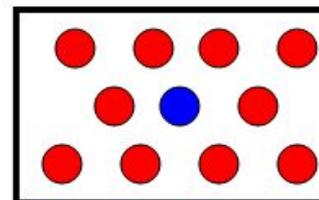


КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ \exists (существует, найдется)

В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ \exists (СУЩЕСТВУЕТ) СИНИЙ КРУЖОЧЕК



В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ $\exists!$ (СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННЫЙ) СИНИЙ КРУЖОЧЕК



Импликация «СЛЕДОВАТЕЛЬНО»

Запись $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B или, что то же самое, B следует из A .

A
ЖИВОТНОЕ - ЗАЯЦ



A – достаточное условие для **B**



B
У ЖИВОТНОГО - КОРОТКИЙ ХВОСТ



B – необходимое условие для **A**

Если одновременно верны утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$,
то пишут $A \Leftrightarrow B$ (A равносильно B) и A называется
необходимым и достаточным условием для B (а B для A).

A
Русское название птицы – СЕРАЯ ВОРОНА



B
Латинское название птицы – CORVUS CORNIX

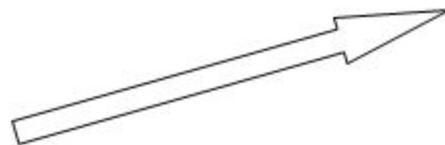


Дизъюнкция \vee «и/или»

Я КУПЛЮ



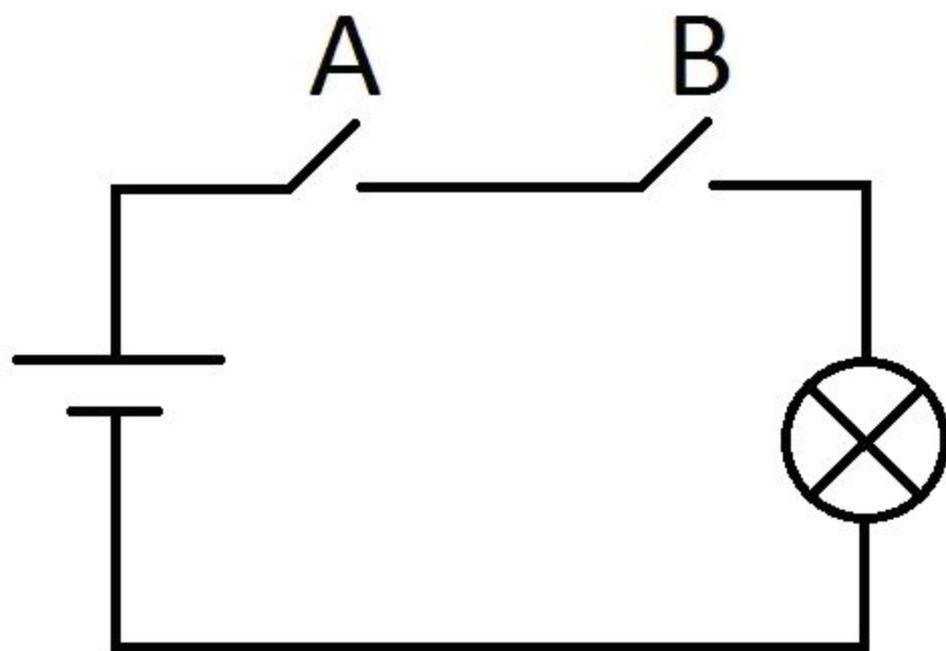
ПРАВИЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ



Конъюнкция \wedge «И»

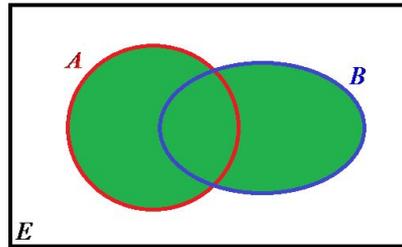
Лампа будет гореть только в случае, когда оба контакта замкнуты:

$A \wedge B$



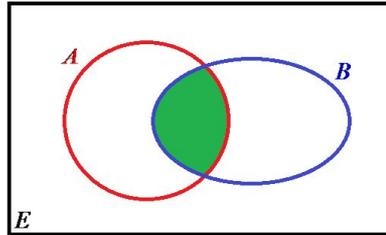
Операции над множествами

- Объединение



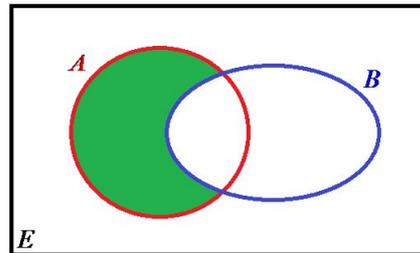
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

- Пересечение



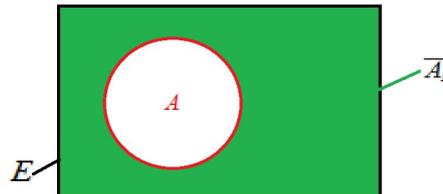
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

- Разность



$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

- Дополнение



$$x \in \bar{A}_E \Leftrightarrow x \notin A$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ

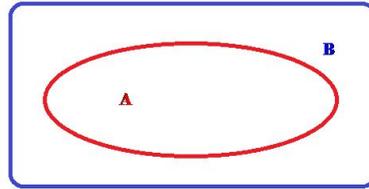
1. $A \cap A = A$ 2. $A \cup A = A$ 3. $A \cap B = B \cap A$ 4. $A \cup B = B \cup A$

5. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
 $A \cup B = B$

6. $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

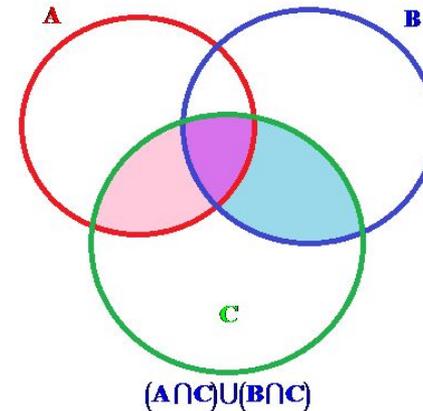
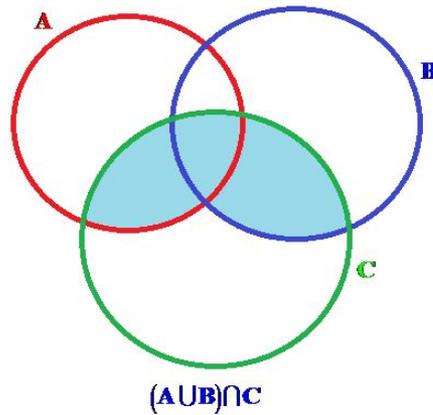
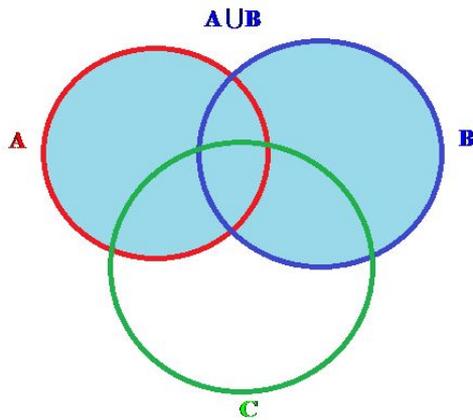
7. $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 9. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



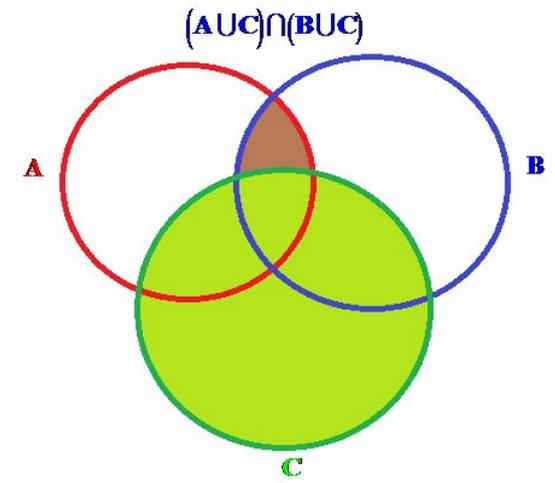
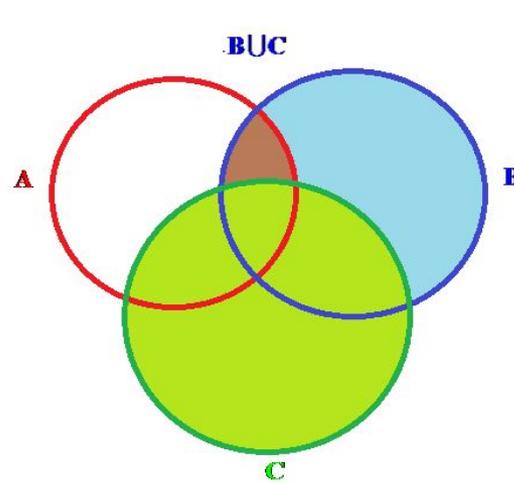
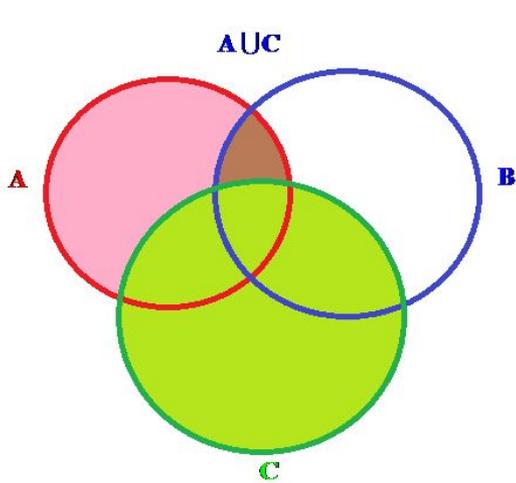
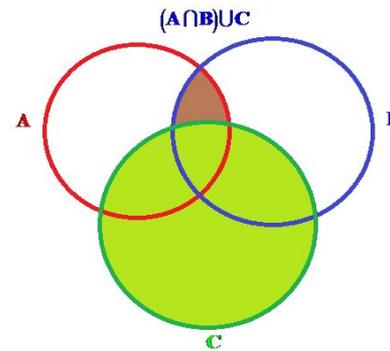
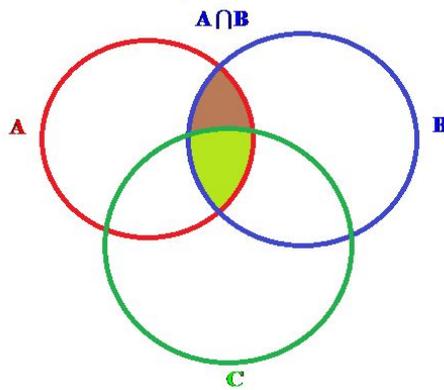
I ЗАКОН ДИСТРИБУТИВНОСТИ ДЛЯ ОПЕРАЦИЙ

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$$

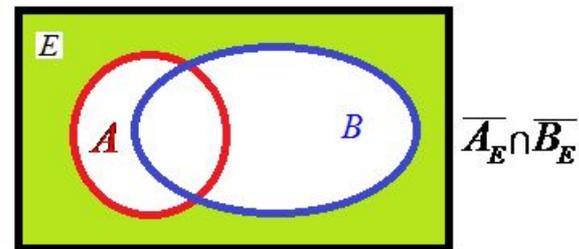
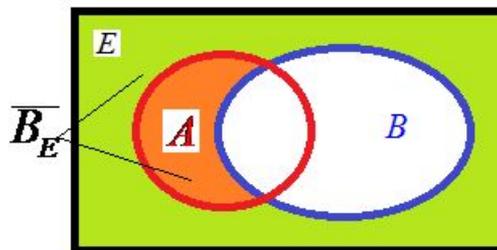
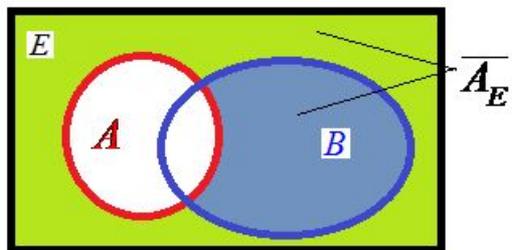


II ЗАКОН ДИСТРИБУТИВНОСТИ ДЛЯ ОПЕРАЦИЙ

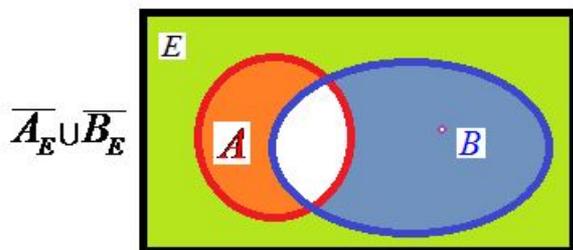
$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$$



КОЕ-ЧТО ИЗ СВОЙСТВ ДОПОЛНЕНИЙ



$$\overline{A \cup B} = \overline{A_E} \cap \overline{B_E}$$

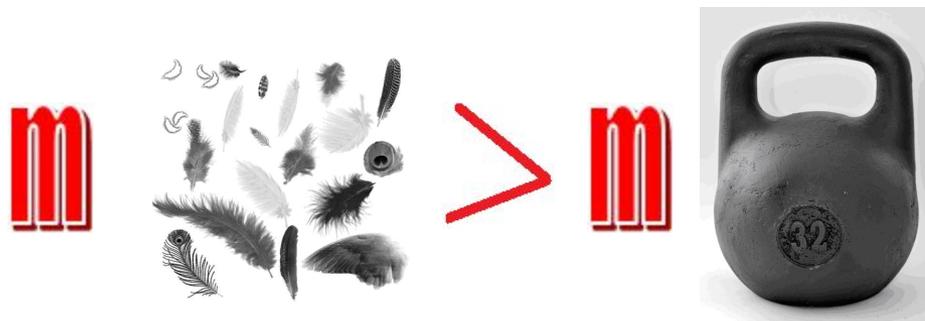


$$\overline{A \cap B} = \overline{A_E} \cup \overline{B_E}$$

Задача. докажите эти свойства аналитически.

Мощность множества

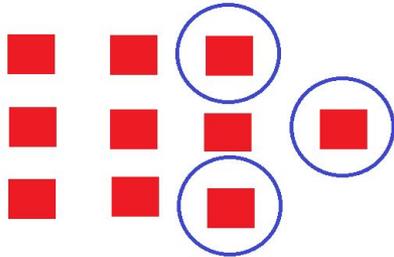
- Мощность конечного множества A – число его элементов $m(A)$.
- $m(\emptyset) = 0$



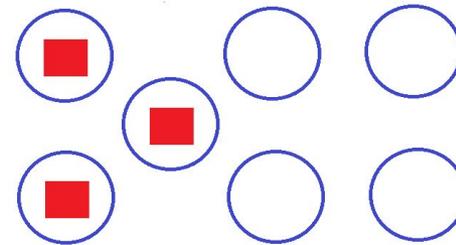
КОЕ-ЧТО ИЗ СВОЙСТВ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

$$m(A \cap B) = mA + mB - m(A \cup B)$$

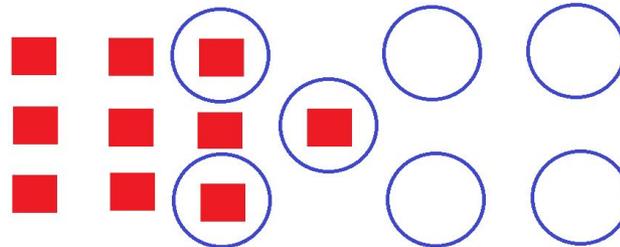
**A – КРАСНЫЕ КВАДРАТИКИ
(МОГУТ БЫТЬ В СИНИХ КРУЖОЧКАХ)**



**B – СИНИЕ КРУЖОЧКИ
(МОГУТ ОКРУЖАТЬ КРАСНЫЕ КВАДРАТИКИ)**



A ∪ B



ЗАДАЧА. ДОКАЖИТЕ, ЧТО

$$m(A \cap B \cap C) = mA + mB + mC - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$$



А МОЖНО СРАВНИВАТЬ МОЩНОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ?

Можно. Например, мощность множества целых чисел
меньше мощности множества действительных чисел.



Ну это даже мне понятно!:-)

А вот на отрезке 

точек столько же, как и в квадрате. 



Но это тема для отдельной беседы.