

**ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА**

АКТУАЛЬНОСТЬ

РОЛЬ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:

- ПОЗВОЛЯЕТ ЛУЧШЕ ОРИЕНТИРОВАТЬСЯ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ, ГДЕ НЕ ВСЕ ЖЕСТКО ДЕТЕРМИНИРОВАНО;
- ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ:

- НУЖНА ДЛЯ СИСТЕМАТИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ НАУЧНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
- ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ



Лекция 1.

**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Часть I.

СЛУЧАЙНЫЕ

СОБЫТИЯ

1. ВИДЫ СОБЫТИЙ

ВСЕ СОБЫТИЯ
В ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИНЯТО ОБОЗНАЧАТЬ
ЗАГЛАВНЫМИ

БУКВАМИ

ЛАТИНСКОГО
АЛФАВИТА: А, В, С, ...

ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ОПЕРИРУЕТ
СЛУЧАЙНЫМИ
СОБЫТИЯМИ.

СЛУЧАЙНОЕ –

СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ
В ДАННОМ ИСПЫТАНИИ
МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ,
А МОЖЕТ И НЕ
ПРОИЗОЙТИ.

Примеры:

- падение монеты определенной стороной вверх;
- выпадение определенного числа очков на кубике для настольной игры.

Статистические закономерности

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ
ИМЕЮТ ПРИЧИНЫ,
И В МИРЕ ЭТИХ СОБЫТИЙ
СУЩЕСТВУЮТ
ЗАКОНОМЕРНОСТИ.

ОДНАКО ПРОЯВЛЯЮТСЯ ОНИ
ЛИШЬ ПРИ БОЛЬШОМ
ЧИСЛЕ ИСПЫТАНИЙ.

ТАКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ
НАЗЫВАЮТСЯ
СТАТИСТИЧЕСКИМИ.

Пример - основной закон
радиоактивного распада.



**МНОЖЕСТВО
СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ
КАК БЫ ОГРАНИЧЕНО
С ДВУХ СТОРОН
СОБЫТИЯМИ**

***НЕВОЗМОЖНЫМИ
И
ДОСТОВЕРНЫМИ.***

**НЕВОЗМОЖНОЕ –
СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ
В ДАННОМ
ИСПЫТАНИИ
НЕ МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ.**

**Например, если
на гранях кубика число
очков от 1 до 6, то
выпадение семи очков
при единичном
бросании кубика –
невозможное событие.**

**ДОСТОВЕРНОЕ –
СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ
В ДАННОМ
ИСПЫТАНИИ
ОБЯЗАТЕЛЬНО
ПРОИЗОЙДЕТ
(НЕ МОЖЕТ НЕ
ПРОИЗОЙТИ).**

- Например, если в некоторой корзине (часто говорят "в урне") имеются **ТОЛЬКО КРАСНЫЕ ШАРЫ**, **ТО ВЫТАСКИВАНИЕ ИЗ НЕЕ ИМЕННО КРАСНОГО ШАРА – событие ДОСТОВЕРНОЕ.**
- В то же время вытаскивание черного шара – событие **НЕВОЗМОЖНОЕ.**

**Среди НЕСКОЛЬКИХ
случайных
событий могут
быть события**

- *РАВНОВОЗМОЖНЫЕ,*
- *НЕСОВМЕСТИМЫЕ,*
- *ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ*



Равновозможные события

События называются
равновозможными,
если не существует
причин,
в силу которых одно из
них происходило бы
чаще других.

Пример

В урне 2 КРАСНЫХ
и 2 ЧЕРНЫХ шара.
Тогда
ВЫТАСКИВАНИЕ
КРАСНОГО ШАРА
и ВЫТАСКИВАНИЕ
ЧЕРНОГО ШАРА –
события
РАВНОВОЗМОЖНЫЕ.

Несовместные события

События называются **несовместными**, если появление одного из них в данном испытании **исключает** появление **других в том же испытании**.

Пример

Имеется урна с красными и черными шарами.

Предполагается, что в руке помещается только один шар.

Тогда **ПОЯВЛЕНИЕ** при **ЕДИНИЧНОМ** вытаскивании

одновременно

КРАСНОГО ШАРА и **ЧЕРНОГО ШАРА** –

события НЕСОВМЕСТИМЫЕ.

Противоположные события

Два события
называются
противоположными,
если одно из них
заключается в том, что
другое
не происходит.

Т.е., вместе они
охватывают все
возможные итоги
испытания.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

A и \bar{A}

(читается "А" и "НЕ А").

Пример

Выпадение орла и
выпадение решки
при единичном бросании
монеты –
противоположные
события
(если исключить возмож-
ность установки монеты
на ребро).

Примечание

***ЛЮБЫЕ
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ
СОБЫТИЯ
НЕСОВМЕСТНЫ.***

***Обратное утверждение
в общем случае
неверно.***

2. КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ

РАССМОТРИМ ДВЕ КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ:
СУММУ
И
ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

ОБОЗНАЧЕНИЕ этих комбинаций
для двух событий,
события A и события B :
сумма – « $A + B$ »,
произведение – « $A \cdot B$ ».

Сумма событий

СУММА СОБЫТИЙ –
это событие, состоящее
в том,
что происходит
или А, или В, или
ОНИ ОБА ВМЕСТЕ.

ИНАЧЕ:

**ЕСЛИ ПРОИСХОДИТ
ХОТЯ БЫ ОДНО ИЗ
НИХ.**

**СОЮЗЫ "ИЛИ", "ХОТЯ
БЫ" – УКАЗАНИЕ НА
СУММУ СОБЫТИЙ.**

Произведение событий

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ –

**это событие, состоящее
в том,**

что происходит

и А, и В,

**т.е. они появляются
оба, совместно.**

**СОЮЗ "И" –
УКАЗАНИЕ НА
ПРОИЗВЕДЕНИЕ
СОБЫТИЙ.**

**ПРОИЗВЕДЕНИЕ
НЕСОВМЕСТНЫХ
СОБЫТИЙ ЕСТЬ
СОБЫТИЕ
НЕВОЗМОЖНОЕ.**

3. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

*ВЕРОЯТНОСТЬ ЕСТЬ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ
МЕРА ВОЗМОЖНОСТИ СОБЫТИЯ.*

Существует несколько определений вероятности.

Чаще всего используются **КЛАССИЧЕСКОЕ** и **СТАТИСТИЧЕСКОЕ** определения.

Классическое определение вероятности

**ВЕРОЯТНОСТЬЮ
СОБЫТИЯ «А»
НАЗЫВАЕТСЯ
ОТНОШЕНИЕ ЧИСЛА m
БЛАГОПРИЯТСТВУ-
ЮЩИХ «А»
ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ
К ОБЩЕМУ ЧИСЛУ n
ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ
ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ.**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Так, если в урне 2 красных и 3 белых шара, то вероятность вытащить при единичном испытании красный шар - $2/5$, белый шар – $3/5$.

Предварительные пояснения к статистическому определению вероятности

Пусть производится серия из n испытаний, и в этой серии событие A происходит m раз. Число m называется **ЧАСТОТОЙ**, а отношение m к n $W(A) = m / n$ – **ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ** события A .

Если число испытаний в серии достаточно велико, то относительная частота события - его устойчивая характеристика: она почти не меняется от серии к серии.

Статистическое определение вероятности

**ВЕРОЯТНОСТЬЮ
СОБЫТИЯ A
НАЗЫВАЕТСЯ**

**ПРЕДЕЛ
ОТНОСИТЕЛЬНОЙ
ЧАСТОТЫ
ЭТОГО СОБЫТИЯ**

**ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ
УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА
ИСПЫТАНИЙ:**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

**Если n достаточно
велико, то**

$$P(A) \approx \frac{m}{n}$$

**Это – «опытная вероят-
ность». Именно она обычно
определяется на практике.**

Следствия из определений вероятности

- **ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ РАВНА НУЛЮ.**
- **ВЕРОЯТНОСТЬ ДОСТОВЕРНОГО СОБЫТИЯ РАВНА ЕДИНИЦЕ.**

- **ВЕРОЯТНОСТЬ ЛЮБОГО СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЗНАЧЕНИЯ ЛИШЬ В ИНТЕРВАЛЕ МЕЖДУ ЭТИМИ ЧИСЛАМИ:**

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

4. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ
ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ОБЩЕМ ВИДЕ
ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ
СПРАВЕДЛИВА ДЛЯ
ЛЮБЫХ,
В ТОМ ЧИСЛЕ
ЗАВИСИМЫХ,
СОБЫТИЙ.

СОБЫТИЕ В
ЗАВИСИТ
ОТ СОБЫТИЯ А,
ЕСЛИ
ВЕРОЯТНОСТЬ В
ЗАВИСИТ ОТ ТОГО,
ПРОИЗОШЛО ЛИ А.

Формулировка теоремы умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Здесь $P(B/A)$ – условная вероятность события B ,

т.е. вероятность B при условии, что A произошло.

Для НЕЗАВИСИМЫХ событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$