

Кривые второго порядка

Кривые второго порядка – это линии на плоскости, которым соответствуют уравнения второго порядка.

Установлено, что к кривым второго порядка относятся эллипс, гиперболола, парабола.

Других кривых второго порядка нет, если не учитывать случаи вырождения кривых в точку или прямые.

Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса.

Обозначим:

$$|F_1F_2| = 2c, |F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

где M – произвольная точка эллипса;

$$a > c.$$

Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а ось Oy – посередине между ними.

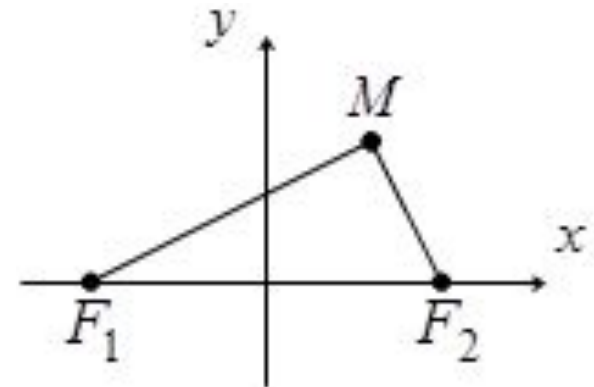
Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Обозначим $M(x;y)$

Тогда $|F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$;

$$|F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

и сумма этих расстояний равна $2a$.



Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а ось Oy – посередине между ними.

Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Обозначим $M(x;y)$

Тогда $|F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$;

$$|F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

и сумма этих расстояний равна $2a$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса ($b^2 = a^2 - c^2$).

Если $b = a$, то уравнение примет вид:

$x^2 + y^2 = a^2$ – каноническое уравнение окружности.

Точка $(0; 0)$ – центр эллипса.

Если центр смещен в точку $(x_0; y_0)$, то уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

a, b – полуоси эллипса.

Если уравнение имеет вид $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1$, то получаем мнимый эллипс (пустое множество).

Если уравнение имеет вид $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$, то получаем вырожденный эллипс (точка $(x_0; y_0)$).

Построение эллипса по каноническому уравнению

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы гиперболы.

Обозначим:

$$|F_1F_2| = 2c, \quad ||F_1M| - |F_2M|| = 2a,$$

где M – произвольная точка гиперболы;

$$a < c.$$

Выберем прямоугольную систему координат так же, как и в случае вывода уравнения эллипса.

Тогда $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$;

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После преобразования получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \equiv \text{каноническое уравнение гиперболы}$$

$$(b^2 = c^2 - a^2).$$

Если центр смещен в точку $(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

a – действительная полуось гиперболы;

b – мнимая полуось гиперболы.

Если уравнение имеет вид $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$,

то получаем вырожденную гиперболу

(пару пересекающихся прямых).

Построение гиперболы по каноническому уравнению

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

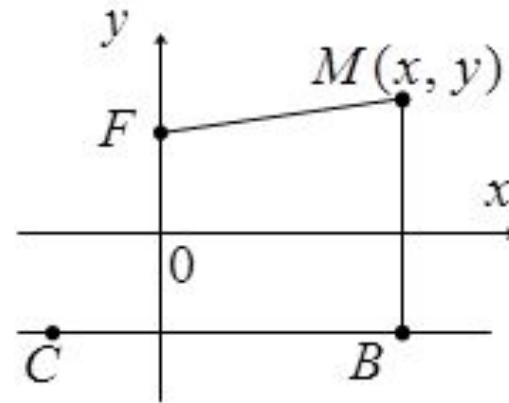
Парабола и ее уравнение

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Пусть F – фокус,
прямая CB – директриса.

Выберем систему координат

следующим образом: ось Oy проведем через фокус F перпендикулярно директрисе CB , а ось Ox – посередине между фокусом и директрисой.



Обозначив расстояние от фокуса до директрисы через p , получим координаты фокуса $F(0;p/2)$.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка параболы.

По определению параболы $MF=MB$, т.е.

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}.$$

После преобразования получим

$x^2 = 2py$ каноническое уравнение параболы;

$(0; 0)$ – вершина параболы,

$x=0$ – ось симметрии.

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $(x_0; y_0)$, и осью симметрии, параллельной оси Oy ($x=x_0$), примет вид: $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$.

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $(x_0; y_0)$, и осью симметрии, параллельной оси Ox ($y=y_0$), примет вид: $(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$.

Построение параболы по каноническому уравнению
 $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (p > 0).$

Пример 1. Привести уравнение к каноническому виду и построить соответствующую линию

$$2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 17 = 0.$$

Пример 2. Привести уравнение к каноническому виду и построить соответствующую линию

$$x = -2 - \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - 2y + 5}.$$

Пример 3. Привести уравнение к каноническому виду
и построить соответствующую линию $x = -5 + \sqrt{1 - y}$.