



Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

$\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$
Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

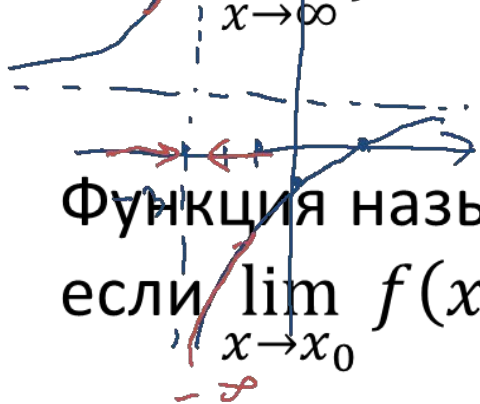
Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.



$$y = \frac{x-2}{x+3} - \text{гипербола}$$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$,
если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$,
если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

§3. Замечательные пределы, эквивалентные функции. Вычисление пределов

Первый замечательный предел: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \text{раскрывает} \\ \text{неопределенности}}} \frac{\sin x}{x} = 1.$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Бесконечно малые в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$

называются эквивалентными, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Обозначают: $f(x) \sim g(x).$

При вычислении пределов функцию можно заменять на эквивалентную (если эта функция является множителем, а не слагаемым).

Примеры эквивалентных функций (в точке $\underbrace{x_0=0}$)

$$\sin x \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\underbrace{1 - \cos x}_{\sim} \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$(e^x - 1) \sim x$$

$$(a^x - 1) \sim x \cdot \ln a$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$\left((1 + x)^k - 1 \right) \sim k \cdot x$$

Примеры. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\frac{\operatorname{tg} 2x \sim 2x}{\sin 3x \sim 3x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{(1 - e^x) \cdot \arcsin 2x} &= \left[\frac{0}{0 \cdot 0} \right] = \left[\frac{1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2}{\begin{array}{l} 1 - e^x \sim (-x) \\ \arcsin 2x \sim 2x \end{array}} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{-x \cdot 2x} = \frac{8}{-2} = -4 \end{aligned}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \text{Раскрытие теории}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad [1^\infty]$$

Пример. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2-1} \right)^{3x^2-1} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right)^\infty \right] \leftarrow [1^\infty] \text{ использовать 2ой зам предел}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\text{делим на наиб. выражение} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2):x^2}{(x^2-1):x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0+1}{1-0} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2-1} \right)^{3x^2-1} = \left[\text{предел единицы в возведении} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2-1} + 1 - 1 \right)^{3x^2-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2-(x^2-1)}{x^2-1} + 1 \right)^{3x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)^{3x^2-1} = [\text{преобразуем степень}] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2(3x^2-1)}{x^2-1} \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)^{\frac{2(3x^2-1)}{x^2-1} \cdot x^2} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(3 - \frac{1}{x^2})}{(1 - \frac{1}{x^2})}} = e^{\frac{2 \cdot 3}{1}} = e^6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

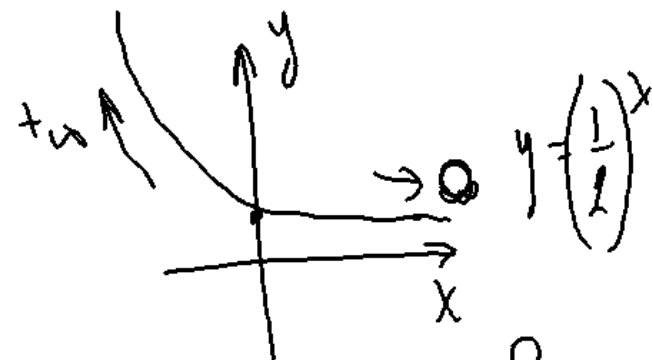
α, β - коэффициенты при x^n
в числителе и знаменателе

Вычислить

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{4x}} &= [1^\infty] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} + 1 - 1 \right)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1+x-1-2x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{1+2x} \right)^{\frac{1+2x}{-x} \cdot \frac{-x}{1+2x} \cdot \frac{1}{4x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x(1+2x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(1+2x)}} = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{4x^2} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} \right] = \cancel{+\infty} 0$$

$$\frac{(1+x):x}{(1+2x):x} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} \rightarrow \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{4x^2} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\pm \infty} \right] = \begin{cases} 0, & x \rightarrow +\infty \\ +\infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

1. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} = \left[\frac{\infty - \infty}{-\infty} \right] = \left[\text{старшая степень } x^2: \frac{1}{-1} \right] = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + 2n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1} + 3n} = \left[\text{старшая степень } n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} + 2n}{n} \right)^2}{\sqrt[3]{\frac{n^6 + 1}{n^6}} + \frac{3}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 2 \right)^2}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^6}} + \frac{3}{n}} = \frac{(1+2)^2}{1} = 9$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7^2 \cdot 7^n}{3 - 7^n} = \left[\text{умнож на } 7^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} + 49}{\frac{3}{7^n} - 1} = -49$$

2. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$ случаи $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x : x^2}{(x^2 - 1) : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{1 - 0} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x + 4})(\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x + 4})}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} = \left[\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \right]$$

$$= \left[\frac{a^2 - b^2}{a+b} = \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - (x^2 - 3x + 4)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4) : x}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x} \right) : x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{6}{1+1} = 3$$

$\sqrt{3x} = \sqrt{3} x^{\frac{1}{2}}$

3. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$\left[\frac{0}{0} \right]$$

1^{ый} замеч., экв. ур-ний

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2} \pm \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 2x - 5} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x^3 + x^2 - 5x + 3 \mid x-1 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 5x + 3 \\ -2x^2 - 2x \\ \hline -3x + 3 \\ -(-3x + 3) \\ \hline 0 \end{array} \right] \frac{x-1}{x^2+2x-3}$$

$$= \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2x - 5 \mid x-1 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline 5x - 5 \\ -5x - 5 \\ \hline 0 \end{array} \right] \frac{x-1}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{(x-1)(3x+5)} =$$

$$= \left[\frac{1+2-3}{3+5} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4-4)(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9-9)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

4. Неопределенность вида $[0 \cdot \infty] \rightarrow \frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\overset{\rightarrow 0}{\sin 2x} \cdot \overset{\nearrow \infty}{\operatorname{ctg} 5x}) = \left[\operatorname{ctg} 5x = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\begin{array}{l} \sin 2x \sim 2x \\ \operatorname{tg} 5x \sim 5x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

5. Неопределенность вида $[1^\infty]$ 2^{ой} замеч. предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1-x} \right)^{\frac{1}{\sin 2x}} &= [1^\infty, \sin 2x \sim 2x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1-x} + 1 - 1 \right)^{\frac{1}{2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1+3x-1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{4x}{1-x} \right)^{\frac{1-x}{4x} \cdot \frac{1}{2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{4x}{1-x} \right)^{\frac{1-x}{4x} \cdot \frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}} = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)(\ln(x-3) - \ln x) &= [\infty(\infty - \infty)] = \left[\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x-3}{x} \right)^{x-5} = [\ln(1^\infty)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{-3}{x} \right)^{\frac{x}{-3} \cdot \frac{-3}{x} \cdot (x-5)} = \\ &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(x-5)}{x}} = \ln e^{-3} = -3 \ln e = -3 \end{aligned}$$

