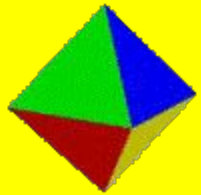


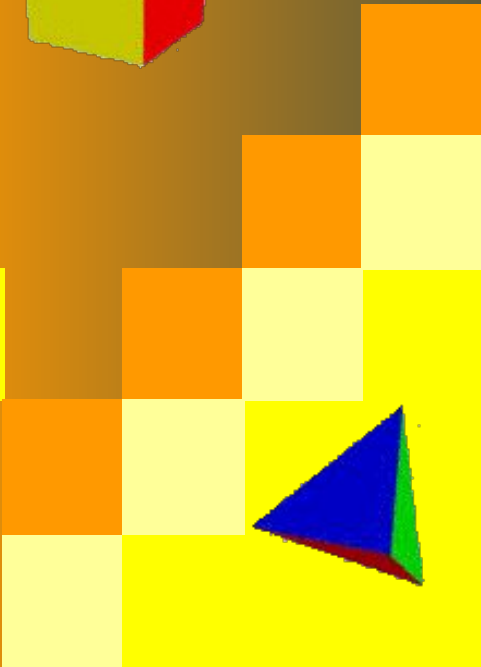
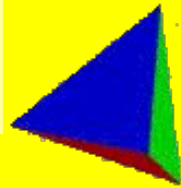
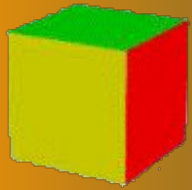
Лицей 35



# «Мир правильных многогранников»



Выполнил: ученики 10 Ю класса  
Лупашко Альберт



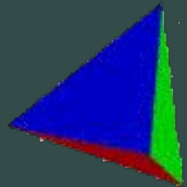
# Введение

“Правильных многогранников так мало, но это весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук”.

( Л. Кэрролл).

*«Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии»*

( русский математик Л.А. Люстернак).



**Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани правильные равные многоугольники, и все двугранные углы равны.**

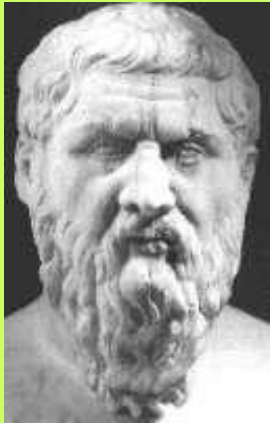


С древнейших времен наши представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей.

# История возникновения правильных многогранников

Правильные многогранники известны с древнейших времён.

Мы рассмотрим как правильные многогранники связаны с именами Платона, Евклида, Архимеда и Иоганна Кеплера.



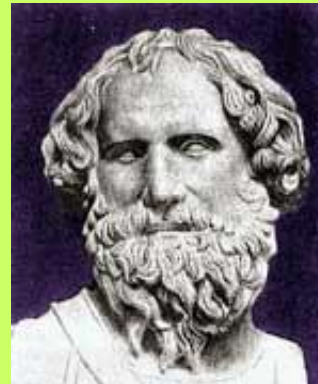
**Платон**

(427 до н. э.—347 до н. э.)  
древнегреческий философ



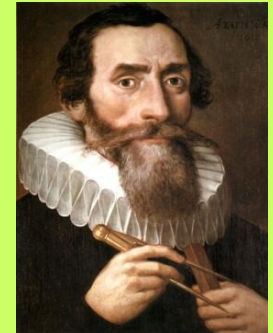
**Евклид**

древнегреческий математик



**Архимед**

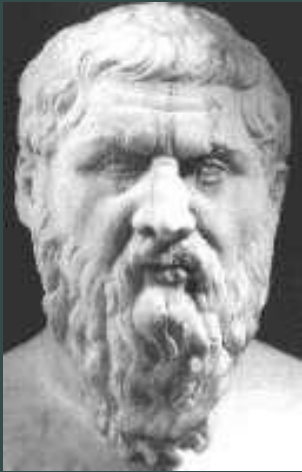
(287 г. до н.э. — 212 г. до н.э.)



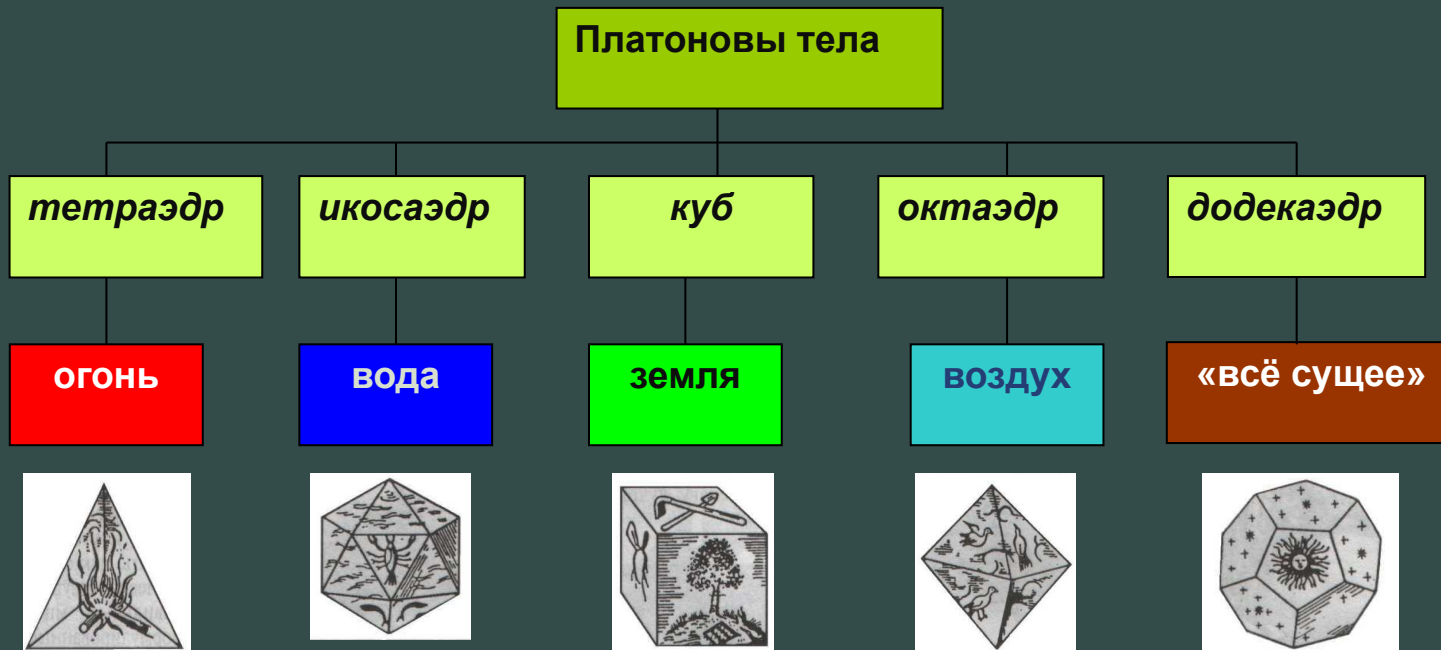
**Иоганн Кеплер**

немецкий астроном  
(1571-1630)

# Платон



Правильные многогранники характерны для философии Платона, в честь которого и получили название «платоновы тела». О которых он писал в своём трактате Тимей (360г до н. э.), где сопоставил каждую из четырёх стихий (землю, воздух, воду и огонь) определённому правильному многограннику. Земля сопоставлялась кубу, воздух — октаэдру, вода — икосаэдру, а огонь — тетраэдру.



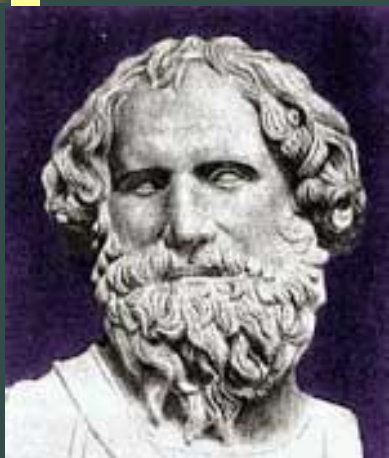
# Евклид



**Евклид** дал полное математическое описание правильных многогранников в последней, *XIII книге Начал*.

- Предложения 13—17 этой книги описывают структуру тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра и додекаэдра в данном порядке.
- Для каждого многогранника Евклид нашёл отношение диаметра описанной сферы к длине ребра.
- В 18-м предложении утверждается, что не существует других правильных многогранников.

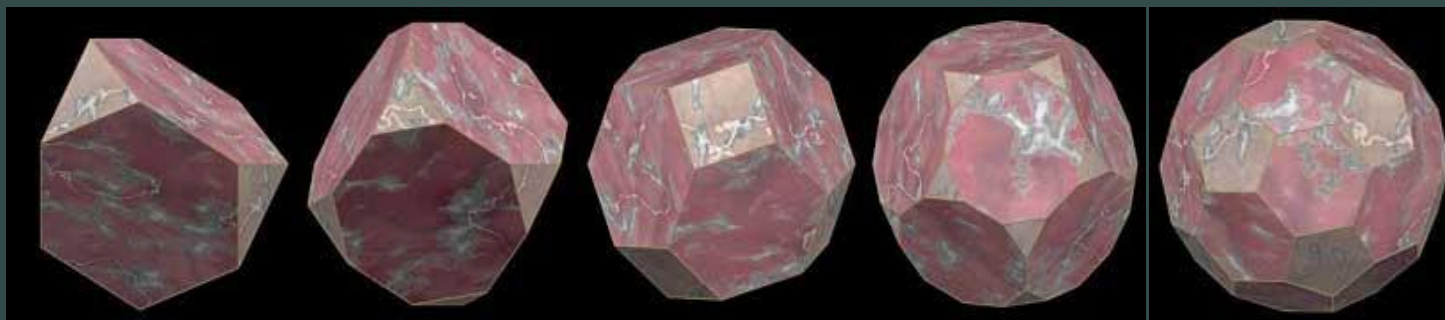




# Архимед

Известно еще множество совершенных тел, получивших название *полуправильных многогранников* или *Архимедовых тел*. Множество *Архимедовых тел* можно разбить на несколько групп. Первую из них, составляют пять многогранников, которые получаются из *Платоновых тел* в результате их *усечения*. Для *Платоновых тел* усечение может быть сделано таким образом, что и получающиеся новые грани и остающиеся части старых будут правильными многоугольниками.

**Архимедовы тела:** усеченный тетраэдр, усеченный гексаэдр (куб), усеченный октаэдр, усеченный додекаэдр и усеченный икосаэдр.

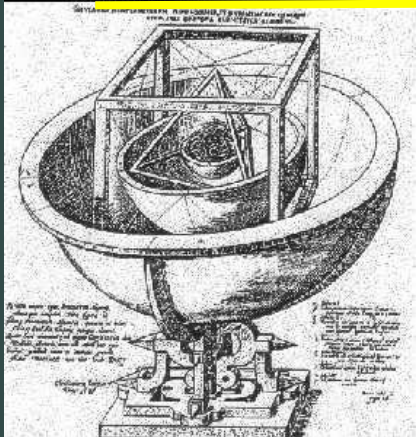


# Кеплер



Все та же вера в гармонию, красоту и математически закономерное устройство мироздания привела И. Кеплера к мысли о том, что поскольку существует пять правильных многогранников, то им соответствуют только шесть планет. По его мнению, сферы планет связаны между собой вписанными в них Платоновыми телами. Поскольку для каждого правильного многогранника центры вписанной и описанной сфер совпадают, то вся модель будет иметь единый центр, в котором будет находиться Солнце.

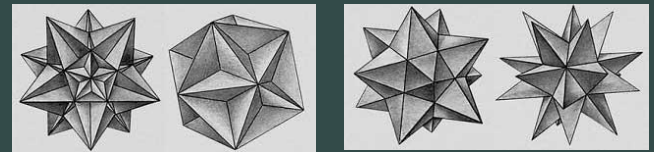
**Геометрическая модель Солнечной системы, основанная на «платоновых телах».**



В сферу орбиты Сатурна он вписывает куб, в куб - сферу Юпитера, в сферу Юпитера - тетраэдр, и так далее последовательно вписываются друг в друга сфера Марса - додекаэдр, сфера Земли - икосаэдр, сфера Венеры - октаэдр, сфера Меркурия

**Таким образом, структура Солнечной системы и отношения расстояний между планетами определялись правильными многогранниками.**

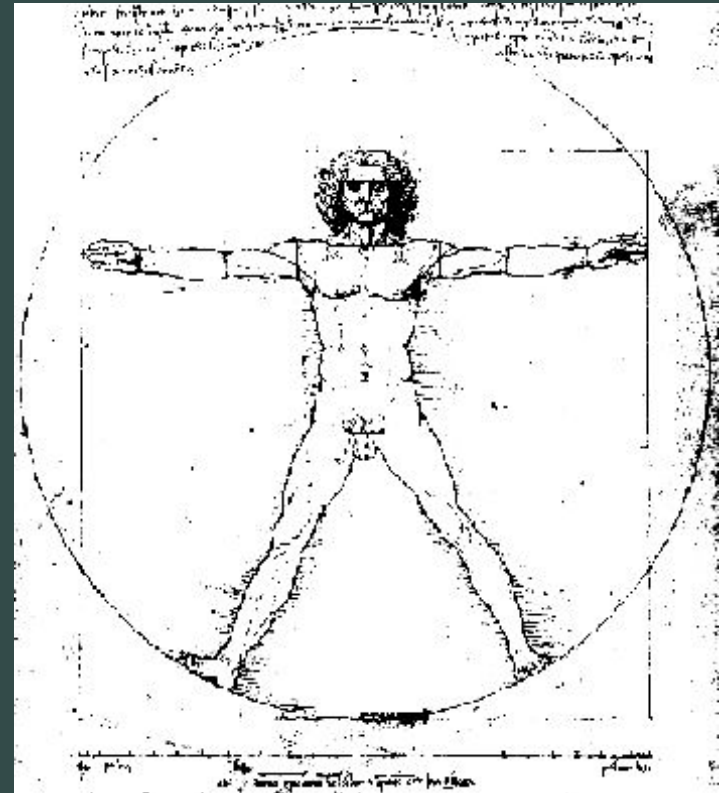
**Открытие правильных звёздчатых многогранников - тел Кеплера-Пуансо.**



# Взаимосвязь «золотого сечения» и происхождения многогранников

Леонардо да Винчи в «Золотом делении» искал гармонические отношения в живописи, архитектуре, строении человеческого тела.

**Золотое сечение применяется для построения правильных пяти- и десятиугольников; в стереометрии - правильных двенадцатигранников (додекаэдров) и двадцатигранников (икосаэдров).**



Многомудрые греки сочли разумным возвести генезис пропорций к самим истокам вселенной: "По Ферекиду, Зевс связал определенными пропорциями то, что прежде было хаотично".

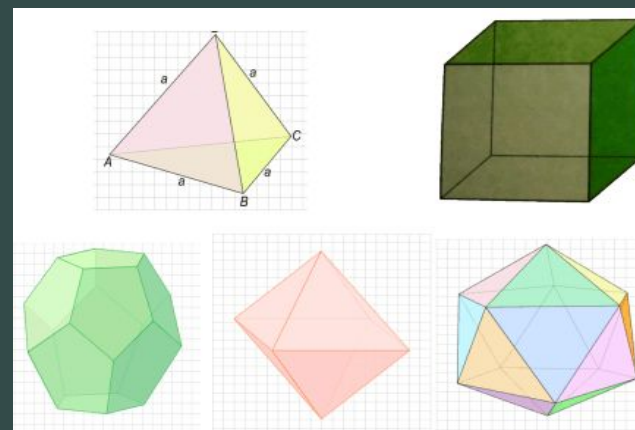


# Многогранники в математике

**Многогранник называется правильным, если он выпуклый, все его грани равны друг другу и в вершине находится одинаковое количество ребер.**

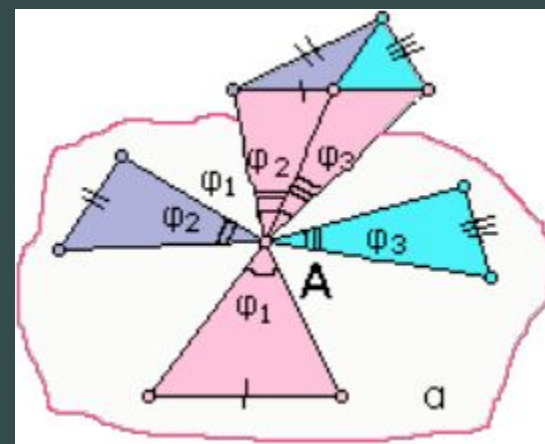
**Существует 5 правильных многогранников:**

- правильный тетраэдр;
- куб или правильный гексаэдр;
- правильный октаэдр;
- правильный додекаэдр;
- правильный икосаэдр



## Почему именно пять?

Подтвердить это можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла. Для того чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник, в каждой вершине должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником. Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше  $360^\circ$ , иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств:  $60k < 360$ ,  $90k < 360$  и  $108k < 360$ , можно доказать, что правильных многогранников ровно пять ( $k$  - число плоских углов, сходящихся в одной вершине многогранника).



Название	$\beta$	$k$	Сумма плоских углов
тетраэдр	60	3	180
октаэдр	60	4	240
икосаэдр	60	5	300
гексаэдр	90	3	270
додекаэдр	108	3	324

# Теорема Эйлера

Для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение:

$$G+B-P=2,$$

где  $G$ -число граней,  $B$ -число вершин,  $P$ - число ребер данного многогранника.

$$\text{Грани} + \text{Вершины} - \text{Рёбра} = 2.$$

Многогранник	Вершины	Грани	Рёбра	Оси симметрии	Плоскости симметрии
Тетраэдр	4	4	6	3	6
Куб	8	6	12	9	9
Октаэдр	6	8	12	9	7
Додекаэдр	20	12	30	15	15
Икосаэдр	12	20	30	15	15

## Почему правильные многогранники получили такие названия?

**Это связано с числом их граней:**

1. тетраэдр имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре,
2. гексаэдр (куб) имеет 6 граней, в переводе с греческого "эдрон" - грань, "гекса" - шесть;
3. октаэдр - восьмигранник, в переводе с греческого "окто" - восемь;
4. додекаэдр - двенадцатигранник, в переводе с греческого "додека" двенадцать;
5. икосаэдр имеет 20 граней, в переводе с греческого "икоси" - двадцать.

# Золотая пропорция в додекаэдре и икосаэдре

Додекаэдр и двойственный ему икосаэдр занимают особое место среди Платоновых тел.

Действительно, гранями додекаэдра являются пентагоны, т.е. правильные пятиугольники, основанные на золотой пропорции.

Если внимательно посмотреть на икосаэдр, то можно увидеть, что в каждой его вершине сходится пять треугольников, внешние стороны которых образуют пентагон.



## Золотая пропорция во внешней площади и объеме додекаэдра и икосаэдра

Еще одно соотношение для додекаэдра и икосаэдра, подтверждающее связь с золотой пропорцией.

Если взять икосаэдр и додекаэдр с длиной ребра, равной единице, и вычислить их внешнюю площадь и объем, то они выражаются через золотую пропорцию.

	Икосаэдр	Додекаэдр
Внешняя площадь	$5\sqrt{3}$	$\frac{15\tau}{\sqrt{3-\tau}}$
Объем	$\frac{5\tau^5}{6}$	$\frac{5\tau^3}{2(3-\tau)}$

# Многогранники в архитектуре

## Музеи Плодов

Музеи Плодов в Яманаши создан с помощью трехмерного моделирования.

## Пирамиды

Пирамиды стоят на древнем кладбище в Гизе, на противоположном от Каира, столицы современного Египта, берегу реки Нил. Некоторые археологи считают, что, возможно, на строительство Великой пирамиды 100 000 человек потребовалось 20 лет. Она была создана из более чем 2 миллионов каменных блоков, каждый из которых весил не менее 2,5 тонн.

## Александрийский маяк

В III веке до н.э. был построен **александрийский маяк**, где использовались формы правильных многогранников. Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. На его строительство ушло 20 лет, а завершен он был около 280 г. до н.э., во времена правления Птолемея II, царя Египта

## Спасская башня Кремля.

Четырехъярусная Спасская башня с церковью Спаса Нерукотворного — главный въезд в Казанский кремль. Возведена в XVI веке псковскими зодчими Иваном Ширяем и Постником Яковлевым по прозвищу «Барма». Четыре яруса башни представляют из себя куб, многогранники и пирамиду.

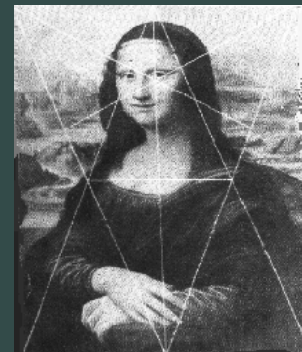


# Многогранники в искусстве



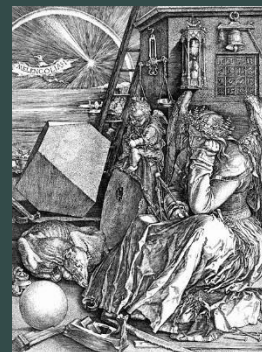
**Леонардо да Винчи** - «Портрет Монны Лизы».

Композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.



**Альбрехт Дюрер** - гравюра «Меланхолия».

На переднем плане картины изображен додекаэдр.



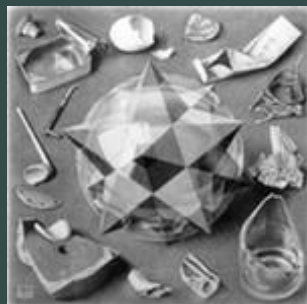
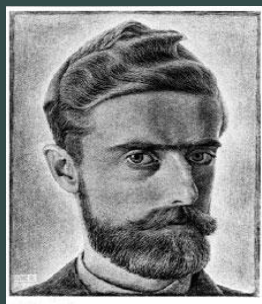
**Сальвадор Дали** – «Тайная Вечеря».

Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра.



*Тайная вечеря, 1955. Улест, масло.*

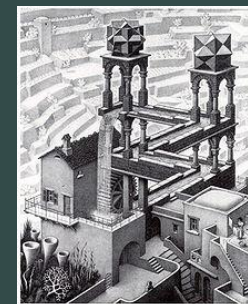
**Мауриц Корнелис Эшер** – «Порядок и хаос»,



гравюра «Звезды»,



литография «Водопад»



# Многогранники в природе, химии и биологии

Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников.



Кристалл пирита— природная модель додекаэдра.



Кристаллы поваренной соли передают форму куб



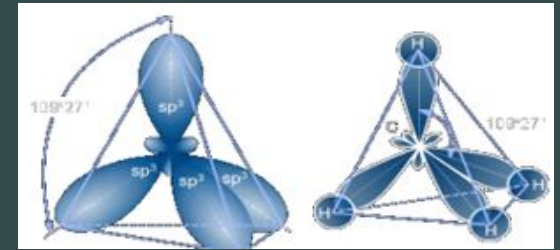
Монокристалл алюминио-калиевых квасцов имеет форму октаэдра.



Сурьенистый сернокислый натрий - тетраэдра



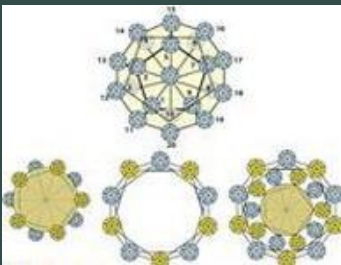
Хрусталь (призма)



В молекуле метана имеет форму правильного тетраэдра.

**Икосаэдр** оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно **формы вирусов**.

Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.



**В процессе деления яйцеклетки** сначала образуется тетраэдр из четырех клеток, затем октаэдр, куб и, наконец, додекаэдро-икосаэдрическая структура гастрюлы. И наконец, самое, пожалуй, главное – структура ДНК генетического кода жизни – представляет собой четырехмерную развертку (по оси времени) вращающегося додекаэдра!

Таким образом, оказывается, что вся Вселенная – от Метагалактики и до живой клетки – построена по одному принципу – бесконечно вписываемых друг в друга додекаэдра и икосаэдра, находящихся между собой в пропорции золотого сечения!

# Использование в жизни

С многогранниками мы постоянно встречаемся в нашей жизни – это древние Египетские пирамиды и кубики, которыми играют дети; объекты архитектуры и дизайна, природные кристаллы; вирусы, которые можно рассмотреть только в электронный микроскоп, прочные конструкции – шестиугольные соты, которые пчелы строили задолго до появления человека, книжные полки, вазы, письменный стол, шкатулки, коробочки, аквариумы, часы.



**Оригами**



**Интерьер  
дома**



**Письменный  
стол**

**шкатулки**



Да, мы живем и работаем в параллелепипеде.

**Корпус физического факультета КГУ**

Параллелепипед, поставленный вертикально на другой параллелепипед.

## Рассмотрели

исторические факты происхождения правильных многоугольников, математические законы и использование их в различных сферах деятельности

# Заключение

## Выяснили,

что идеи Евклида, Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В. Макаров и В. Морозов.

## Мы и Они считают

Ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

Их 62 вершины и середины ребер обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.

В трехмерном пространстве деления сферы ведут к созданию пяти правильных многогранников, так называемых пяти тел Платона. Формы Платона связаны с человеческим телом и природой сознания, раскрытие которой ведет не только к пониманию интеллекта Вселенной, но и к эмпирическому восприятию Бога, даруя ощущение глубокой всеобщей взаимосвязи элементов бытия.

**При работе над проектом «Мир правильных многогранников» мы прикоснулись к удивительному миру красоты, совершенства, гармонии, узнали имена учёных, художников, которые посвятили этому миру свои труды, являющиеся шедеврами науки и искусства. Ещё раз убедились, что истоки математики – в природе, окружающей нас.**



# Литература и электронные ИСТОЧНИКИ

1. "Математика - Энциклопедия для детей" М.: Аванта +, 1998
2. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. К.: Высшая школа, 1989.
3. Стахов А. Коды золотой пропорции.
4. Смирнова И.М. В мире многогранников. - М.: Просвещение, 1995
5. Журнал «Наука и техника»
6. Журнал «Квант», 1973, № 8.
7. Журнал «Математика в школе», 1994, № 2; № 3.
  
8. <http://ru.wikipedia.org>
9. <http://festival.1september.ru>
10. <http://imageshttp://images.http://images.yandexhttp://images.yandex.http://images.yandex.ru>
11. <http://http://pedsovet.su>
12. <http://museum.ru>