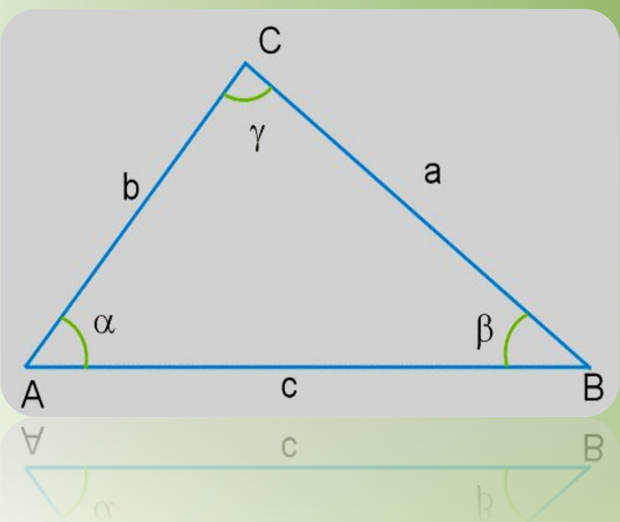
Треугольник и все что его касается.

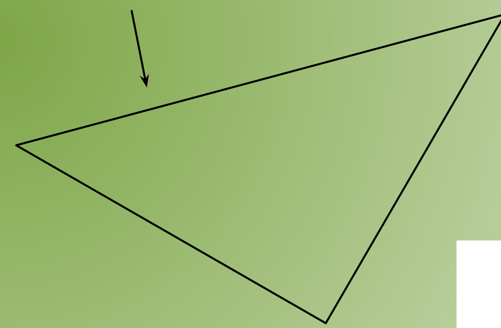
Выполнили: Терехова Анна

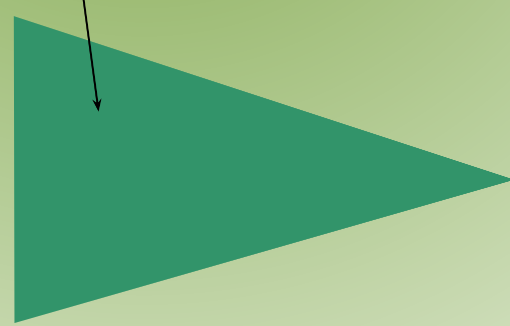
Якушева Наталья

Треугольник

- простейший многоугольник, имеющий 3 вершины (угла) и 3 стороны;
- часть плоскости, ограниченная тремя точками, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки;
- замкнутая ломаная линия с тремя звеньями.





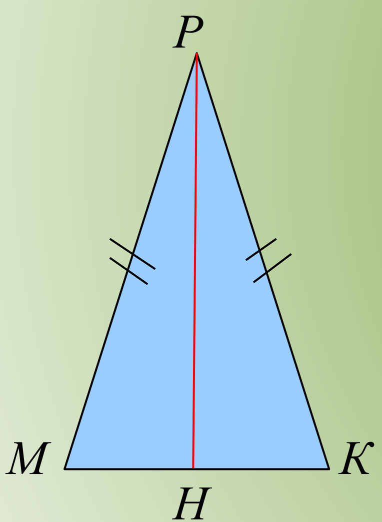


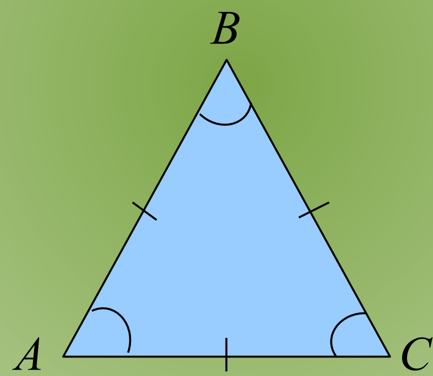
Виды треугольников по сторонам

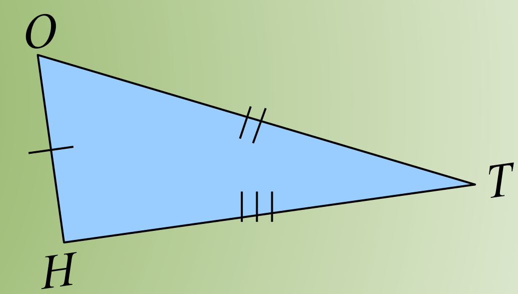
Равнобедренный

Равносторонний

Разносторонний





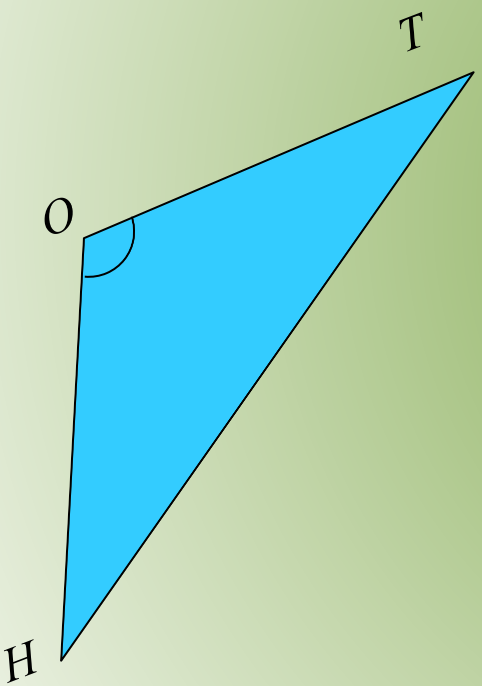


1) Углы при основании равны;
2) Медиана является биссектрисой и высотой.

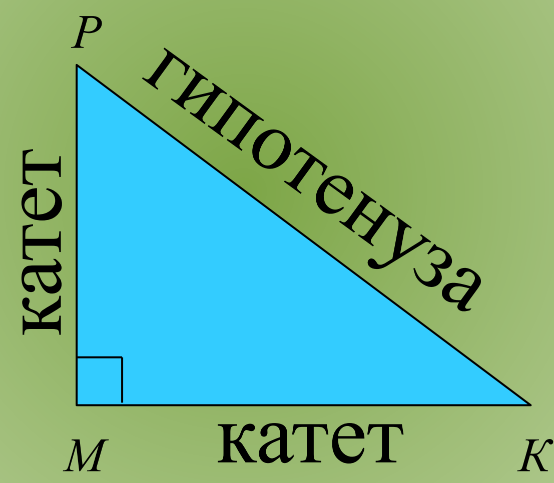
1) Все углы равны 60°.

Виды треугольников по углам

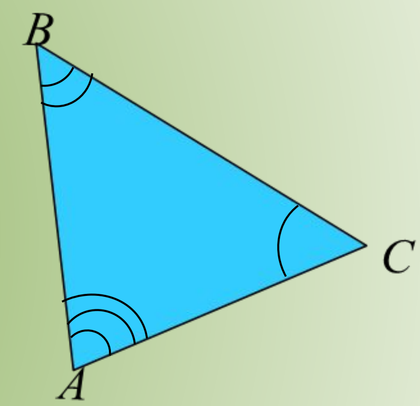
Тупоугольный



Прямоугольный



Остроугольный

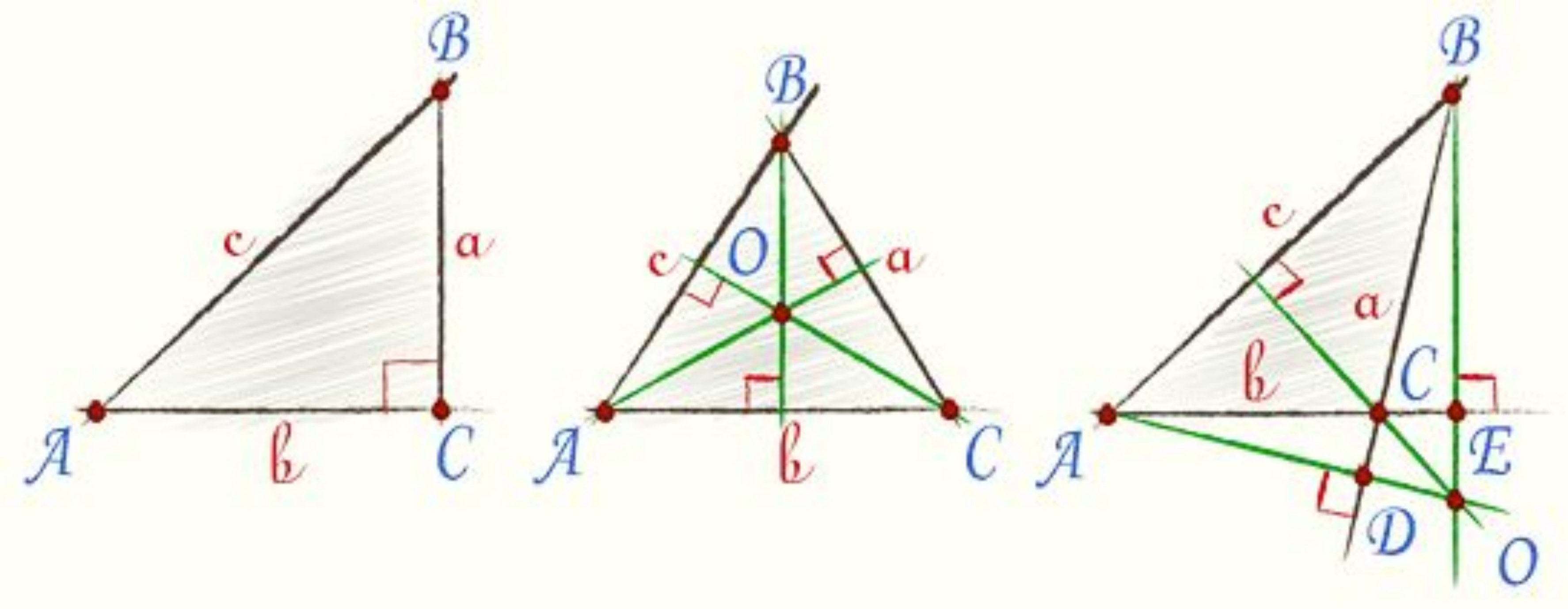


$\angle PMK = 90°$-прямой

- **Свойства медиан треугольника:**
- 1. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1(считая от вершины треугольника).
- 2. Медиана делит треугольник, равных по площади на два треугольника.

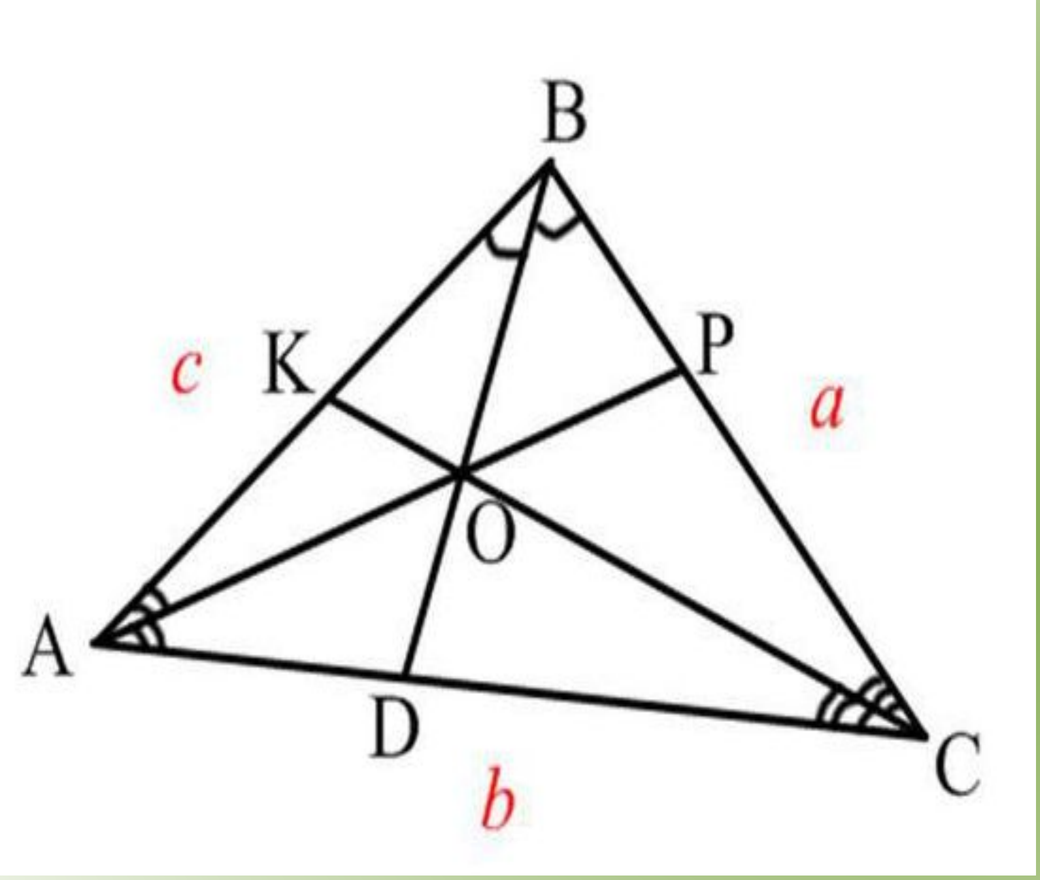
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Высота треугольника.



$$H = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Биссектриса треугольника.



Свойства биссектрис треугольника:

1. Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

2.Биссектриса треугольника делит площадь треугольника в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам.

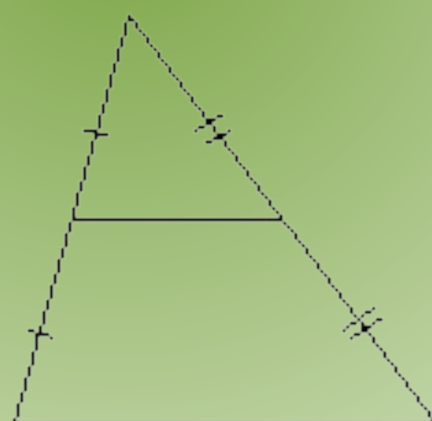
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



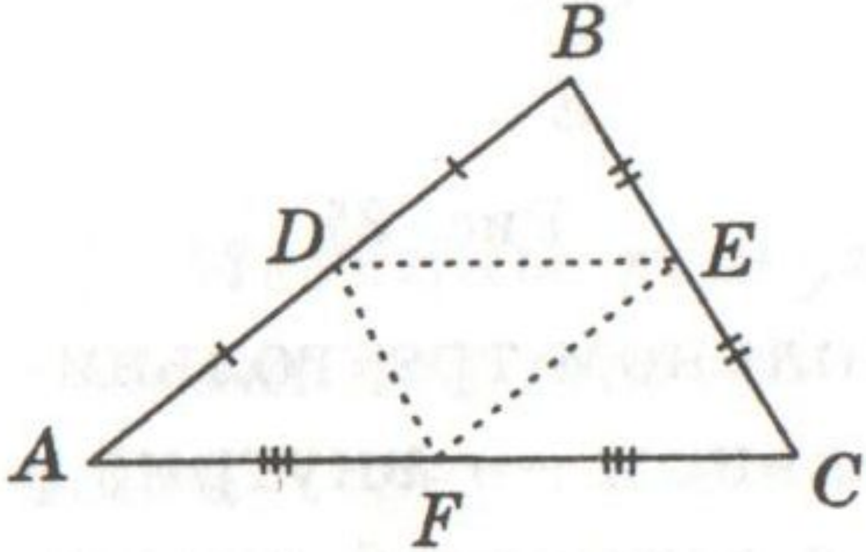


Рис. 37

2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный треугольник. Площадь отсекаемого треугольника относится к площади основного треугольника в отношении 1:4.

Длина любой стороны треугольника не превосходит сумму длин двух других.

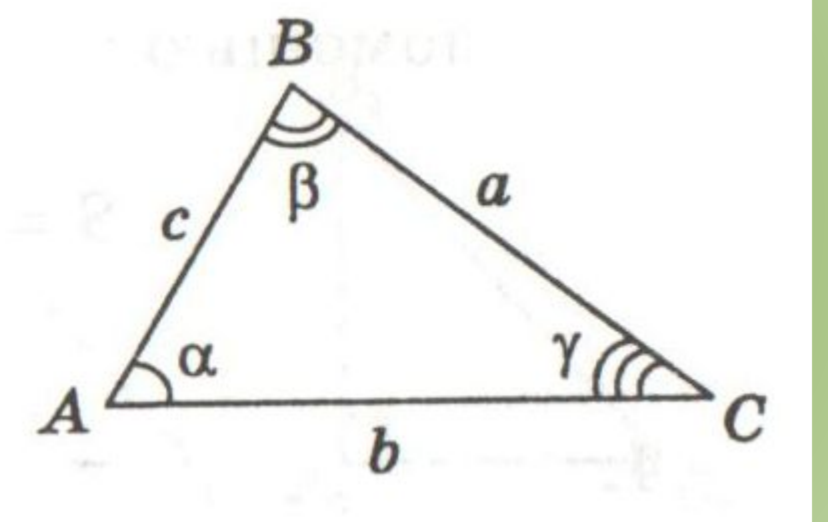
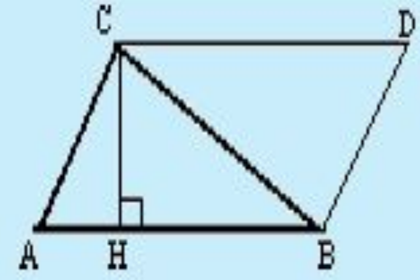


Рис. 38

Площадь треугольника.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.



Пусть S - площадь треугольника ABC. Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем что

S = 1/2*AB*CH

Достроим треугольник ABC до параллелограма ABDC так, как показано на рисунке. Треугольники ABC и BCD равны по трем сторонам (BC - их общая сторона, AB = CD и AC = BD как противоположные стороны параллелограма ABCD), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограма ABCD, т.е.

S = 1/2*AB*CH

Теорема доказана.

Следствие 1 : Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов

Следствие 2 : Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

$$1.\ S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\ \sin\alpha$$

Доказательство:

Из основной формулы $S=\frac{1}{2}h_a\cdot a$.

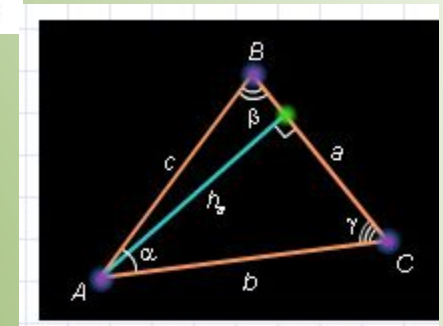
С другой стороны $h_a=b\cdot\ \sin\gamma$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, откуда $a=\frac{c\cdot\ \sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Подставляя выражения для h_a и a в основную формулу, получим искомое выражение.

$$2.\ S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$



$$\sin\alpha=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(2bc^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)}=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(a^2-\left(b-c\right)^2\right)\left(\left(b+c\right)^2-a^2\right)}=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a+c-a\right)\left(b+c+a\right)}=$$

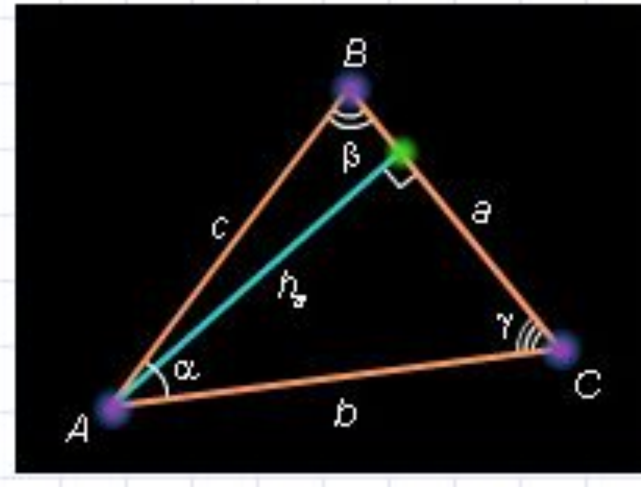
$$=\frac{4}{2bc}\sqrt{\left(p-b\right)\left(p-c\right)\left(p-a\right)p},$$

где $p=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$. Подставляя полученное выражение в формулу $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$, получим искомую формулу.

$$2.\ S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$$

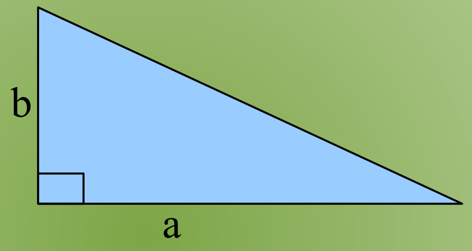
$$S=\frac{abc}{4R}.$$

$$S=pr.$$

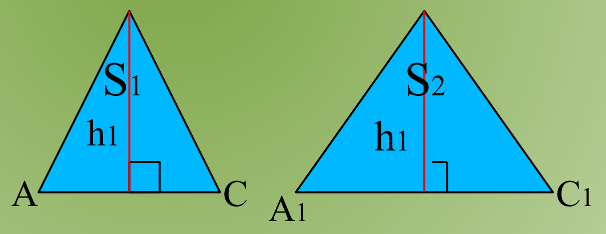


Площадь треугольника

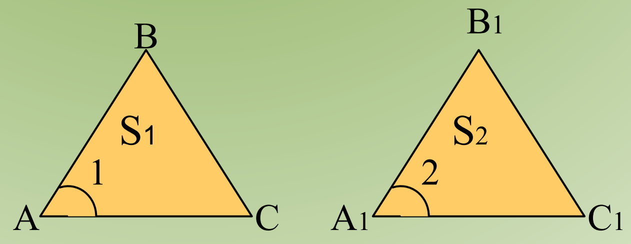
$$S\ (\text{п/у}\triangle) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$



$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



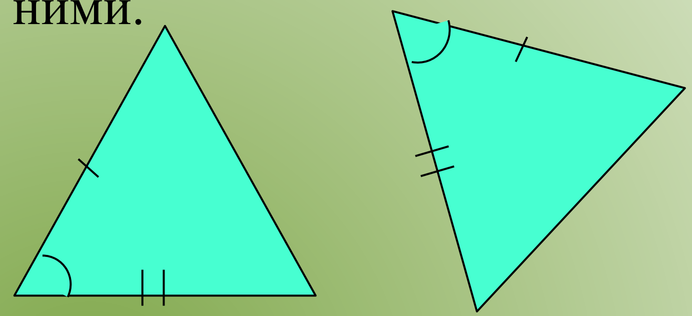
$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$$



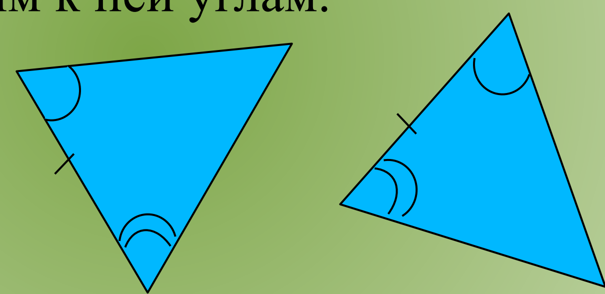
Равенство треугольников

Признаки равенства треугольников:

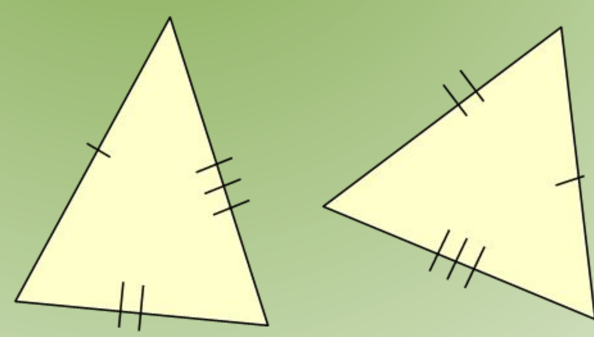
1. По двум сторонам и углу между ними.



2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.



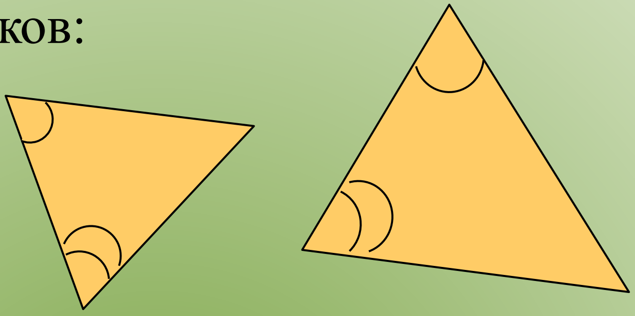
3. По трём сторонам.



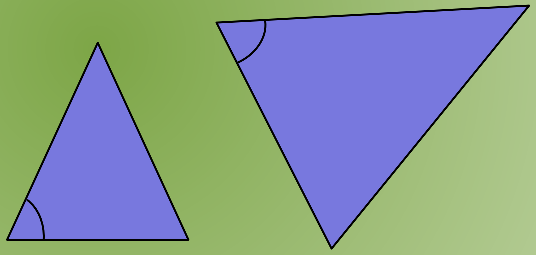
Подобие треугольников

Признаки подобия треугольников:

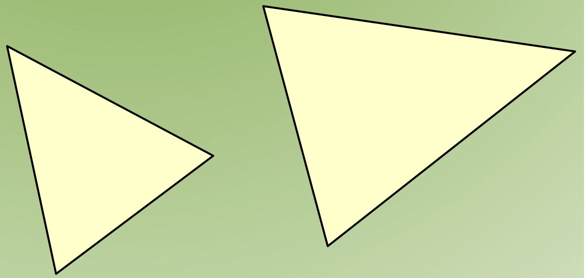
1. По двум углам.



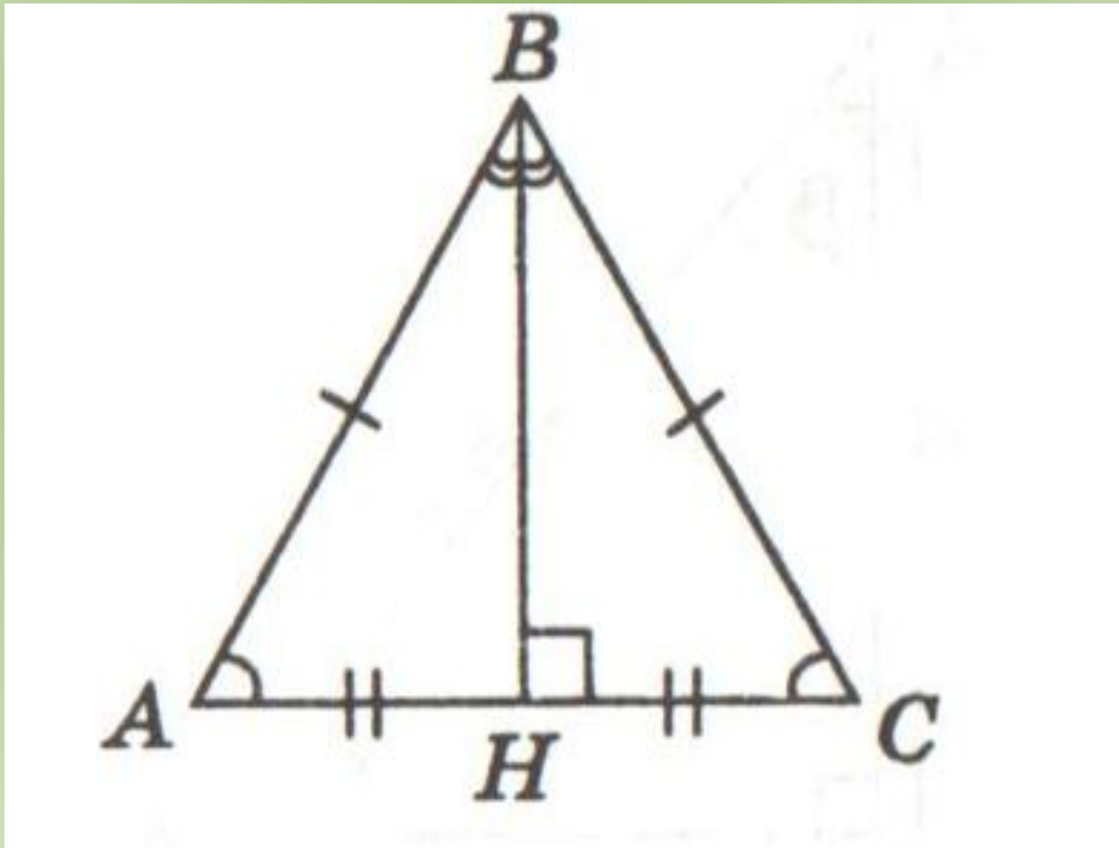
2. По двум сторонам и углу между ними.



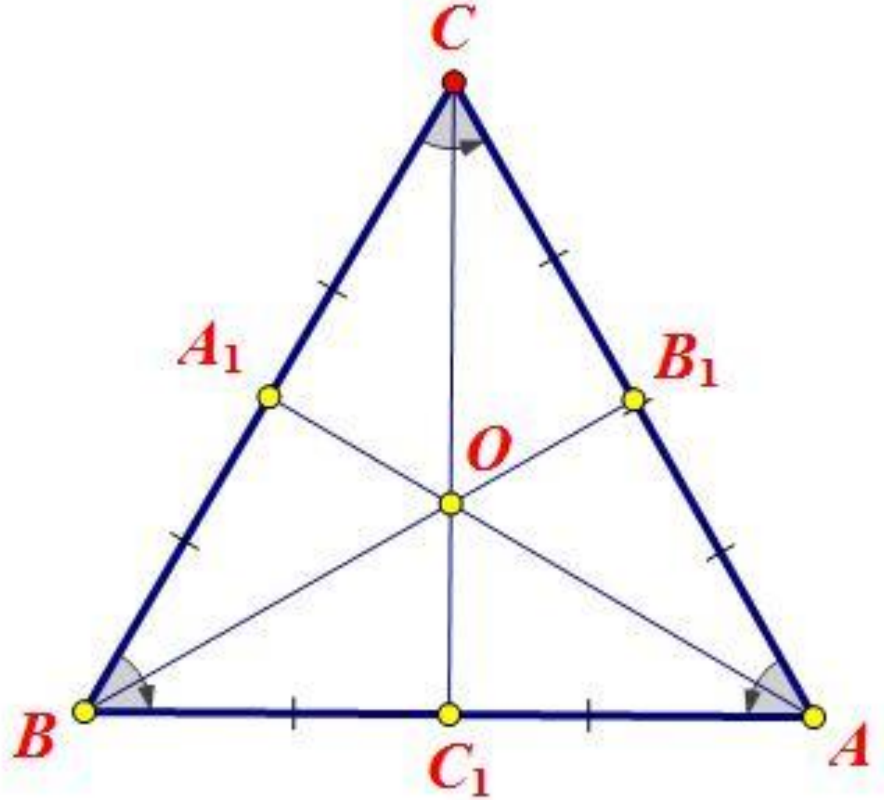
3. По трём сторонам.



Равнобедренный треугольник.



Равносторонний треугольник.



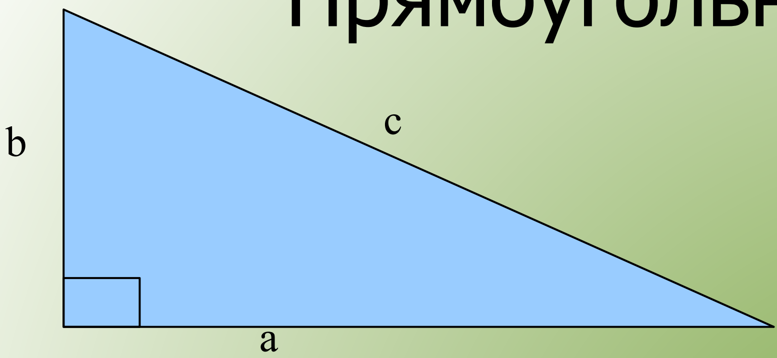
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

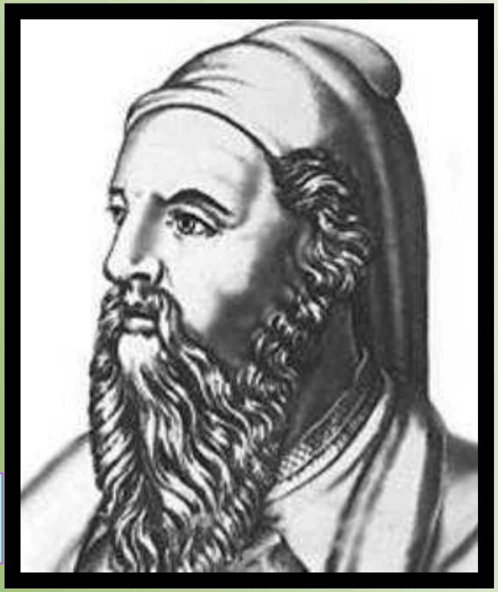
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

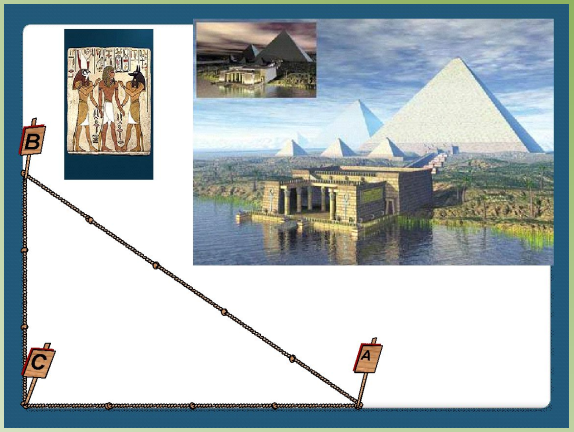
Прямоугольный треугольник.



Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$





Доказательство теоремы Пифагора

Дано: a,b- катеты, c-гипотенуза.

Доказать: $a^2+b^2=c^2$.

Доказательство:

Достроим до квадрата со стороной (a+b).

$S_1=(a+b)^2$

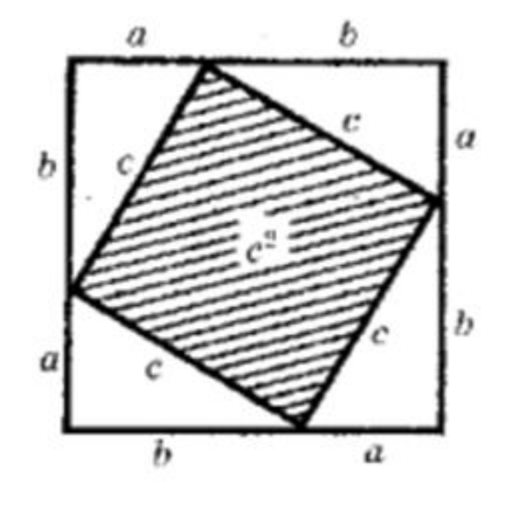
$S_2=4(1/2ab)+c^2$

Приравняем площади: $S_1=S_2$.

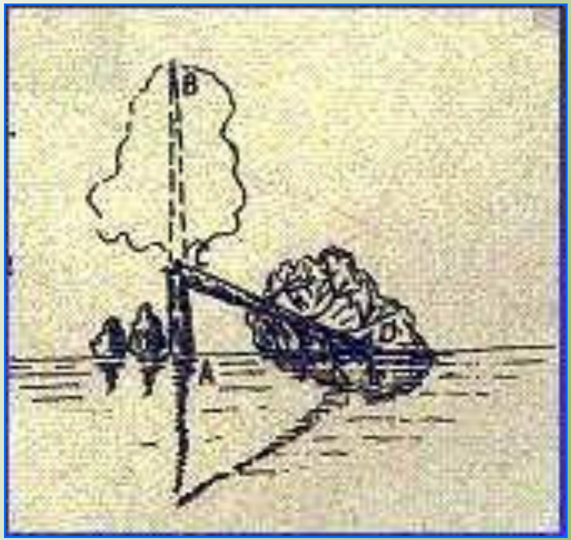
$(a+b)^2=4(1/2ab)+c^2$

$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$

$a^2+b^2=c^2$

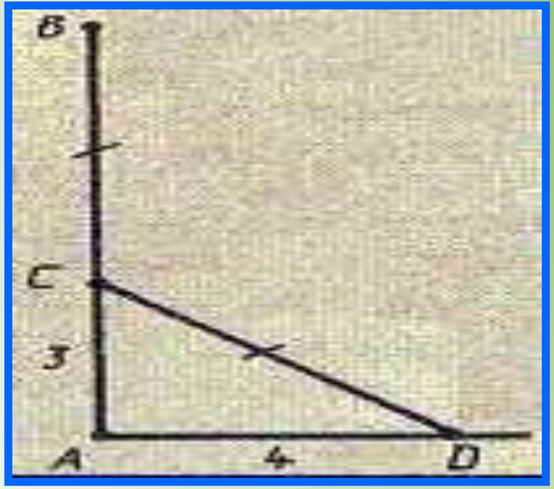


Задача



Вот задача индийского математика 12в. Бхаскары

На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой с теченьем реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река в четыре лишь фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?



Решение:

По теореме Пифагора находим CD:

$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow CD = 5.$

Высота тополя равна: CB+CA. Т.к.

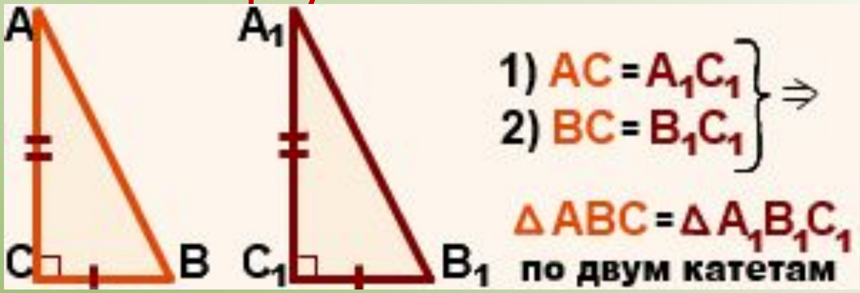
$CD = CB \Rightarrow$

$AB = AC + CD = 3 + 5 = 8.$

Ответ: высота тополя 8 футов.

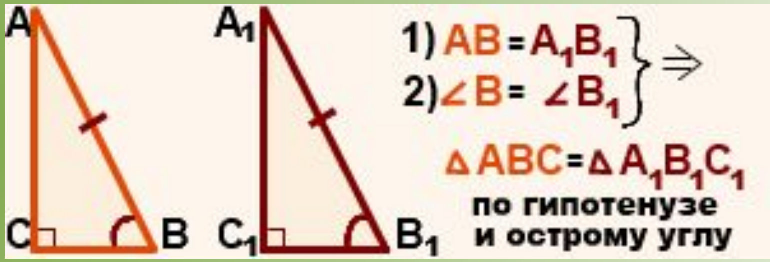
Признаки равенства прямоугольных треугольников.

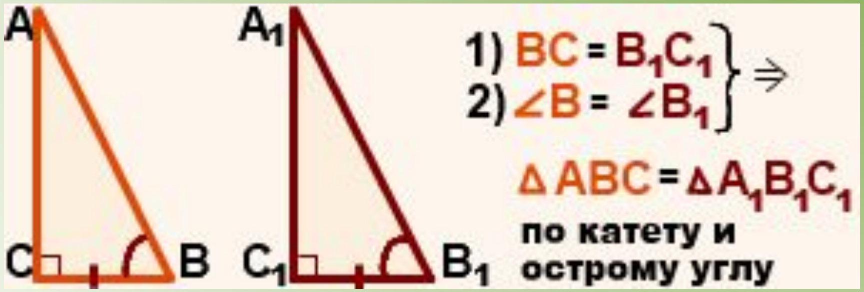
Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам



Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе

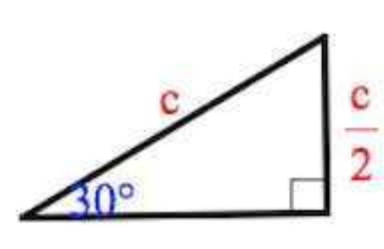
Признак равенства по гипотенузе и острому углу





Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и острому углу

Свойства прямоугольного треугольника



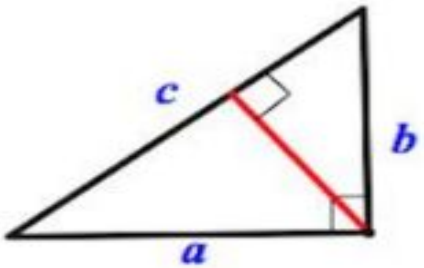
1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90˚.

2. Катет, противолежащий углу в 30˚, равен половине гипотенузы.

3. И обратно, если в треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то напротив него лежит угол в 30˚**.**

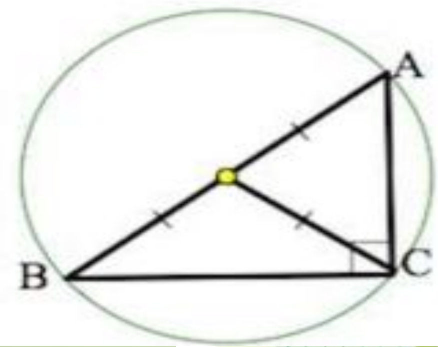
4. Площадь S прямоугольного треугольника с катетами a, b: $S = \frac{1}{2}ab$

5. Высота h прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе выражается через катеты a, b и гипотенузу c следующим образом: $h = \frac{ab}{c}$

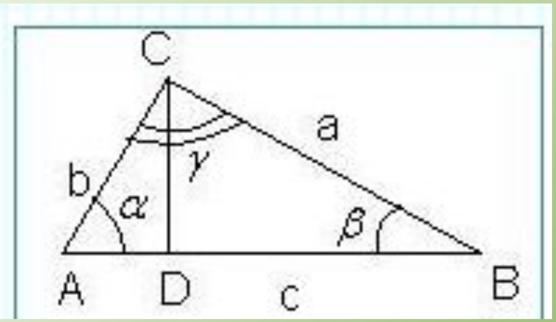


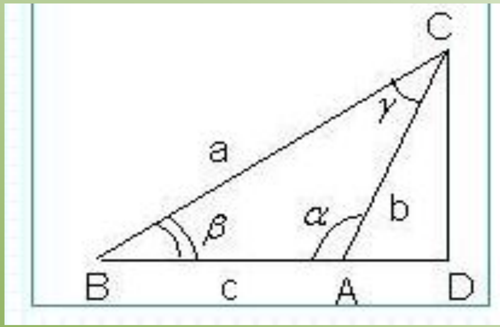
6. Центр описанной окружности – есть середина гипотенузы.

7. Радиус R описанной окружности есть половина гипотенузы c: $R = \frac{c}{2}$



Теорема синусов.





Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Рассмотрим ΔABC со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ. Докажем, что

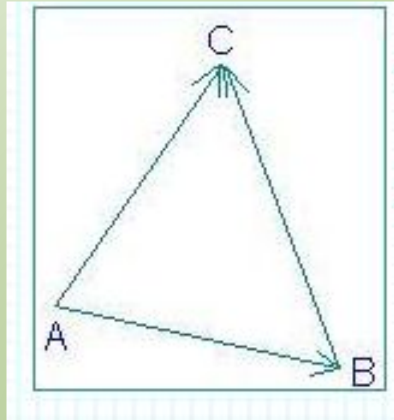
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Из вершины C треугольника ABC опустим высоту CD . Из прямоугольного ΔACD, если α – острый угол, получаем $CD=b\sin\alpha$. Если α – тупой угол, то $CD=b\sin(180^\circ-\alpha)=b\sin\alpha$.

Аналогично из прямоугольного ΔBCD получаем $CD=a\sin\beta$. Таким образом, $a\sin\beta=b\sin\alpha$, т.е.

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$. Опуская высоту в треугольнике ABC из вершины A , аналогично имеем $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Итак,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$



Теорема косинусов.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos a.$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Дан ΔABC. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ (рис. 13). Очевидно, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Возведем это равенство скалярно в квадрат:

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2$$

между сторонами AB и AC. Теорема доказана.

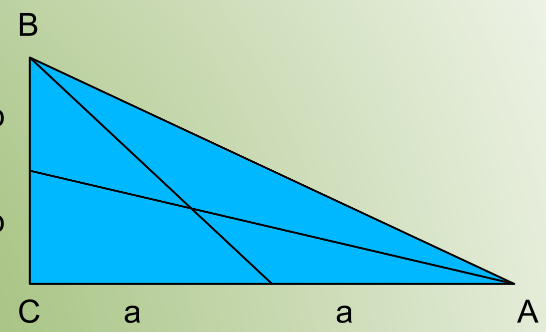
Задача

Дано: в прямоугольном треугольнике медианы катетов $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$.

Найти: S∆ABC.

Решение:

Каждая из медиан катетов образует с прямым углом прямоугольный треугольник. Обозначим длину половины каждого катета как a и b. Тогда, по теореме Пифагора получим:



$$a^2 + 4b^2 = (\sqrt{73})^2$$

$b^2 + 4a^2 = (\sqrt{52})^2$, откуда $a^2 = 73 - 4b^2$, подставим выражение во второе уравнение $b^2 + 4\cdot(73 - 4b^2) = 52$

$$\begin{cases} b^2 + 292 - 16b^2 = 52 \\ 15b^2 = 240,\ b^2 = 16,\ b = 4 \end{cases}$$

Соответственно, $a^2 = 73 - 4\cdot 16 = 9$, $a = 3$.

Таким образом, катеты прямоугольного треугольника равны (2a и 2b) 8 и 6 см.

Откуда площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 = 24\ см^2.$$

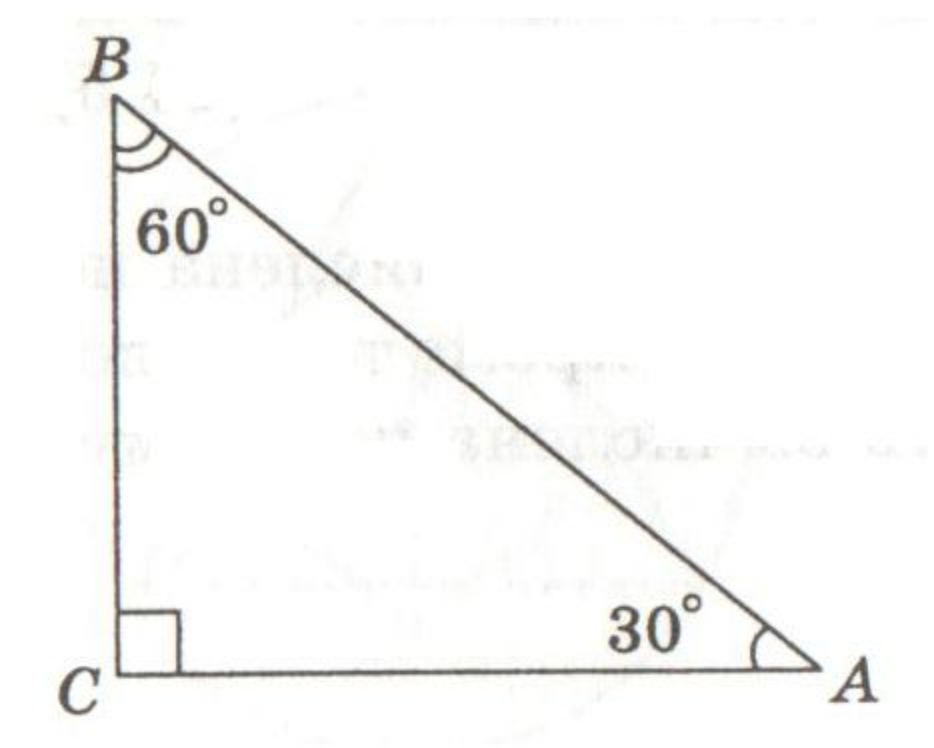
Ответ: Площадь прямоугольного треугольника равна 24 $см^2$.

$$\sin(a) = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(a) = \frac{AC}{AB}$$

$$tg(a) = \frac{BC}{AC}$$

$$ctg(a) = \frac{AC}{BC}$$



α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 1. Даны гипотенуза $c = 72$ см и угол $\alpha = 60°$. Найти значения угла β и катетов.

Решение. $\beta = 90° - 60° = 30°$.

$$a = c\sin\alpha = 72 \cdot \sin 60° = \frac{72 \cdot \sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \approx 62,36 \ \text{(см)};$$

$$b = c \cdot \cos\alpha = 72 \cdot \cos 60° = 72 \cdot \frac{1}{2} = 36 \ \text{(см)}.$$

Ответ: $a = 36\sqrt{3}$ см, $b = 36$ см, $\beta = 30°$.

Задача 2. Даны катеты $a = 8{,}3$ см, $b = 12{,}4$ см. Найти значения гипотенузы и острых углов.

Решение. Находим гипотенузу по теореме Пифагора (14.1):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8,3^2 + 12,4^2} \approx 14,9 \ \text{(см)}.$$

По формуле (15.3) находим тангенс угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8,3}{12,4} = 0,67; \ \alpha \approx 34°.$$

Определяем угол β по формуле (15.7) $\beta = 90° - \alpha = 90° - 34° \approx 56°$.

Ответ: $c \approx 14{,}9$ см, $\alpha \approx 34°$, $\beta \approx 56°$.

Задача 2. Даны катет $a = 24{,}6$ см и угол $\alpha = 63°$. Найти значения угла β, катета b и гипотенузы c.

Решение. $\beta = 90° - 63° = 27°$.

$\beta = a \operatorname{tg} \beta = 21{,}6 \operatorname{tg} 27° = 24{,}6 \cdot 0{,}509 \approx 12{,}52$ (см).

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{24{,}6}{\sin 63°} = \frac{24{,}6}{0{,}891} \approx 27{,}6 \text{ (см)}.$$

Ответ: $\beta = 27°$, $b \approx 12{,}52$ см, $c = 27{,}6$ см.

Задача 1. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Дано: a, b, γ. Найти: c, α, β.

Решение. 1) по формуле (17.2)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma};$$

2) по формуле (17.3)

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол α находим с помощью калькулятора или по таблице;

3) используя формулу (10.1), получим

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

Задача 2. Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.

Дано: a, β, γ. Найти: α, b, c.

Решение. 1) $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

2) используя формулу (17.1), получим

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Задача 3. Решение треугольника по трем сторонам.

Дано: a, b, c. Найти: α, β, γ.

Решение. 1) используя формулу (17.3), получаем

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол α находим с помощью калькулятора или по таблице;

2) используя формулу (17.4), получаем

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

3) $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

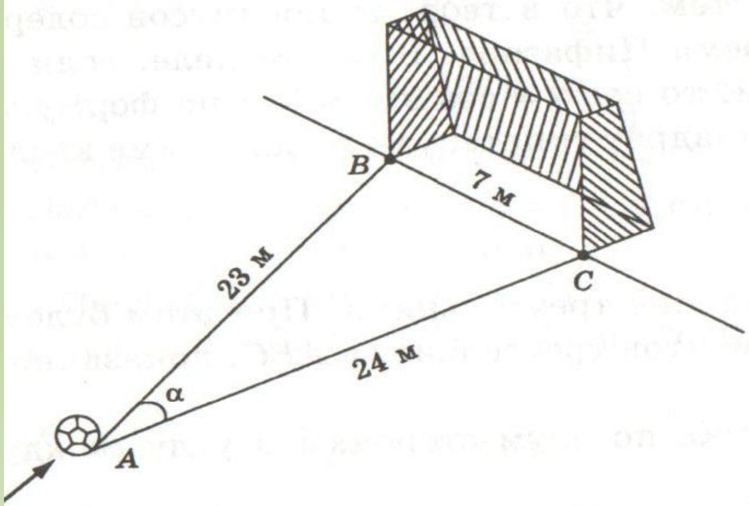


Рис. 52

Пример. Футбольный мяч находится в точке A футбольного поля на расстоянии 23 м и 24 м от оснований B и C стоек ворот (рис. 52). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот 7 м.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 14$ м и $a = BC = 7$ м.

Эти данные позволяют решить треугольник ABC по трем его сторонам (см. задачу 3):

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 23 \cdot 24} = \frac{1056}{1104} = 0,95652.$$

По таблицам определяем угол $\alpha = 16°\ 57'$.

3. *Отношение площадей подобных треугольников*

Теорема. *Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причем коэффициент подобия равен k.

Площади треугольников можно вычислить по формулам

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha; \quad (18.3)$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\alpha_1 . \quad (18.4)$$

У подобных треугольников углы равны, следовательно, $\alpha = \alpha_1$. Разделив площадь $\triangle ABC$ на площадь $\triangle A_1B_1C_1$, получим

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = k^2,$$

так как у подобных треугольников $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k$, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = k$. Теорема доказана.

1. *Вписанные треугольники*

Треугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около этого треугольника (рис. 106).

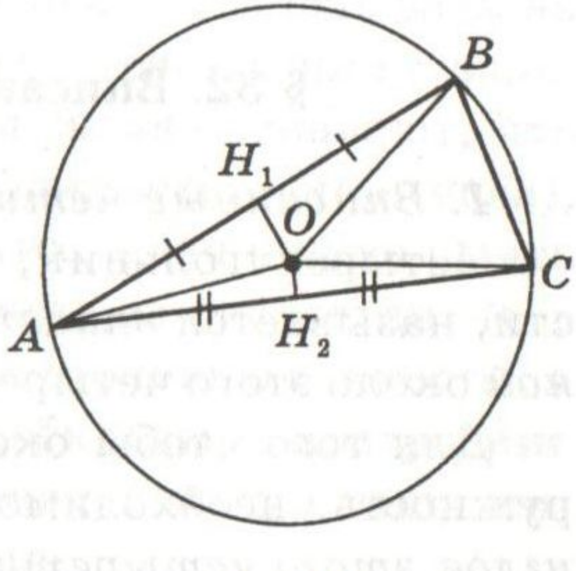


Рис. 106

Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центром описанной около треугольника окружности является точка O пересечения серединных перпендикуляров. Эта точка лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный; вне треугольника — если треугольник тупоугольный; на середине гипотенузы — если треугольник прямоугольный.

Радиус окружности, описанной около произвольного треугольника, вычисляется по формулам

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sin\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

2. *Описанные треугольники*

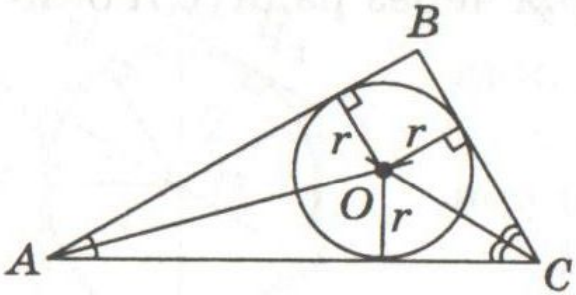


Рис. 107

Треугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около этой окружности, а окружность — *вписанной* в этот треугольник.

Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Центр O вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника (рис. 107).

Радиус r окружности, вписанной в произвольный треугольник, вычисляется по формуле

$$r = \frac{S_\Delta}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где p — полупериметр треугольника, S_Δ — площадь треугольника.

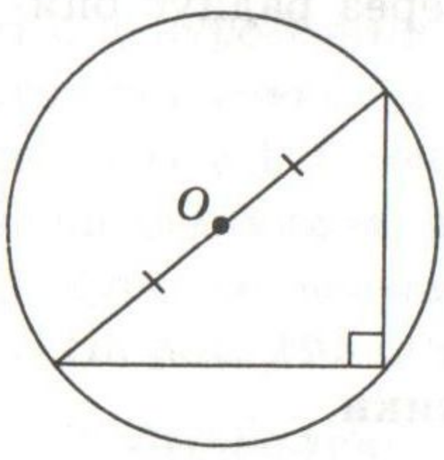
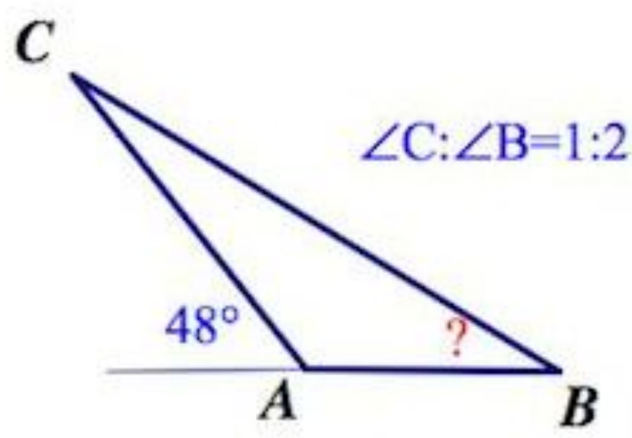


Рис. 108

Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Гипотенуза является диаметром окружности, описанной около прямоугольного треугольника (рис. 108).

Задача 1.

Один из внешних углов треугольника равен $48°$. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 1:2. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.



Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, поэтому $48^\circ = \angle B + \angle C.$

А так как по условию углы C и B (считаем угол B большим из двух) относятся друг к другу как $1:2$, то пусть $\angle C = x, \ \angle B = 2x$ градусов.

Составим уравнение:

$$x + 2x = 48;$$

$$3x = 48;$$

$$x = 16;$$

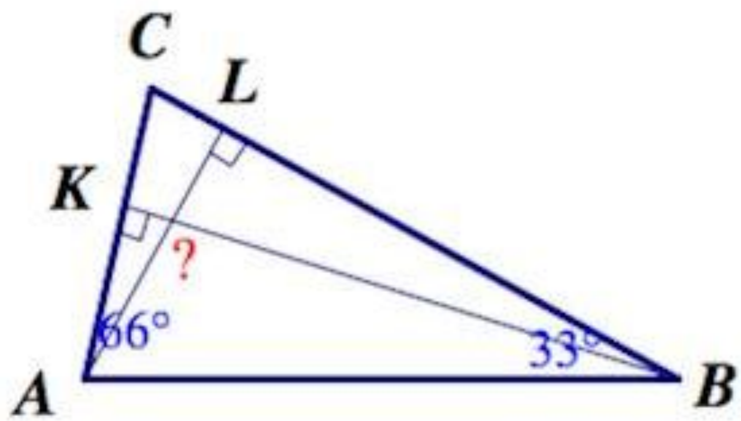
Тогда $\angle B = 2 \cdot 16^\circ = 32^\circ;$

Ответ: 32.

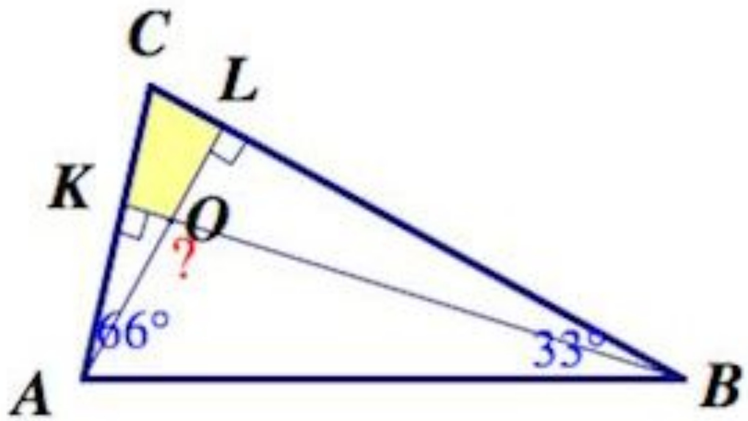
Задача 2.

Два угла треугольника равны 66° и 33°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

Решение:



Рассмотрим четырехугольник $KCLO$, где O – точка пересечения высот треугольника.



В нем $\angle C = 180° - (66° + 33°) = 81°$;

Значит, нам известны три угла четырехугольника ($\angle K = \angle L = 90°$).
Поэтому $\angle KOL = 360° - (90° + 90° + 81°) = 99°$;

Ответ: 99.

Спасибо за внимание!