Электромагнитные волны

- Волновое уравнение электромагнитного поля
- Плоская электромагнитная волна
- Связь мгновенных значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$
- Энергия электромагнитной волны
- Импульс электромагнитной волны

Волновое уравнение электромагнитного поля

- Из уравнений Максвелла следует вывод о существовании электромагнитных волн. Рассмотрим однородную нейтральную непроводящую среду ($\rho=0$, $j=0$) :

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \qquad \nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}},$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \qquad \nabla \vec{D} = 0$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Продифференцируем второе уравнение по времени и затем используем первое уравнение

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0})) = \nabla \times (\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}) =$$

$$= \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla \times (-\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\nabla(\nabla\vec{E}) - (\nabla\nabla)\vec{E}\right] = \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla^2 \vec{E}$$

- Мы воспользовались формулой
- [a[bc]] = b(ac) – c(ab), и тем что

$\nabla\vec{E} = 0$. Аналогичные преобразования можно проделать и для вектора $\vec{H}$. В результате получаем два волновых уравнения:

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Если ε=1 и μ=1 (в вакууме), то коэффициент $\varepsilon_0\ \mu_0$ в уравнении есть величина связанная со скоростью распространения электромагнитной волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\cdot 10^8\ \frac{м}{с}$$

Тогда скорость в среде равна:

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Плоская электромагнитная волна

Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям плоской волны. При этом E и H не будут зависеть от y и z, и соответствующие производные будут равны нулю. Тогда уравнения Максвелла :

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\left(\dot{H}_x\vec{e}_x + \dot{H}_y\vec{e}_y + \dot{H}_z\vec{e}_z\right)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0\left(\dot{E}_x\vec{e}_x + \dot{E}_y\vec{e}_y + \dot{E}_z\vec{e}_z\right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

примут вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \dot{H}_y, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_z, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_z,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

Отсюда следует, что E_x и H_x не зависят ни от x, ни от t. Это значит, что отличные от нуля E_x и H_x могут быть только однородными постоянными полями, накладывающимися на поле волны. А в самой волне они равны нулю. Это значит, что электромагнитная волна является поперечной.

Кроме того, векторы **Е** и **Н** в электромагнитной волне взаимно ортогональны. Возьмём пару уравнений

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_z \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_y$$

Из них видно, что изменение во времени магнитного поля, направленного вдоль оси Z, порождает электрическое поле E_y вдоль оси У. И наоборот. Ни поля E_z, ни поля H_y при этом не появляется, а это и значит, что **Е** ⊥ **Н.**

Связь мгновенных значений Е и Н

Когда плоская волна распространяется вдоль положительно-го направления оси X, то в общем случае можно записать

$$E_y = E_y(t - x/\upsilon), \qquad H_z = H_z(t - x/\upsilon).$$

Введя обозначение φ = t - x/v, найдём производные:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\left(-\frac{1}{\upsilon}\right), \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\cdot 1.$$

Подставив эти выражения в уравнение $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_z$

получим

$$\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu\mu_0}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

Проинтегрировав, получим $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z + const$

где константа обусловлена наличием постоянного электрического и магнитного полей. Нас интересует только переменное поле, поэтому константу положим равной нулю:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z$$

Последнее означает: E и H взаимно ортогональны, изменяются синфазно – одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль. Они составляют правовинтовую систему с направлением распространения волны.

Если бы волна распространялась в отрицательном направлении, то Е и Н изменялись бы в противофазе:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = -\sqrt{\mu\mu_0}H_z$$

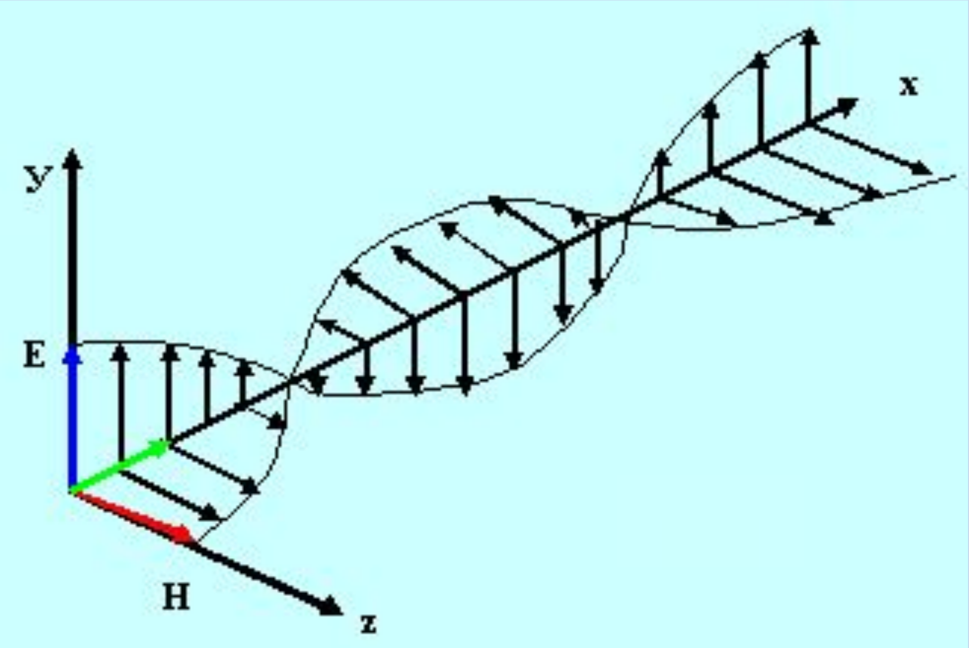
хотя сами вектора и составляли бы по-прежнему правовинтовую систему.

Все рассуждения не зависят от выбора направления распространения, поэтому в дальнейшем будем опускать индексы y и z перед проекциями векторов.

Уравнение плоской гармонической электромагнитной волны будет иметь вид:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx),$$

$$H = H_m \cos(\omega t - kx)$$



Энергия электромагнитной волны

В обычной изотропной среде плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотностей энергий:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{EH}{\upsilon}$$

Умножив на скорость волны, получим плотность потока энергии:

$$S = w\upsilon = EH$$

Векторы E и H взаимно ортогональны. Направление вектора [**EH**] совпадает с направлением переноса энергии, поэтому можно определить вектор плотности потока энергии так

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$$

его надо называть **вектором Пойнтинга**.

Интенсивность I бегущей волны равна, по определению, среднему значению плотности потока энергии <*S*> :

$$I = \langle S \rangle = \langle w\upsilon \rangle = \langle \upsilon\varepsilon\varepsilon_0 E_m{}^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2$$

Импульс электромагнитной волны

Перенос энергии волной сопровождается и переносом импульса. Из теории относительности известно, что импульс объекта с нулевой массой покоя движущегося со скоростью света (фотона): $p = \frac{W}{c}$, где W- энергия фотона электромагнитной волны.

Связь для плотности импульса и плотности энергии (величин отнесённых к единице объёма) будет та же самая:

$$p = \frac{w}{c} = \frac{S/\upsilon}{c} = \frac{\left[\vec{E}\vec{H}\right]}{c^2}$$

т.к. (v=c)

Если падающая нормально на поверхность волна полностью поглощается, то единице площади поверхности за dt сообщается импульс, заключённый в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой cdt, т.е.

$$dp = \frac{w}{c} c dt = w dt$$

Но импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению р* на поверхность тела . В случае гармонической волны эта величина пульсирует с большой частотой, и практический интерес представляет только её среднее значение по времени:

$$p^* = \langle w \rangle$$

Рассмотрим механизм передачи импульса телу, т.е. как возникает давление. Электрическое поле волны Возбуждает в теле ток плотности ***j***=σ***E*****,** а магнитное поле волны будет действовать на него по закону Ампера – с силой, объёмная плотность которой равна

$$\vec{F}_{ед} = \left[\vec{j}\vec{B}\right] = \sigma\left[\vec{E}\vec{B}\right]$$

Отсюда следует, что сила действует в направлении распространения волны.