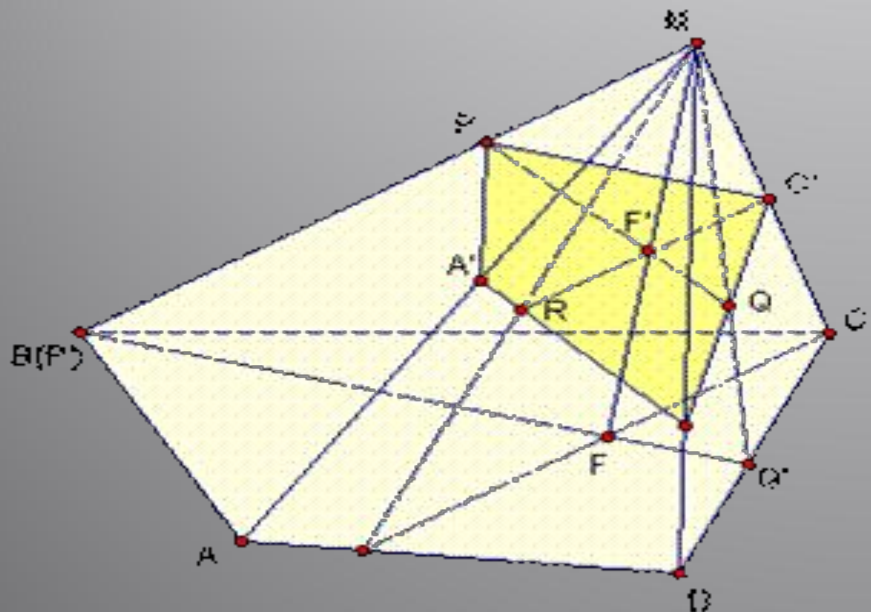
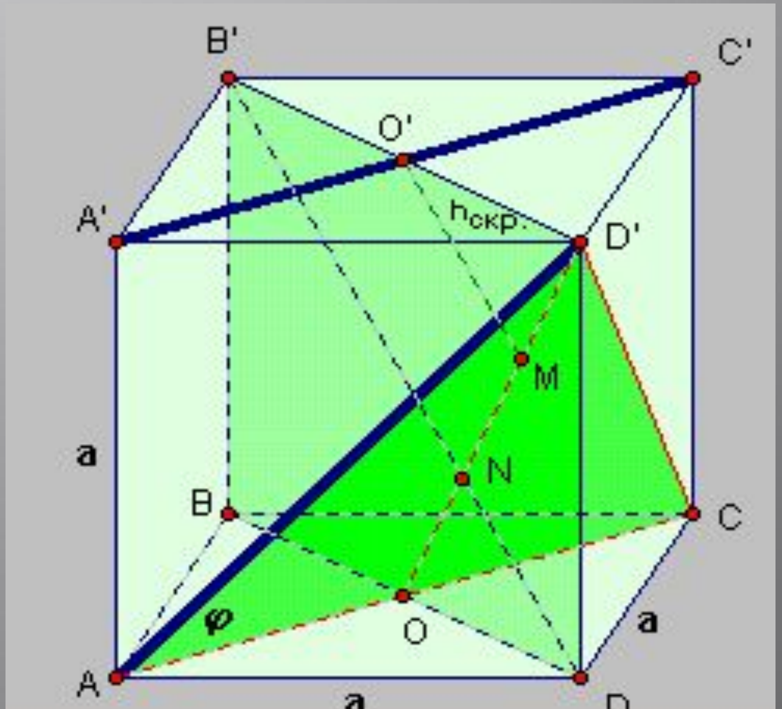
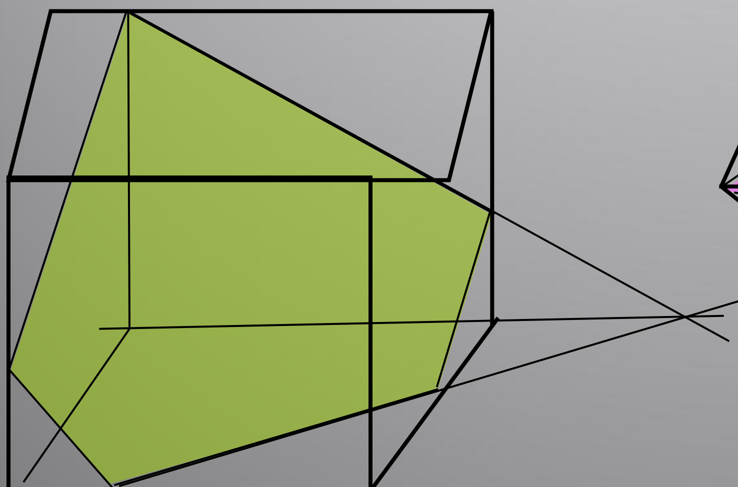
Построение сечений многогранников

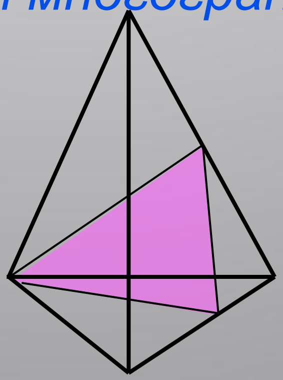


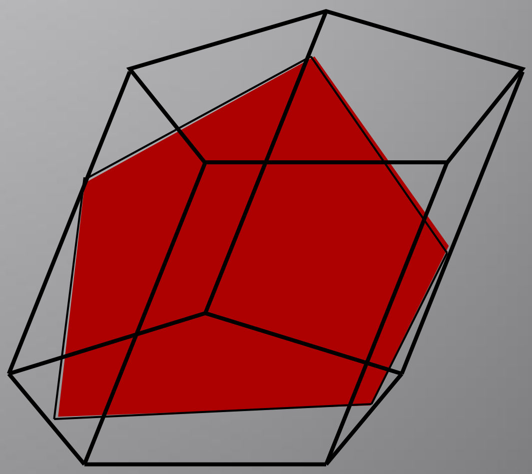


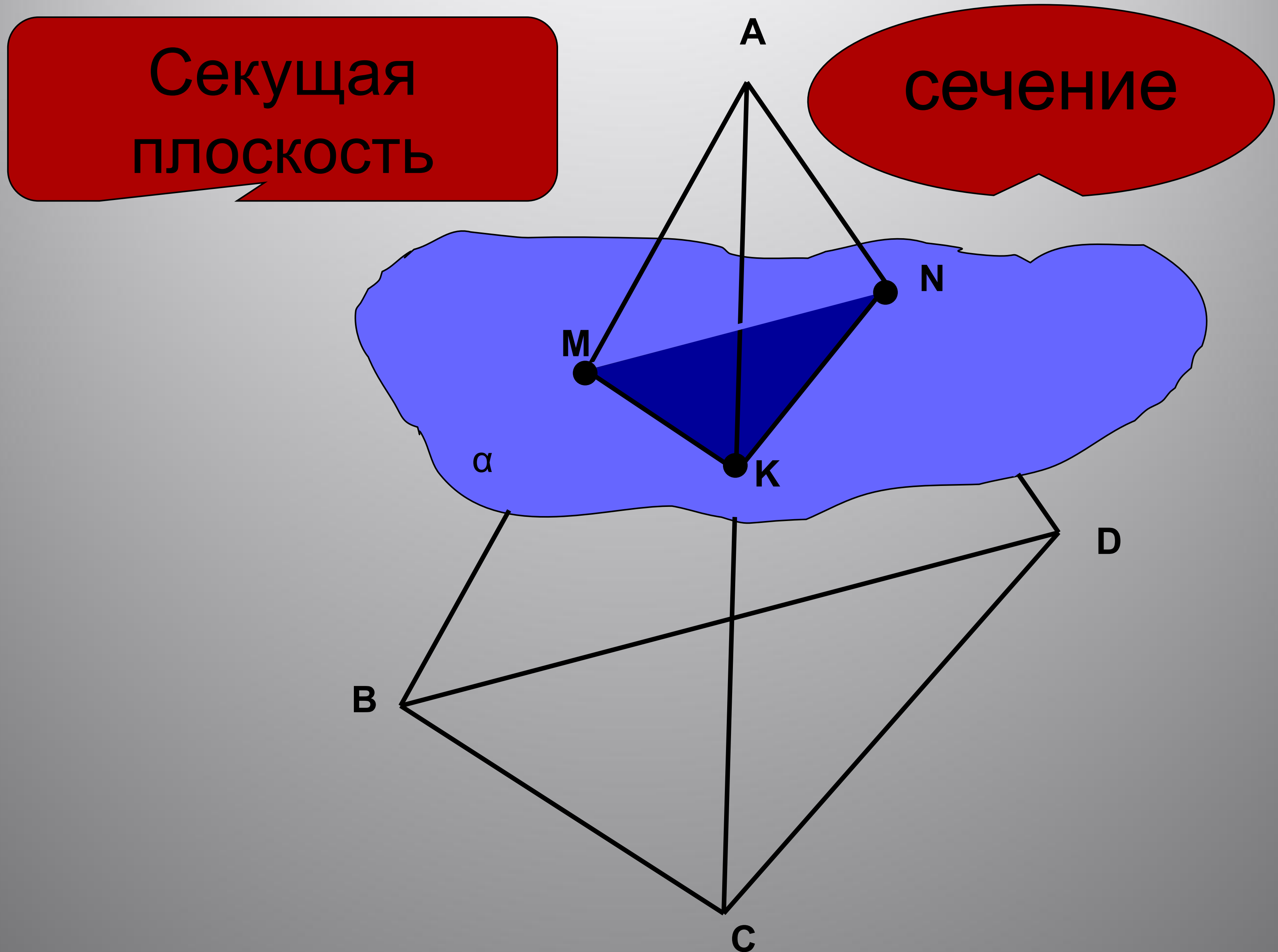
Определение сечения.

- *Секущей плоскостью многогранника* назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.
- *Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.*

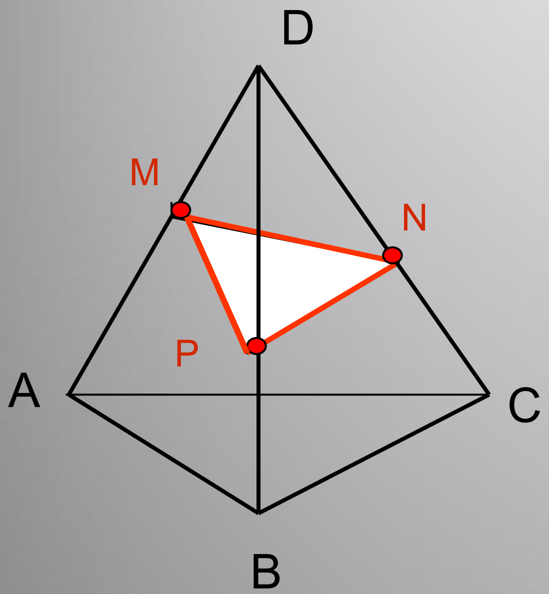


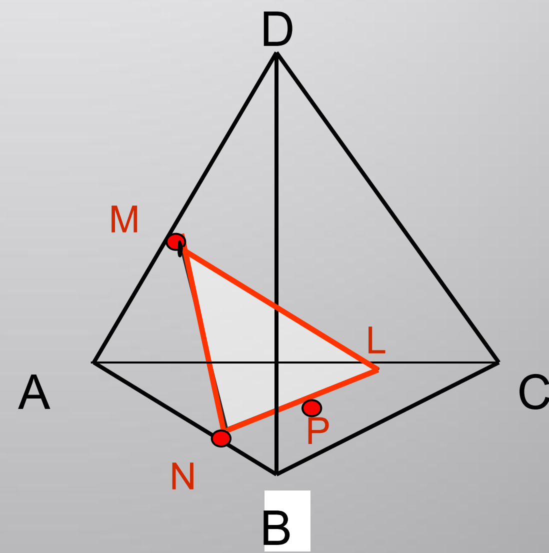





Секущая плоскость
сечение
A
N
M
K
α
D
B
C

Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.





Построение:

1. Отрезок MP

2. Отрезок PN

3. Отрезок MN

MPN – искомое сечение

Построение:

1. Отрезок MN

2. Луч NP;

луч NP пересекает AC в точке L

3. Отрезок ML

MNL –искомое сечение

Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.

Построение:

1. Отрезок NQ

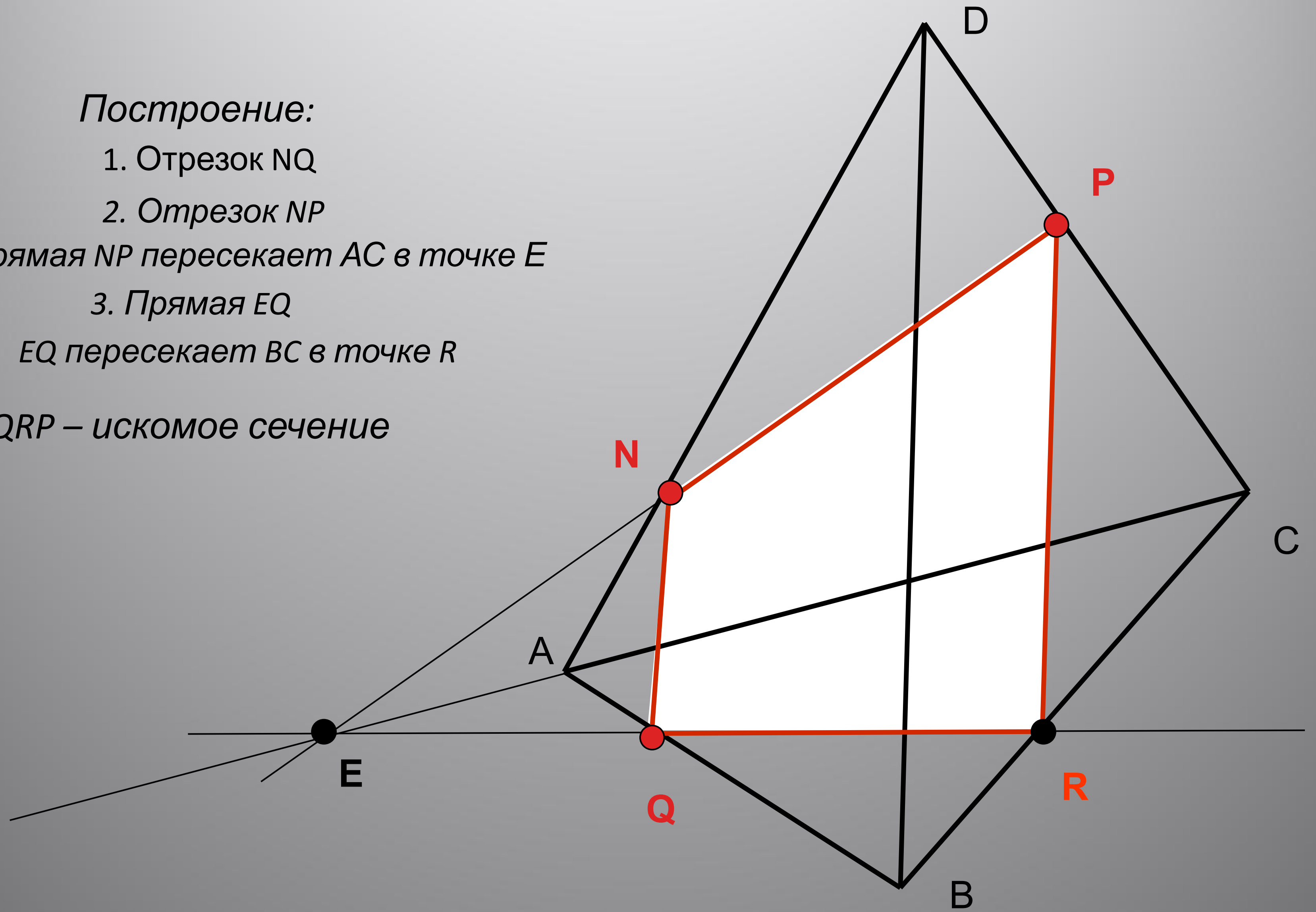
2. Отрезок NP

Прямая NP пересекает AC в точке E

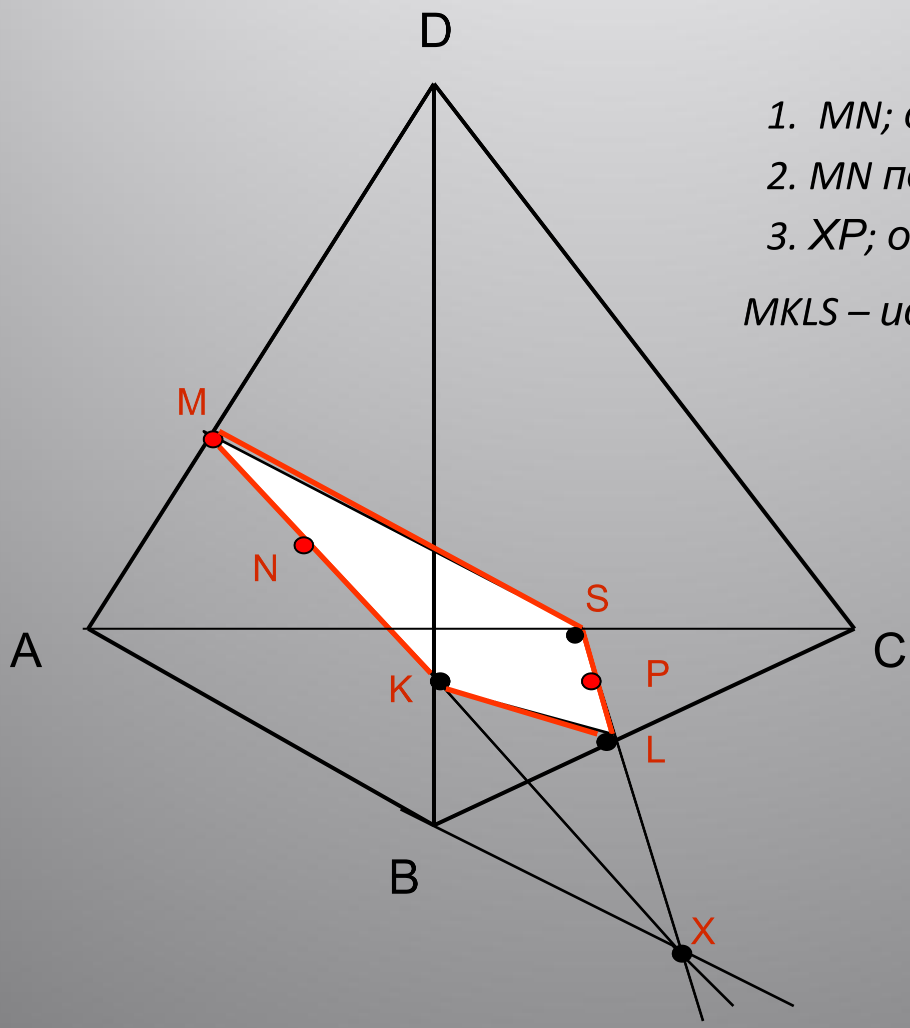
3. Прямая EQ

EQ пересекает BC в точке R

NQRP – искомое сечение



Построить сечение тетраэдра плоскостью, заданной тремя точками.



Построение:

1. *MN; отрезок МК*
2. *MN пересекает AB в точке X*
3. *XP; отрезок SL*

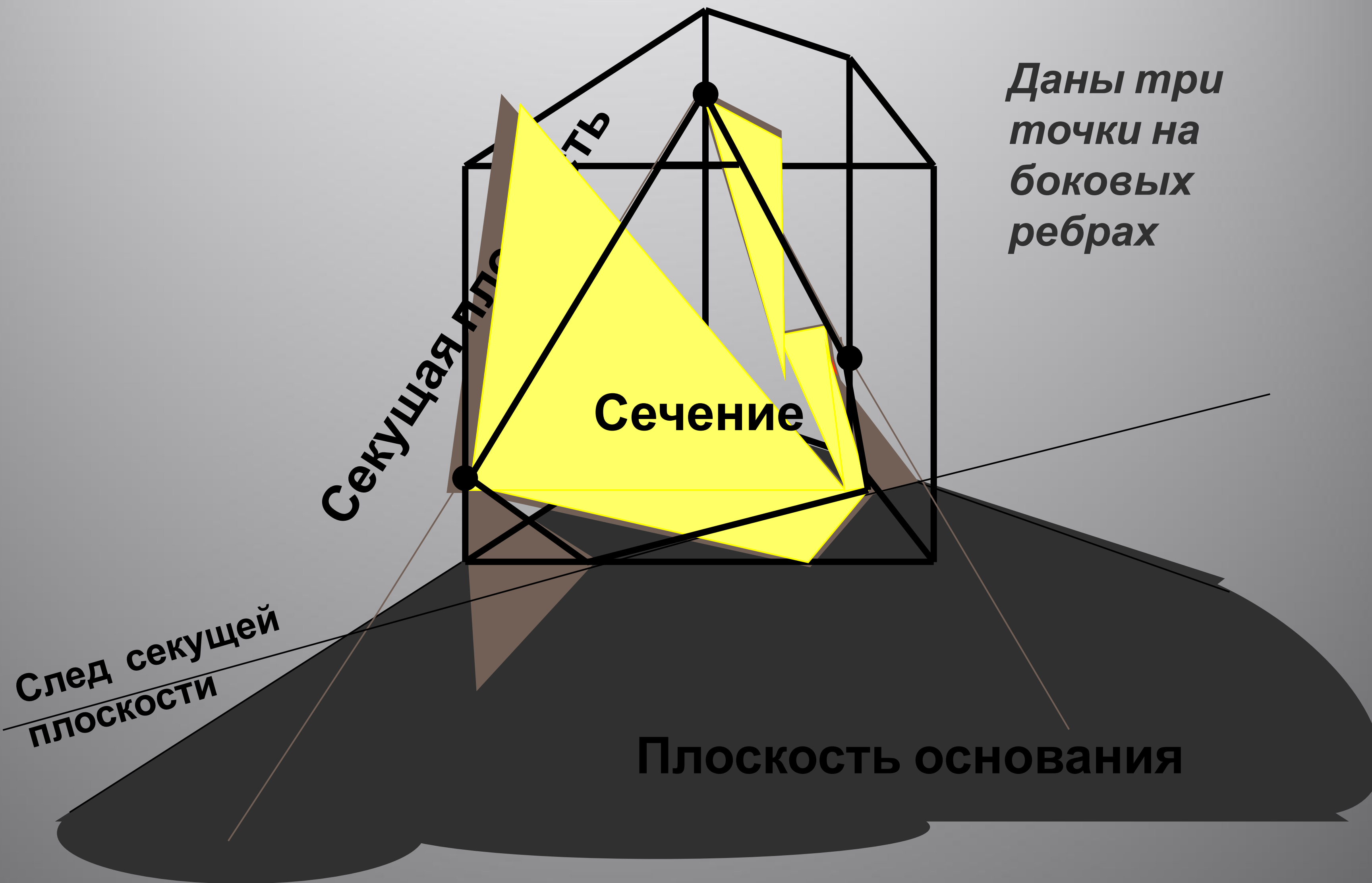
MKLS – искомое сечение

Аксиоматический метод

Метод следов

Суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры . Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют следом секущей плоскости. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры .

Призма



Даны три точки на боковых ребрах

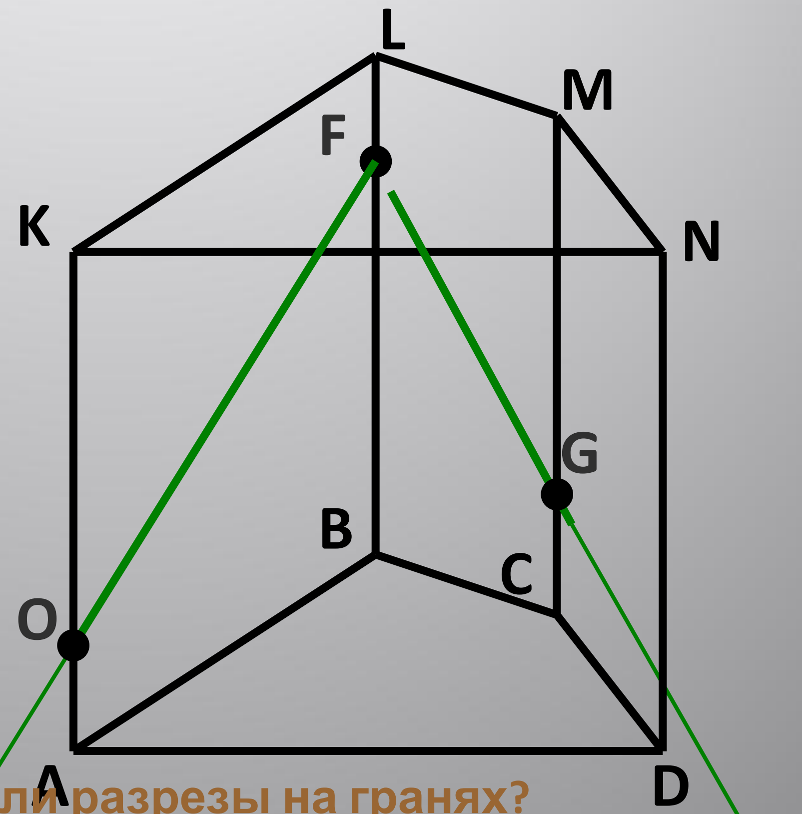
Постройте сечение призмы, проходящее через точки O,F,G

Шаг 1: разрезаем грани KLBA и LMCB

- Проводим через точки F и O прямую FO.

- Отрезок FO есть разрез грани KLBA секущей плоскостью.

- Аналогичным образом отрезок FG есть разрез грани LMCB.



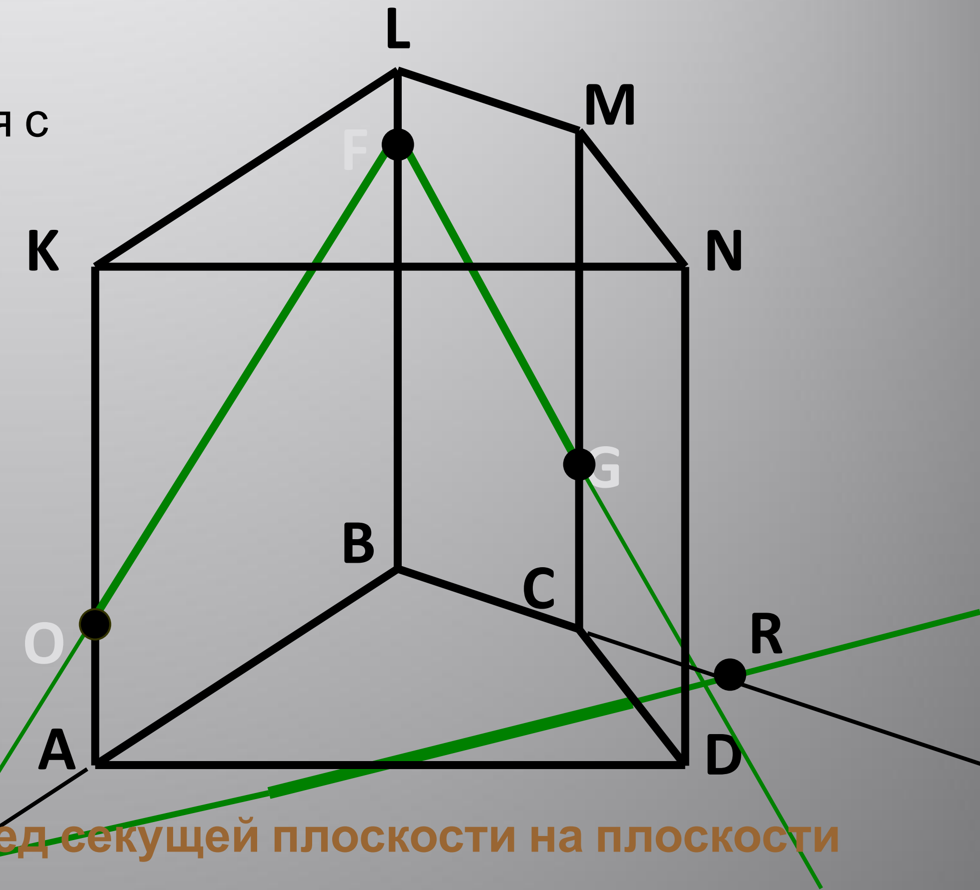
Почему мы уверены, что сделали разрезы на гранях?

Аксиома Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).

Теорема Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Шаг 2: ищем след секущей плоскости на плоскости основания

- Проводим прямую AB до пересечения с прямой FO.
- Получим точку **H**, которая принадлежит и секущей плоскости, и плоскости основания.
- Аналогичным образом получим точку **R**.
- Через точки H и R проводим прямую HR – **след секущей плоскости**



Почему мы уверены, прямая HR – след секущей плоскости на плоскости основания?

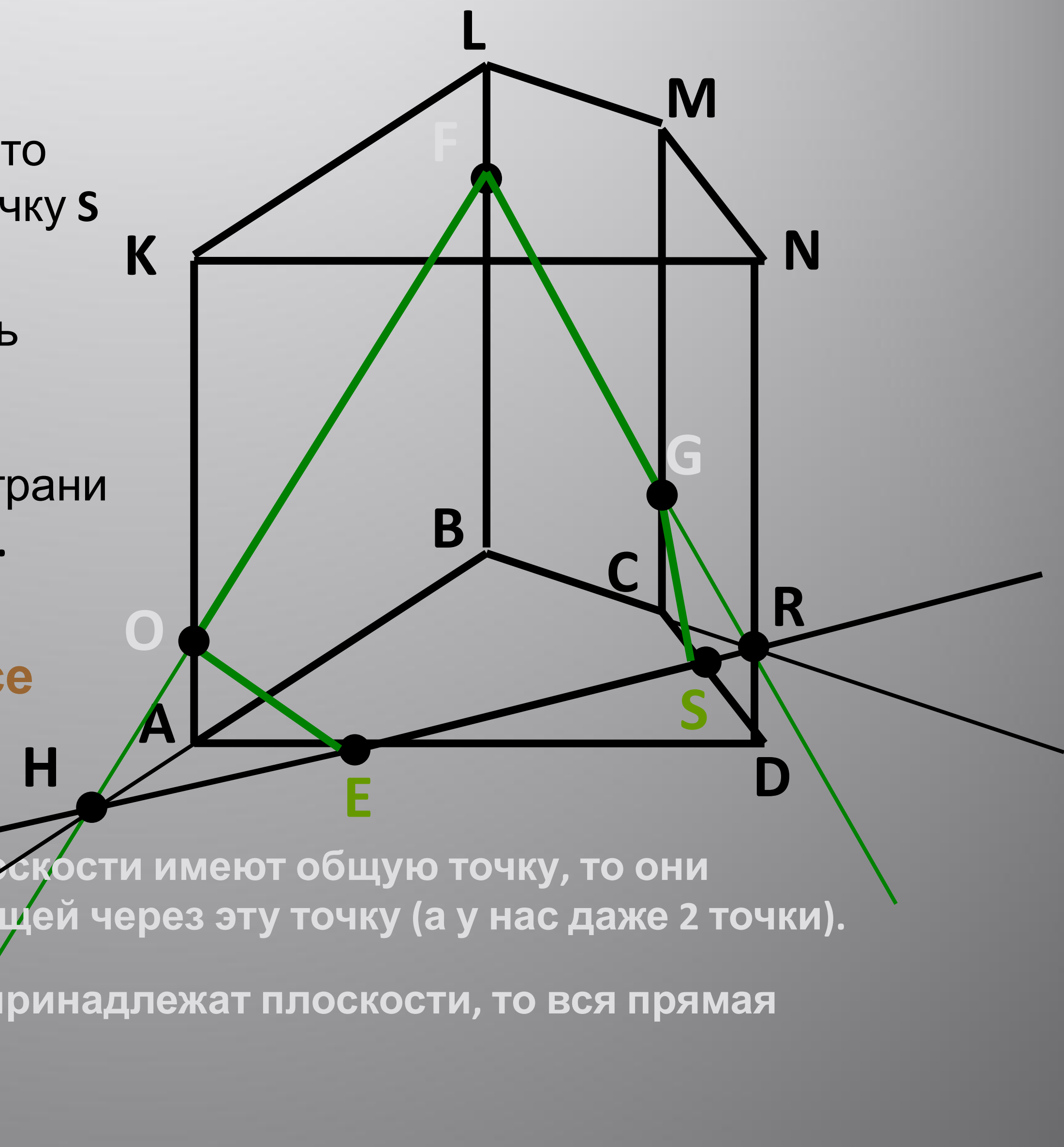
Аксиома Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).

Теорема Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Шаг 3: делаем разрезы на других гранях

- Так как прямая HR пересекает нижнюю грань многогранника, то получаем точку **E** на входе и точку **S** на выходе.
- Таким образом отрезок **ES** есть разрез грани ABCD.

- Проводим отрезки **OE** (разрез грани KNDA) и **GS** (разрез грани MNDC).



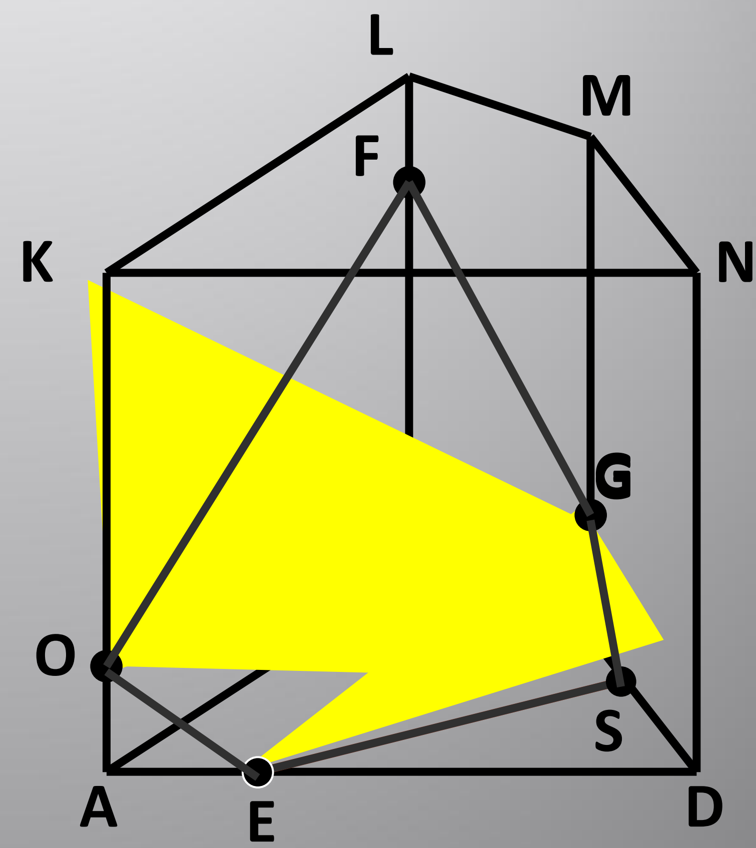
Почему мы уверены, что все делаем правильно?

Аксиома **Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).**

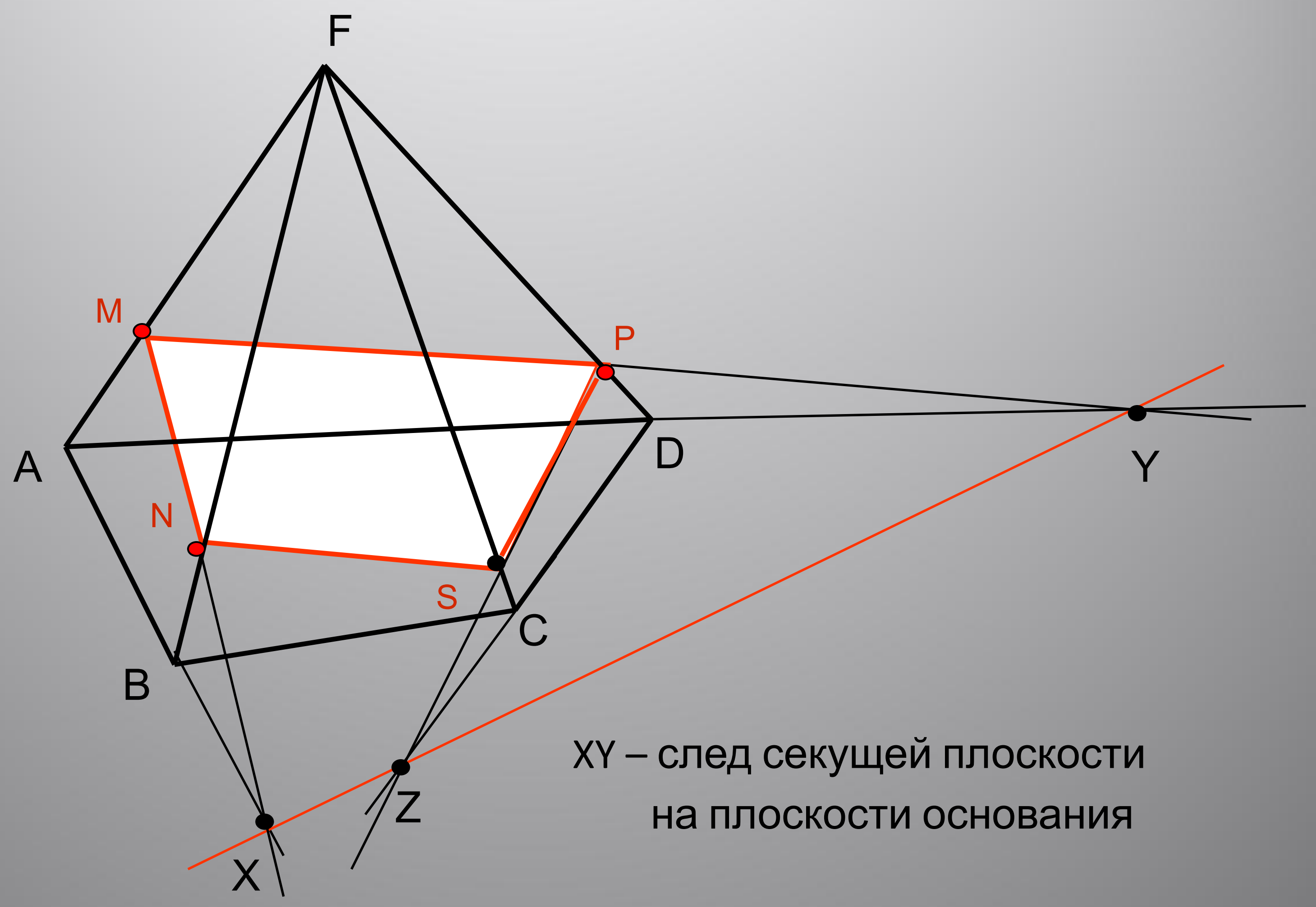
Теорема **Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.**

Шаг 4: выделяем сечение многогранника

Все разрезы образовали пятиугольник **OFGSE,** который и является сечением призмы плоскостью, проходящей через точки **O, F, G.**

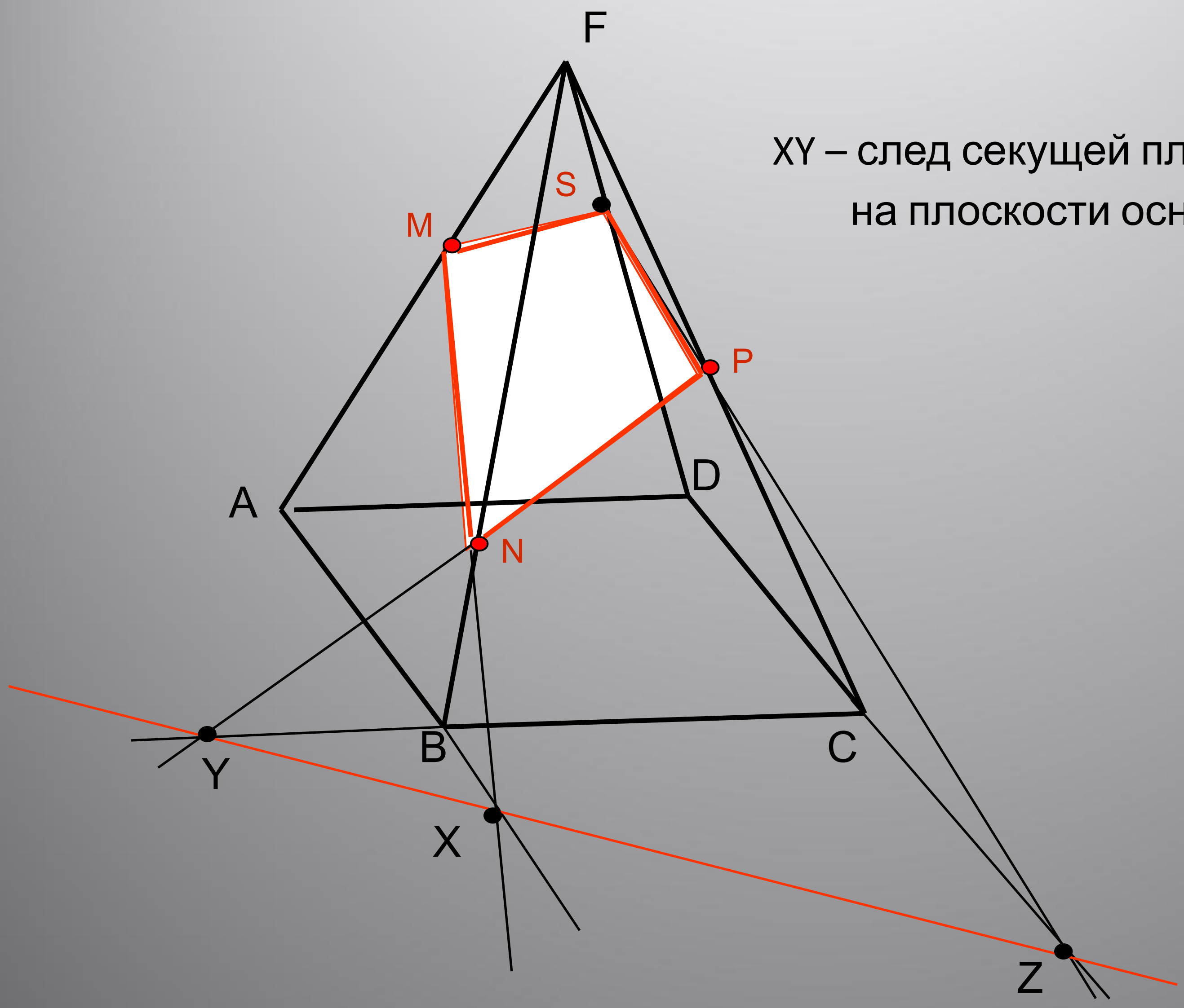


Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три точки M,N,P.



XY – след секущей плоскости на плоскости основания

Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три точки M,N,P.



XY – след секущей плоскости на плоскости основания

Метод вспомогательных сечений

Этот метод построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются «искусственное». Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

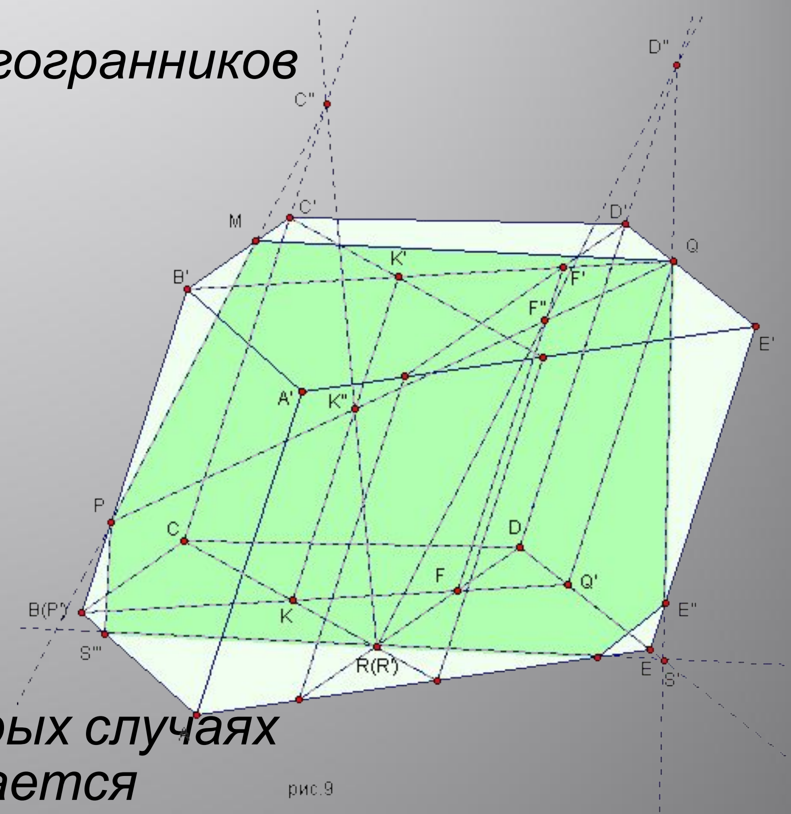
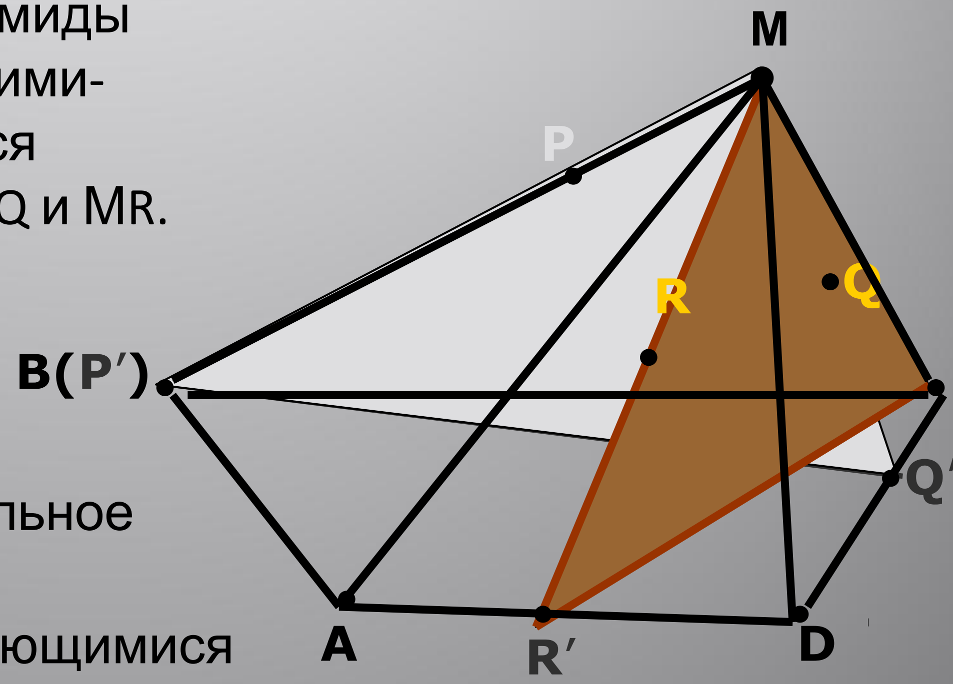


рис.9

На ребре BM пирамиды MABCD зададим точку P. Построим сечение пирамиды плоскостью PQR, точку R которой зададим на грани AMD,а Q на грани DMC.

1. Находим точки P', Q' и R' и затем строим вспомогательное сечение пирамиды плоскостью, определяемой какими-нибудь двумя пересекающимися прямыми из трех прямых MP, MQ и MR. Например, плоскостью MPQ.

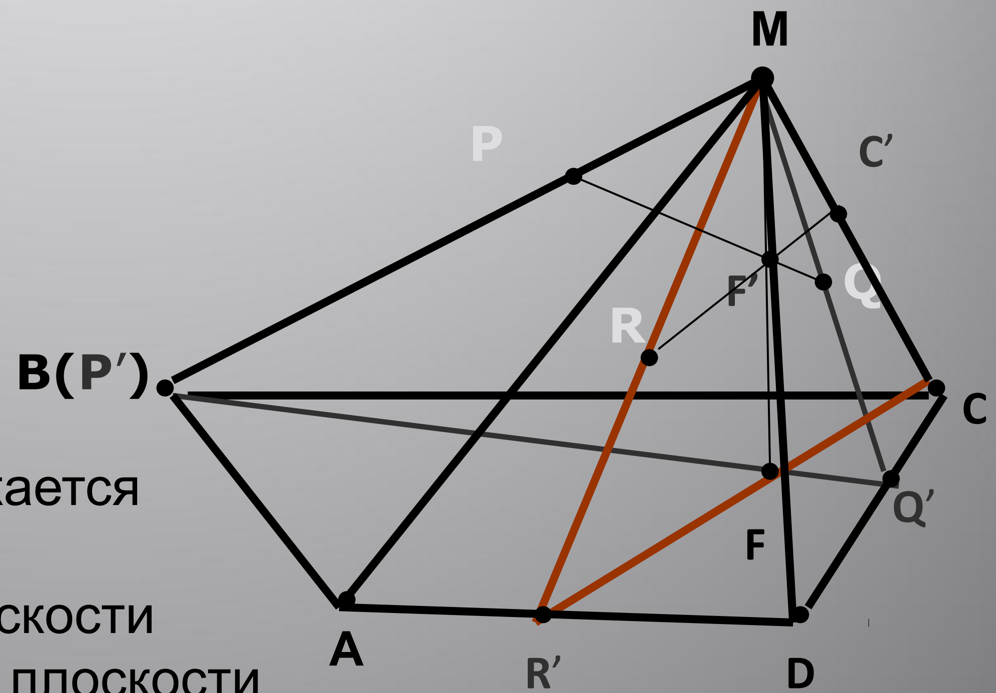


2. Построим другое вспомогательное сечение пирамиды плоскостью определяемой двумя пересекающимися прямыми, одна из которых — это прямая MR, а другая прямая — та, на которой мы хотим найти след плоскости PQR. Например, прямая MC.

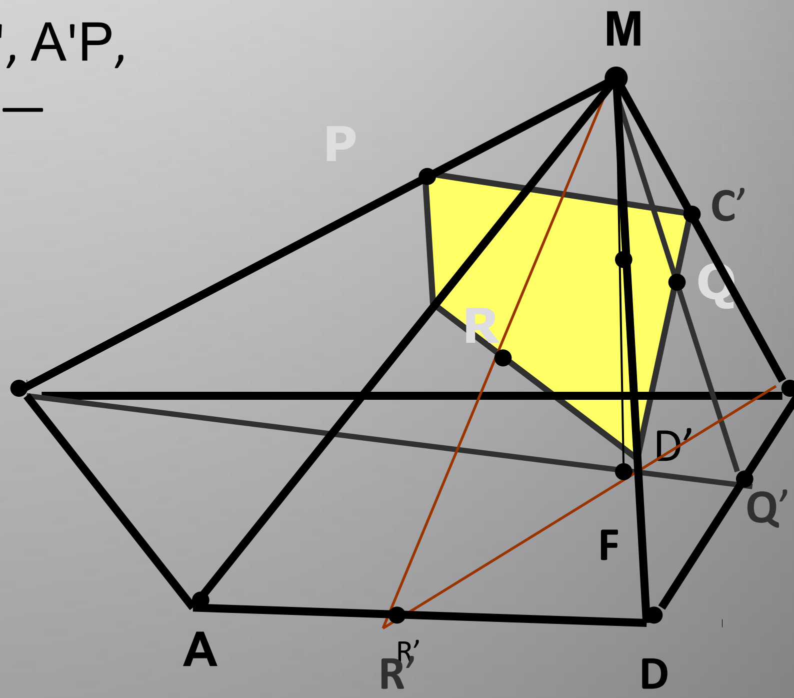
3. Находим точку F, в которой пересекаются прямые P'Q' и R'C, а затем строим прямую MF — линию пересечения плоскостей.

4. В плоскости MPQ’ проводим прямую PQ и находим точку F'=PQ пересекается MF.

5. Так как точка F' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости PQR. Тогда и прямая RF, лежит в плоскости PQR. Проводим прямую RF', и находим точку C'=RF' пересекается MC. Точка C', таким образом, лежит и на прямой MC, и в плоскости PQR, т. е. она является следом плоскости PQR на прямой MC (в данном случае и на ребре MC).

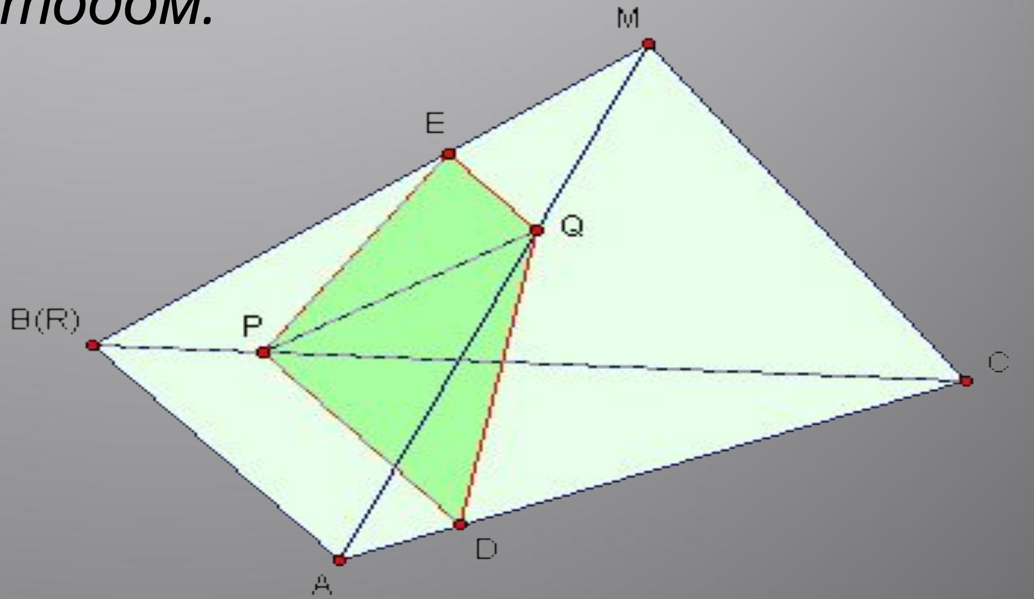


6. Дальнейшие построения вполне понятны: строим C'Q, D', D'R, A', A'P, PC'. Четырехугольник PC'D'A' — искомое сечение



Комбинированный метод

Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

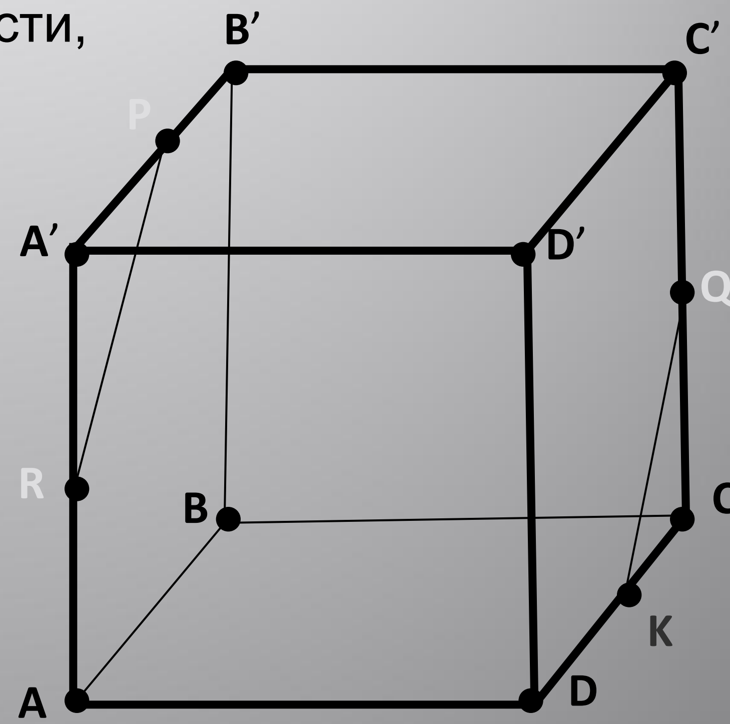


Постройте сечение куба, проходящее через точки P, R, Q.

1. Точки P и R лежат в одной плоскости, проведём прямую PR.

2. Прямая PR лежит в плоскости AA′B′B, точка Q лежит в плоскости DD′C′C, параллельной AA′B′B.

3. Проведём через точку Q прямую параллельную прямой PR, получим точку K



Почему мы уверены, что все делаем правильно?

Теорема **Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.**

Теорема **Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны**

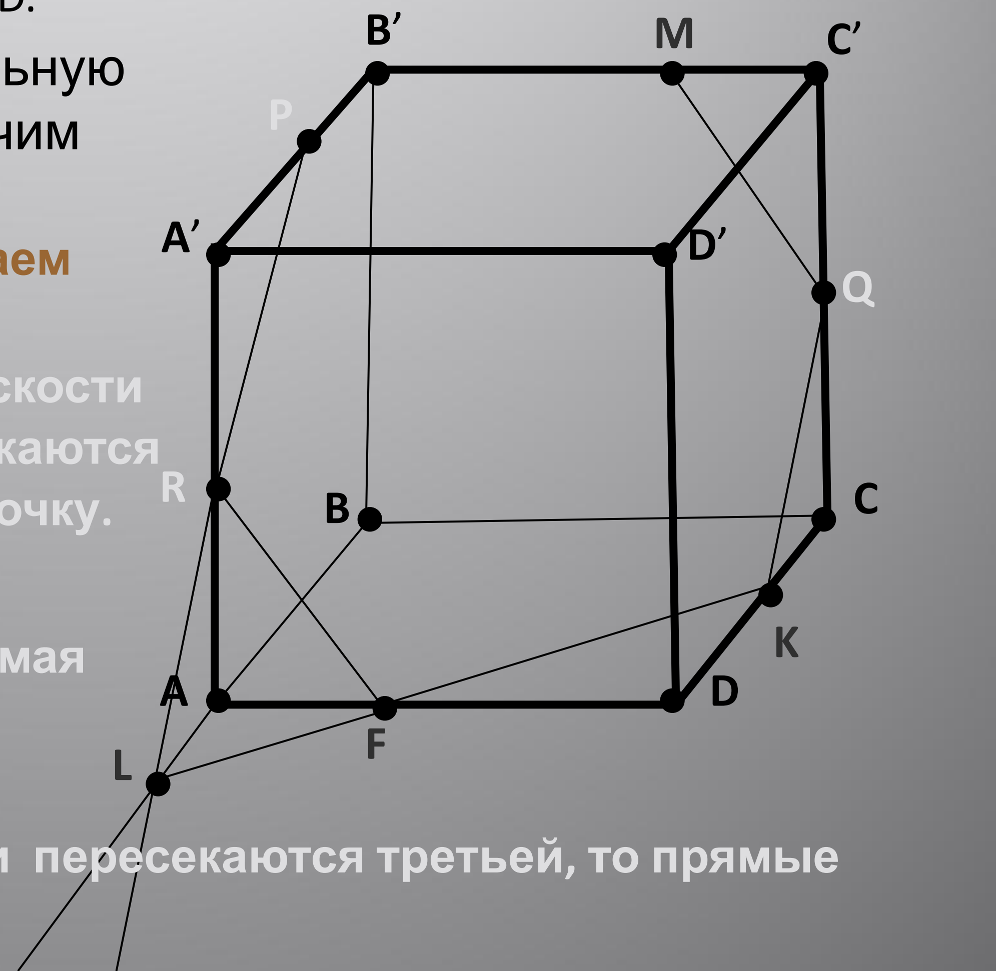
4. Найдём точку пересечения прямых PR и AB, получим точку L.

5. Прямая LK в плоскости ABCD оставляет след FK

6. Точки R и F лежат в одной плоскости AA’D’D, проведём прямую RF.

7. Прямая RF лежит в плоскости AA’D’D, точка Q в плоскости BB’C’C, параллельной плоскости AA’D’D.

8. Проведём прямую параллельную прямой RF, через точку Q, получим точку M.



Почему мы уверены, что все делаем правильно?

Аксиома **Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.**

Теорема **Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.**

Теорема

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны

9. Проведем PM.

10. Полученный шестиугольник является искомым сечением