Умножение матриц на число:

Определение:

Произведением матрицы A на число k называется матрица **B** = k · **A** того же размера, полученная из исходной умножением на заданное число всех ее элементов:

$$b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$$

Свойства умножения матрицы на число

- 1 · A = A – свойство нормировки
- 0 · A = Θ, где Θ – нулевая матрица
- k · (A + B) = k · A + k · B – дистрибутивность относительно сложения матриц
- (k + n) · A = k · A + n · A –дистрибутивность относительно сложения чисел
- (k · n) · A = k · (n · A) – ассоциативность умножения

Сложение и вычитание матриц:

Определение:

Сложение матриц (сумма матриц) **A** + **B** есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы C равен:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Определение:

Вычитание матриц (разность матриц) **A - B** есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной разности всех соответствующих элементов матриц A и B, то есть каждый элемент матрицы C равен:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Свойства сложения и вычитания матриц

- Ассоциативность: (A + B) + C = A + (B + C)
- A + Θ = Θ + A = A, где Θ - нулевая матрица
- A - A = Θ
- Коммутативность: A + B = B + A

Умножение матриц:

Определение:

Результатом умножения матриц $\mathbf{A}_{m\times n}$ и $\mathbf{B}_{n\times k}$ будет матрица $\mathbf{C}_{m\times k}$ такая, что элемент матрицы **C**, стоящий в i-той строке и j-том столбце (c_{ij}), равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы **A** на соответствующие элементы j-того столбца матрицы **B**:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Замечание.

Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Свойства умножения матриц

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - произведение матриц ассоциативно;
- $(z \cdot A) \cdot B = z \cdot (A \cdot B)$, где z - число;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ - произведение матриц дистрибутивно;
- $E_n \cdot A_{nm} = A_{nm} \cdot E_m = A_{nm}$ - умножение на единичную матрицу
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ - в общем случае произведение матриц не коммутативно.

Произведением двух матриц есть матрица, у которой столько строк, сколько их у левого сомножителя, и столько столбцов, сколько их у правого сомножителя.

Транспонированная матрица:

Определение:

Транспонирование матрицы - это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами:

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

Свойства транспонированной матрицы

- Если матрица A имеет размер $n \times m$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $m \times n$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Определитель матрицы:

Определитель матрицы или **детерминант матрицы -** это одна из основных численных характеристик квадратной матрицы, применяемая при решении многих задач.

Обозначение

Определитель матрицы **A** обычно обозначается det(A), |A|, или Δ(A).

Свойства определителя матрицы:

- При транспонировании значение определителя матрицы не меняется:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Следствие. Все, что справедливо для строк определителя, справедливо и для его столбцов

- Если в определителе поменять местами две строки, то его знак изменится на противоположный

  Следствие. Определитель, содержащий две равные строки, равен нулю

Свойства определителя матрицы:

- Если какую либо строку определителя умножить на число, то в результате весь определитель умножится на это число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \dots & k\cdot a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие. Определитель, у которого существуют две пропорциональные строки, равен нулю.

Свойства определителя матрицы:

- Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{in} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие. 1)Если к некоторой строке определителя прибавить любую другую, умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.
2) Если некоторая строка определителя представляет из себя линейную комбинацию каких-то других строк, то такой определитель равен нулю.

Свойства определителя матрицы:

- Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.
- Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Если квадратная матрица n-того порядка умножается на некоторое ненулевое число, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы на это число в n-той степени:

$$B = k \cdot A \quad \Rightarrow \quad \det(B) = k^n \cdot \det(A)$$

где A матрица $n \times n$, k - число.

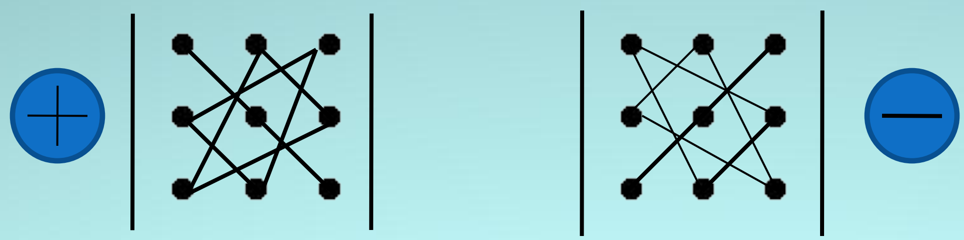
- Определитель обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Методы вычисления определителя матрицы:

1) Правило треугольника для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

Для матрицы 3×3 значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, от которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.



$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

2) Правило Саррюса для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Вычисление определителя матрицы произвольного размера

3) Разложение определителя по строке или столбцу:

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ - разложение по i-той строке

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения:

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ - разложение по j-тому столбцу

При разложение определителя матрицы обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом максимальное количество нулевых элементов.

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента;

M_{ij} - минор элемента a_{ij} – определитель порядка (n-1), полученный из определителя detA вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых находится элемент

Обратная матрица:

Определение:

Обратная матрица A^{-1} — матрица, произведение которой на исходную матрицу A равно единичной матрице E:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Замечание.

Обратная матрица существует только для квадратных, определитель которых не равен нулю.

Свойства обратной матрицы:

- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = A^{-1}/k$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

Вычисление обратной матрицы:

Теорема

Для квадратной матрицы А существует обратная A^{-1} тогда и только тогда, когда detA не равен нулю; в этом случае обратная матрица может быть при помощи союзной матрицы $\tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^{T}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots A_{2n} \\ . & . & . \quad . \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots \quad A_{in} \\ . & . & . \quad . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

- союзная матрица, состоящая из алгебраических дополнений элементов a_{ij} матрица А