Лекция

Логика предикатов

- Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными.
- В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь.

- В логике такие предложения, истинность которых зависит от параметров, обозначают с помощью предикатов.
- "Предикат" с английского переводится как сказуемое.

Определение предиката

- Формально предикат - функция, аргументами которой могут быть ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ОБ'ЕКТЫ из некоторого множества, а значения функции "истина" или "ложь".
- Предикат можно рассматривать как расширение понятия высказывания.

Пример

- "Маша любит кашу"
- "Даша любит кашу"
- "Саша любит кашу«
- предикат "Икс любит кашу"
- и вместо неизвестного Икс могут быть либо Маша, либо Даша, либо Саша.
- Подстановка вместо Икс имени конкретного ребенка превращает предикат в обычное высказывание.

- **Определение**

  Предикат - это высказывание-функция, значение (истина/ложь) которого зависит от параметров

- **Пример**

  $x \le 2$ при $x = 1$ истина при $x = 3$ ложь.

- **Определение**

Одноместным предикатом P(x) - произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значение из множества {1; 0}.

"ВСЕ любят Игрека" - одноместный предикат.

Замечание

Высказывания – это 0(нуль)-местный предикат,

булева функция – n-местный предикат.

"ВСЕ любят КОЙ-КОГО [некоторого]" - нульместный предикат, то есть высказывание.

- **Определение**

Двухместный предикат P(x,y) - функция двух переменных x и y, определенная на множестве M=M1xM2 и принимающая значения из множества {1;0}.

Пример

Q(x, y) – “x=y” - предикат равенства на множестве RxR=R2

"Икс любит Игрека" -двухместный предикат.

- **Определение**

  n-местный предикат - это функция определенная на наборах длины n элементов некоторого множества M, принимающая значения в области True, False.

  Множество M называется *предметной областью предиката*,

  а x1, x2, ..xn –*предметными переменными*

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow \{\ ,\ \}$$

- **Определение.**

Предикат называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*), если на всех наборах своих переменных принимает значение 1 (0), *выполнимым,* если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1

- Пример

$$P(x) = x \le 2 \qquad \forall x \quad x \le 2$$ ложь

$$P(x) = x \le 2 \qquad \exists x \quad x \le 2$$ - истина

Логические операции над предикатами

Замечание

- Предикаты при подстановки переменных становятся высказываниями, поэтому с предикатами можно производить все логические операции
- Для предикатов справедливы логические операции и две новые операции, специфические.
- \- операциями **навешивания кванторов** или **<u>операциями квантификации</u>**.
- Эти операции соответствуют фразам

  "для всех" - **квантор общности** и "некоторые" - квантор существования.

Выражение "*существует точно одно X такое, что...*" - **квантор существования и единственности**

$\exists! x.$

Пример (Экзюпери)

- "*Ты любишь потому, что ты любишь.*
- *Не существует причин, чтобы любить*."
- можно записать в виде:

"*Ты любишь потому, что ты любишь. Не существует причин, чтобы любить.*"

можно записать в виде:

$A \Rightarrow A. \ \neg\exists B$, где A - "*ты любишь*", B - "*причины любви*".

- **Определение**

  Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется *навешивание* квантора на переменную x.

  Переменная при этом называется *связанной* и вместо нее подставлять константы уже нельзя.

- Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле

- Переменную x в предикате P(x) называют **свободной** (ей можно придавать различные значения из M),
- в высказывании же x называют **связанной** квантором всеобщности.

$\forall x P(x)$ x

- Переменная , на которую навешивается квантор называется связанной.
- Выражение, на которое навешивается квантор, называется областью действия квантора

Пример

$\forall x\, P(x)$ - « из всякого положения есть выход»

$\exists x\, \overline{P(x)}$ - « существуют безвыходные положения»

Пример

- Предикат "ВСЕ любят кашу":
- Возьмем отрицание
- "НЕ ВЕРНО, что ВСЕ любят кашу".
- Это равносильно (по закону Де Моргана!) заявлению:
- "НЕКОТОРЫЕ НЕ любят кашу.

$$\overline{\forall x\, P(x)} \equiv \exists x\, \overline{P(x)}$$

- отрицание "задвинули" за квантор, в результате чего квантор сменился на противоположный

- Кванторы общности и существования называют **двойственными** относительно друг друга.
- Вот некоторые "классические примеры"несоответствия языка предикатов и естественного языка

Пример

- предикат
- "Собакам и кошкам вход воспрещен".

- "ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо:
- ЕСЛИ икс - собака И икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"
- Ясно что таких иксов, которые бы были одновременно собакой и кошкой не существует! Как, впрочем, и таких игреков.
- Поэтому ЕСЛИ икс - собака ИЛИ икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"

- **Определение.** Выражение вида $\forall x$ **p(x)** на множестве M представляет собой **истинное высказывание**, тогда и только тогда, когда **p(x)** истинно для любого элемента $x \in M$

- **Определение.** Выражение $\exists x$ **p(x)** на множестве M представляет собой истинное высказывание, тогда и только тогда, когда **p(x)** - истинно хотя бы для одного элемента из этого множества.

Пример

$P(x, y)$ - « x любит y « - двуместный предикат.

$\forall x \exists y$ - « для любого человека существует y – человек, которого он любит»

$\forall y \exists x$ - « для любого человека существует x – человек, которого он любит»

$\exists y \forall x$ « существует человек, которого любят все»

$\exists x \forall y$ « существует человек, который любит всех»

$\forall x \ \forall y$ все люди любят всех людей»

$\exists y \exists x$ существует человек, который кого-то любит»

Свойства кванторов

- 1. Коммутативность одноименных кванторов

$$\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$$

$$\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$$

- 2.

$$\exists x \forall y\, P(x,y) \to \forall y \exists x\, P(x,y)$$

$$\exists y \forall x\, P(x,y) \to \forall x \exists y\, P(x,y)$$

Перестановка кванторов общности и существования меняет смысл.

Основные законы, содержащие кванторы

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\forall y P(x,y)\equiv\forall y\forall x P(x,y)\\ \exists x\exists y P(x,y)\equiv\exists y\exists x P(x,y)\end{array}\right\}\text{ - коммутация одноименных кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x(P(x)\wedge Q(x))\equiv\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)\\ \exists x(P(x)\vee Q(x))\equiv\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\end{array}\right\}\text{ - дистрибутивные законы для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x(P(x)\vee Q(y))\equiv\forall xP(x)\vee\forall xQ(y)\\ \exists x(P(x)\wedge Q(y))\equiv\exists xP(x)\wedge\exists xQ(y)\end{array}\right\}\text{ - законы ограничения действия кванторов}$$

$$\exists y\forall xP(x,y)\rightarrow\forall x\exists yP(x,y)\equiv 1$$

Равносильные формулы логики предикатов

- **Определение**
- Две формулы логики предикатов A и B называются **равносильными** на области M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Правила переноса кванторов через отрицание или законы де Моргана для кванторов

- Пусть A(x) и B(x) – переменные предикаты, а C – переменное высказывание (или формула, не содержащая x).
- Тогда имеют место равносильности

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.

« не верно, что для любого x $A(x)$ истинно» эквивалентно «найдется x, для которого $A(x)$ ложно»

Правила переноса кванторов через отрицание или

законы де Моргана для кванторов

2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.

Равносильность 2 означает тот простой факт, что, если не существует x, при котором истинно A(x), то для всех x будет истиной $\overline{A}(x)$.

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.

4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.

- «квантор можно вносить и выносить за скобки в конъюнкции»

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$$

- постоянное высказывание можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из под знака в конъюнкции, дизъюнкции и импликации

6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$.

- квантор существования можно вносить и выносить за скобки в дизъюнкции»

$$\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x).$

12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x).$

13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)].$

14. $\exists x[C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x).$

15. $\exists x[B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C.$

Нормальные формы формул логики предикатов

- В логике предикатов формулы могут иметь нормальную форму.
- При этом, используя равносильности логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.
- В логике предикатов различают два вида нормальных форм: приведенную и предваренную

- Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую **предваренную** (префиксную) нормальную форму (ПНФ).
- В ней кванторные операции
- либо полностью отсутствуют,
- либо они используются после всех операций алгебры логики

Пример

Получили приведенную нормальную форму исходной формулы.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \overset{18}{\equiv} \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \overset{17}{\equiv} \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \overset{1,31}{\equiv}$$

$$\overset{1,31}{\equiv} \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

ПНФ имеет вид

$$(\sigma_{x1})(\sigma_{x2})...(\sigma_{xn})A(x_1, x_2, ..., x_m),\ n \le m,$$

где под символом σ_{xi} понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Алгоритм получения (приведения) ПНФ.

- Формула *B* называется **предваренной нормальной формой** формулы *A* ,

  если она удовлетворяет ниже перечисленным требованиям:
- 1. Формулы *A* и *B* равносильны.
- 2. Формула *B* удовлетворяет следующим условиям:
- а) используются логические операции ┐, v , & , при этом отрицание применяется только в атомарных формулах;
- б) операции кванторов следуют за операциями алгебры ┐, v , &

- **Шаг 1.** Исключить связки эквивалентности (~) и импликации (→).
- Формула $x \sim y$ заменяется на $(x \to y)$ & $(x \to y)$, а формула
- $A \to B$ заменяется на $(\bar{A} \vee B)$.
- **Шаг 2.** Переименовать, если необходимо, связанные переменные таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений. Это условие рассматривается и по отношению к подформулам.

- **Шаг 3**. Удалить те квантификации, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.
- **Шаг 4.** Перенести отрицания внутри формулы в соответствия со следующими правилами:
- **Шаг 5**. Перенести все квантификации в начало формулы

$$\frac{A \to B,\ A}{B};\quad \overline{\forall x A} \sim \exists x \overline{A},\quad \overline{A \& B} \sim \overline{A} \& \overline{B},\quad \overline{\overline{A}} \sim A.$$

Пример. Найти ПНФ формулы $x \rightarrow (y \rightarrow xy)$.

Решение.

Шаг 1: $\forall x(P(x)\ \&\ \forall y \exists x(\overline{\overline{Q}}(x,y) \vee \forall z R(a,x,y)))$

Шаг 2: $\forall x(P(x)\ \&\ \forall y \exists u(\overline{\overline{Q}}(u,y) \vee \forall z R(a,u,y)))$

Шаг 3: $\forall x(P(x)\ \&\ \forall y \exists x(\overline{\overline{Q}}(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 4: $\forall x(P(x)\ \&\ \forall y \exists x(Q(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 5: $\forall x \forall y(p(x)\ \&\ \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

$\forall x \forall y \exists u(P(x)\ \&\ (Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

Скулемовские функции

- Приведение формулы ЛП к сколемовской форме (сколемизация) призвано обеспечить дальнейшее упрощение логических представлений и облегчить введение процедур машинной обработки в ЛП.

- Отправной точкой сколемизации является предваренная нормальная форма, матрица которой приведена к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).
- Цель сколемизации - исключение ∃-квантификаций

Алгоритм получения сколемовской формы

1) сопоставить каждой ∃-квантифицированной переменной список ∀- квантифицированных переменных, предшествующих ей,
2) а также некоторую еще не использованную функциональную константу, число мест, у которой равно мощности списка.
3) Данная константа будет представлять сколемовскую функцию;

- 4) в матрице формулы заменить каждое вхождение каждой ∃-квантифицированной переменной на некоторый терм.

  Этот терм является функциональной константой, соответствующей данной переменной и снабженной списком аргументов, также соответствующим той же самой переменной;

- 5) устранить из формулы все ∃ -квантафикации.

- **Клаузальная** форма -сколемовская форма, матрица которой приведена к КНФ.

- Любая сколемовская форма допускает эквивалентную клаузальную форму.

Пример.

$$\exists x\forall y P(x,y)\vee\overline{\forall x\exists y Q(x,y)}\equiv\exists x\forall y P(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{Q(x,y)}\overset{36}{\equiv}\exists x[\forall y P(x,y)\vee\forall y\overline{Q(x,y)}]\equiv$$

обозначим в предикате Q переменную y через z

$$\equiv\exists x[\forall y P(x,y)\vee\forall z\overline{Q(x,z)}]\overset{53}{\equiv}\exists x\forall y\forall z(P(x,y)\vee\overline{Q(x,z)})$$