ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Виды измерений и погрешностей

Измерением какой-либо физической величины называется операция, в результате которой мы узнаем, во сколько раз измеряемая величина больше (или меньше) соответствующей величины, принятой за единицу

Виды измерений классифицируются:

– по способу получения результата (прямые и косвенные);

– по методу измерений (абсолютные, относительные и пороговые);

– по условиям измерений (равноточные, неравноточные);

– по степени достаточности измерений (необходимые, избыточные)

При ***прямых*** измерениях измеряется непосредственно исследуемая величина

При ***косвенных*** измерениях исследуемая величина измеряется как функция по результатам измерения других величин

Например, ускорение автомобиля при разгоне определяется по результатам измерения расстояния и времени разгона; вычисление плотности – по массе и объему

Абсолютные измерения – это прямые измерения в единицах измеряемой величины

Относительные измерения представляют собой отношения измеряемой величины к величине играющей роль единицы или к величине, принимаемой за исходную

При ***пороговых*** измерениях фиксируется только факт нахождения величины в одностороннем или двухстороннем допуске (по принципу "да/нет")

Равноточные измерения проводятся в одинаковых условиях одними и теми же измерительными приборами и с одинаковой степенью тщательности.

При этом в ряду измерений нельзя отдать предпочтение какому-либо одному или нескольким значениям

Неравноточные измерения не отвечают указанным выше требованиям

Избыточные измерения имеют по сравнению с необходимыми большее число измерений либо большую точность, содержат среди измерений зависимые, т. е. дают избыточную информацию

Надежность результатов исследования в значительной степени зависит от ***точности*** измерений

Под *точностью* измерений понимают ***степень соответствия результата измерения действительному значению измеряемой величины***

Снять показания с прибора – не значит только измерить. Необходимо еще оценить ошибки (погрешности) измерений

Погрешность измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины

Под ***истинным*** значением измеряемой величины принято считать

– среднюю арифметическую величину ряда измерений;

– известное эталонное значение;

– величину, полученную в результате более точных (не менее чем на порядок) измерений

Основные источники ошибок

Первый источник заключен в датчике, который неправильно реагирует на измеряемую величину. Например, если тензосопротивление плохо наклеено на упругий элемент, то деформация его решетки не будет соответствовать деформации упругого элемента

Второй источник – измерительное устройство, в котором возможны погрешности из-за неправильного функционирования его механических или электрических элементов

Третий источник – сам наблюдатель, который из-за неопытности или усталости неправильно считывает показания прибора

Ошибки могут возникнуть из-за влияния измерительного устройства на объект измерения (например, при разрушающем методе контроля), влияния окружающей среды (температура, загазованность и т. п.), методических погрешностей, допущенных экспериментатором

Эти источники ошибок приводят к появлению трех типов ошибок: ***случайных***, ***систематических*** и ***грубых***

Случайная погрешность – это погрешность, которая в отдельных измерениях может принимать случайные, заранее конкретно неизвестные значения.

Случайные погрешности обязаны своим происхождением ряду как объективных, так и субъективных факторов, действие которых неодинаково в каждом опыте и не может быть учтено.

Случайные погрешности различаются в отдельных измерениях, сделанных в одинаковых условиях одними и теми же измерительными приборами. Исключить случайные погрешности нельзя. Можно только оценить их значение

Случайные погрешности определяются по ***законам теории ошибок***, основанной на теории вероятностей

Систематическая погрешность – это погрешность, вызванная факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений с помощью одних и тех же измерительных приборов

В качестве примера систематической ошибки рассмотрим случай взвешивания на чашечных весах с помощью неточных гирь. Если взятая нами гиря имеет ошибку, скажем 0,1 г, то вес тела (пусть 1000 г) будет завышенным (или заниженным) на эту величину, и чтобы получить верное значение, необходимо учесть эту ошибку, прибавив к полученному весу (или вычтя из него) 0,1 г, P=(1000±0,1) г

Грубая погрешность или ***промах*** вызывается просчетом экспериментатора или неисправностью средств измерения, или резко изменившимися внешними условиями

Грубые погрешности приводят к явному искажению результата, поэтому их надо исключить из общего числа измерений

По форме числового представления погрешности делятся на ***абсолютные*** и ***относительные***

Абсолютная погрешность – это разность между результатом измерения и его истинным значением: $\Delta x = x - a$

где х – результат измерения; а – истинное значение

Относительная погрешность – это погрешность, приходящаяся на единицу измеренной величины; обычно выражается в процентах

$$\delta = \frac{\Delta x}{a} \cdot 100\%.$$

Случайные погрешности и их распределение

Чтобы выявить случайную погрешность измерений, необходимо повторить измерение несколько раз

Если каждое измерение дает заметные от других результаты, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная погрешность играет существенную роль

Наиболее вероятным значением измеряемой величины из серии измерений является ее среднее значение

Разброс измеряемой величины относительно ее среднего значения определяется величиной средней квадратической погрешности отдельного измерения

Пусть в эксперименте в результате независимых и равноточных измерений постоянной величины a получены значения x_1, x_2, …, x_n

Абсолютные погрешности $\Delta x_i = x_i - a$ рассматривают как случайные величины

Независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин Δx_i, а равноточность – как подчинение величин Δx_i одному и тому же закону распределения (кроме того измерения сделаны одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности)

В качестве оценки неизвестной величины a по данным измерений обычно берут среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Дисперсия отдельных измерений $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n-1}$ обычно неизвестна, и для ее оценки используется величина

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Среднюю квадратическую (стандартную) погрешность (СКО) находятся по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

для ее оценки вычисляется величина $S_n = \sqrt{S_n^2}$

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Величина $w = \dfrac{S_n}{\bar{x}} \cdot 100\%$

называется коэффициентом вариации

Обычно принимается, что погрешности подчиняются нормальному закону распределения случайных величин

При этом предполагается:

1) погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений;

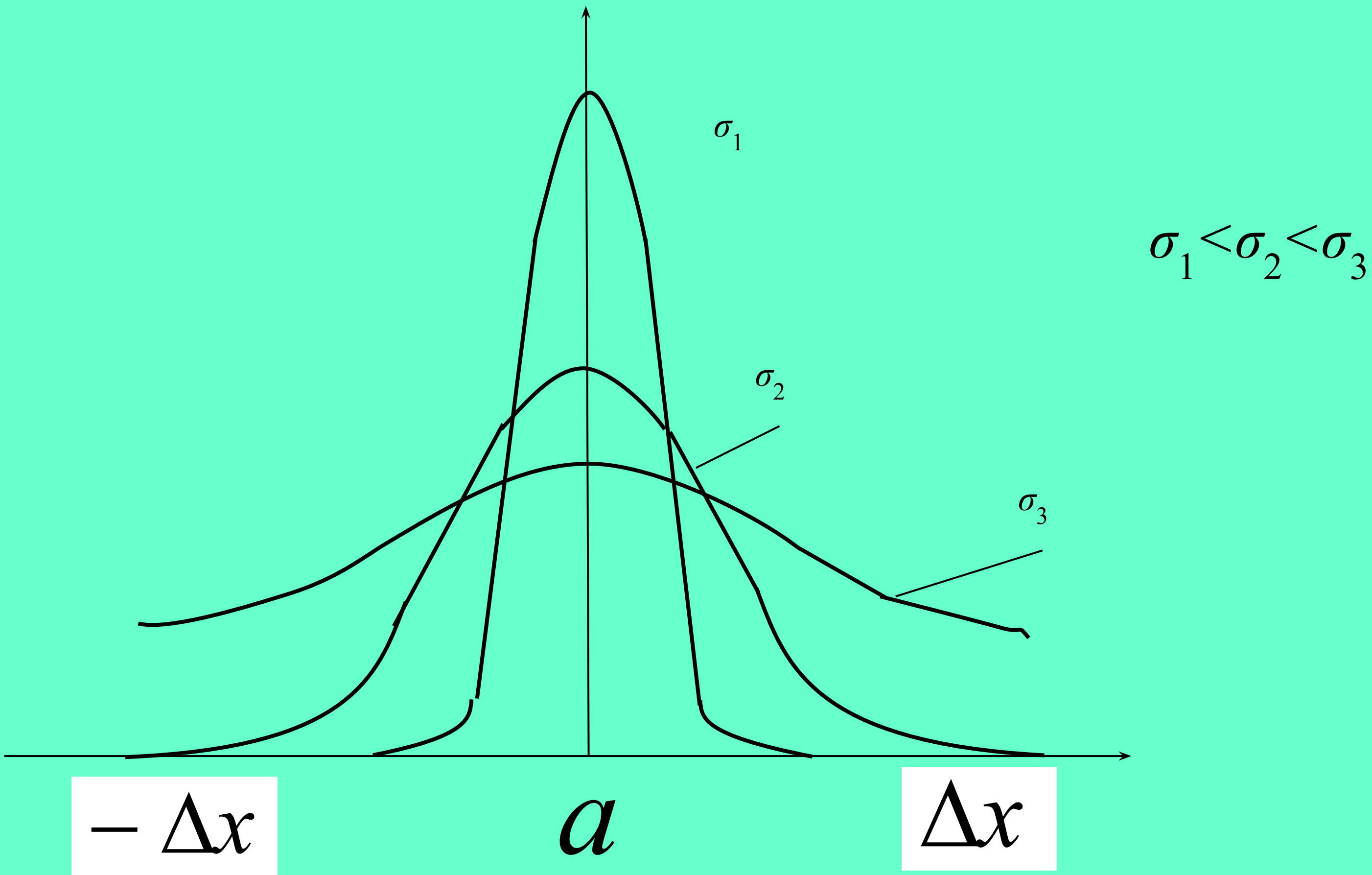
2) при большом числе наблюдений погрешности равных значений, но разных знаков встречаются одинаково часто;

3) частота появления погрешностей уменьшается с увеличением величин погрешностей

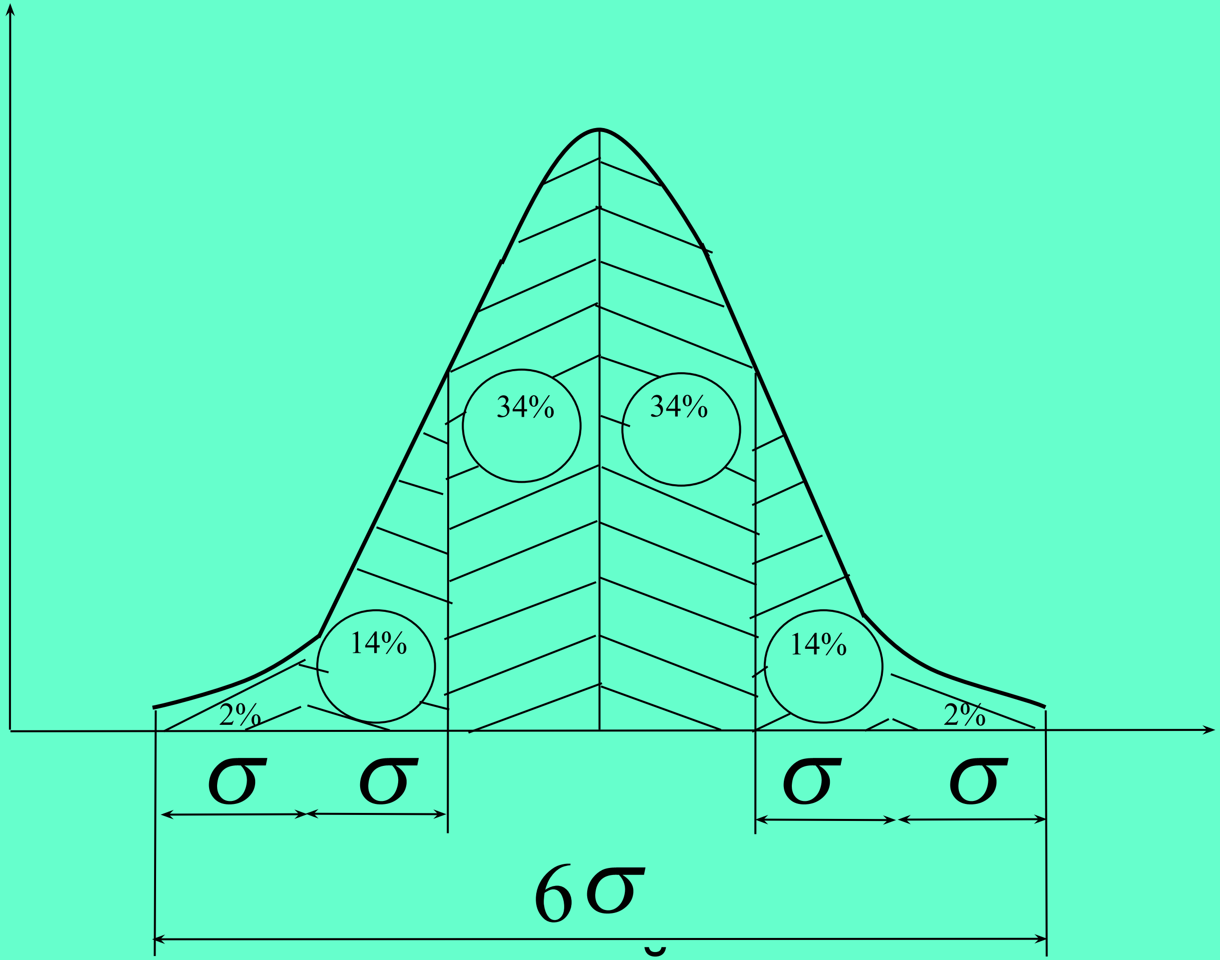
Эти предположения приводят к закону распределения погрешностей, описываемому формулой Гаусса:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Форма кривых Гаусса зависит от величин σ. Чем больше σ, тем больше рассеивание случайной погрешности



Известно, что под кривой распределения в пределах по оси абсцисс от $-\sigma$ до $+\sigma$ заключено 68,3% всей площади; в пределах от –2 σ до +2 σ – 95,5%, в пределах от –3 σ до +3 σ – 99,7%



Известно, что под кривой распределения в пределах по оси абсцисс от $-\sigma$ до $+\sigma$ заключено 68,3% всей площади; в пределах от –2 σ до +2 σ – 95,5%, в пределах от –3 σ до +3 σ – 99,7%

Замечание. В ряде случаев экспериментальные данные лучше описываются другими законами распределения случайных величин, например, законом Пуассона:

$$y = \frac{\sigma^{2x} e^{-\sigma^2}}{x!}.$$

Закон сложения случайных ошибок

Пусть измеряемая величина ***Z*** является суммой (или разностью) двух величин ***X*** и ***Y***, результаты измерений которых независимы.

Тогда можно доказать, что $S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2$

если S_X^2, S_Y^2, S_Z^2 – дисперсии величин, или

$$S_Z = \left|\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}\right|$$

Если Z является суммой не двух, а большего числа слагаемых, то закон сложения ошибок будет таким же, т. е. средняя квадратичная ошибка суммы или разности двух (или нескольких) независимых величин равна корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых

Для нахождения суммарной ошибки нужно складывать не сами ошибки, а их квадраты

Средняя квадратичная ошибка суммы или разности двух (или нескольких) независимых величин равна *корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых*

$$S_Z = \left| \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} \right|$$

Выводы:

1. Необходимо учитывать *роль каждой из ошибок в общей ошибке результата*.

   Значение отдельных ошибок очень быстро падает по мере их уменьшения.

В первую очередь стоит уменьшать ошибку, имеющую наибольшую величину

Относительная погрешность суммы

$$\delta = \frac{S_z}{Z} = \frac{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}{X + Y}$$

Пример: пусть X и Y – два слагаемых, определенных со средними квадратичными ошибками S_X и S_Y, причем, известно, что S_Y в два раза меньше, чем S_X. Тогда ошибка суммы будет $Z = X + Y$

$$S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2 = S_X^2 + (\frac{S_x}{2})^2 = \frac{5}{4} S_X^2.$$

$$S_Z \approx 1{,}1 S_X.$$

2. Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического равна средней квадратической погрешности отдельного результата, деленная на корень квадратный из числа измерений: $S_{\overline{x}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$,

S_n – средняя квадратичная погрешность отдельного измерения

Пусть измеряемая величина **Z** является разностью двух величин ***X*** и ***Y***, результаты измерений которых независимы.

Тогда ее относительная погрешность

$$\delta = \frac{S_z}{Z} = \frac{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}{|X - Y|}$$

Невозможно добиться хорошей точности измерений какой-либо величины, строя измерения так, что она находится как небольшая разность результатов независимых измерений двух величин, существенно превышающих искомую

Доверительный интервал и доверительная вероятность

1. Необходимо учитывать *роль каждой из ошибок в общей ошибке результата*.

Значение отдельных ошибок очень быстро падает по мере их уменьшения.

Тогда можно доказать, что $S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2$

если S_X^2, S_Y^2, S_Z^2 – дисперсии величин, или

$$S_Z = \left| \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} \right|$$

Средняя квадратичная ошибка суммы или разности двух (или нескольких) независимых величин равна *корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых*

Доверительный интервал и доверительная вероятность

1. Необходимо учитывать *роль каждой из ошибок в общей ошибке результата*.

   Значение отдельных ошибок очень быстро падает по мере их уменьшения.

Тогда можно доказать, что $S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2$

если S_X^2, S_Y^2, S_Z^2 – дисперсии величин, или

$$S_Z = \left| \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} \right|$$

Средняя квадратичная ошибка суммы или разности двух (или нескольких) независимых величин равна *корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых*

Количество опытов при ортогональном ЦКП определяется по формуле

$$N = 2^{n} + 2n + 1$$

где 2^n – количество опытов, образующих полный факторный эксперимент; $2n$ – число так называемых «звездных» точек в факторном пространстве, имеющих координаты ($\pm\alpha$, 0, 0, ..., 0); (0, $\pm\alpha$, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., $\pm\alpha$). Здесь величина α называется «звездным» плечом; 1 – опыт в центре планирования, т. е. в точке факторного пространства с координатами (0, 0, ..., 0)

α

Значения «звездного» плеча α для ЦКП с различным числом факторов n следующие:

n	2	3	4	5
α	1,000	1,215	1,414	1,547

Эти значения α выбраны из условия ортогональности матрицы планирования

Закон сложения случайных ошибок

Если поверхность отклика не может быть описана многочленом вида

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \dots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n$$

для адекватного математического описания используется многочлен более высокой степени, например, отрезок ряда Тейлора, содержащий члены с квадратами переменных. Тогда используют центральное композиционное планирование (ЦКП) эксперимента.

Различают два вида ЦКП:

ортогональное и
ротатабельное

Количество опытов при ортогональном ЦКП определяется по формуле

$$N = 2^n + 2n + 1$$

где 2^n – количество опытов, образующих полный факторный эксперимент; $2n$ – число так называемых «звездных» точек в факторном пространстве, имеющих координаты ($\pm\alpha$, 0, 0, ..., 0); (0, $\pm\alpha$, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., $\pm\alpha$). Здесь величина α называется «звездным» плечом; 1 – опыт в центре планирования, т. е. в точке факторного пространства с координатами (0, 0, ..., 0)

α

Значения «звездного» плеча α для ЦКП с различным числом факторов n следующие:

n	2	3	4	5
α	1,000	1,215	1,414	1,547

Эти значения α выбраны из условия ортогональности матрицы планирования

Уравнение регрессии при ортогональном ЦКП ищут в следующем виде

$$y = b_0^* + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \ldots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n +$$

$$+ b_{11} X_1^* + \ldots + b_{nn} X_n^*.$$

Переменные величины $X_{ji}^* = X_{ji}^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ji}^2$

здесь *j* – номер опыта; *i* – номер фактора, введены для того, чтобы матрица планирования была ортогональна и коэффициенты регрессии определялись независимо друг от друга по результатам опытов. Чтобы получить уравнение регрессии в обычной форме

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \ldots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n +$$

$$+ b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + \ldots + b_{nn} X_n^2,$$

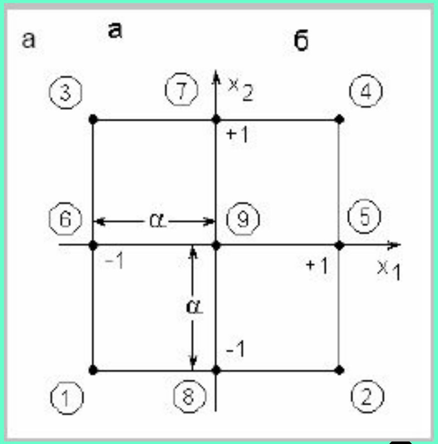
находят величину $b_0 = b_0^* - \frac{b_{11}}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ji}^2 - \ldots - \frac{b_{nn}}{N} \sum_{j=1}^{N} X_{jn}^2.$

Ортогональный план

Это план 2-ого порядка после преобразований (*)

$$(*)\ x'_{ij} = x_{ij}{}^2 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}{}^2}{n} = x_{ij}{}^2 - \bar{x}_i{}^2$$

Эти преобразования позволяют усреднить случайные погрешности



Номер опыта		Факторы						Результат y_j
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1'	x_2'	
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y_4
Звезд-Ные точки	5	+1	α=+1	0	0	+1/3	-2/3	y_5
	6	+1	α=-1	0	0	+1/3	-2/3	y_6
	7	+1	0	α=+1	0	-2/3	+1/3	y_7
	8	+1	0	α=-1	0	-2/3	+1/3	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

Ортогональный план 2-ого порядка

Тогда уравнение регрессии

$$y = b_0' + \sum_{j=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' x_i';$$

В итоге уравнение регрессии преобразуется к виду

$$\hat{y} = b_0' + \sum_{j=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' (x_i{}^2 - \bar{x}_i{}^2)$$

Коэффициенты регрессии при ортогональном ЦКП считают по следующим формулам

$$b_0^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji} y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji})^2}$$ где $i \neq 0$

$$b_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji} X_{jk} y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji} X_{jk})^2}$$ где $i \neq k$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ji}^* y_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{ji}^*)^2}$$

Для расчета оценок дисперсий в определении коэфф-тов регрессии используют следующие выражения

$$S_{b_0^*}^2 = \frac{S_y^2}{N}$$

$$S_{b_0}^2 = S_{b_0^*}^2 + \frac{nS_{b_{ii}}^2}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ji}^2$$

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^{N}(X_{ji})^2}$$ где $i \neq 0$

$$S_{b_ik}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^{N}(X_{ji}X_{jk})^2}$$ где $i \neq k$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^{N}(X_{ji}^*)^2}$$

Коэффициент b_i, считается значимым, если $|b_i| > S_{b_i} t_{\alpha,n}$. Аналогично проверяется значимость остальных коэфф-тов регрессии. Проверка адекватности уравнения регрессии осуществляется с помощью критерия Фишера

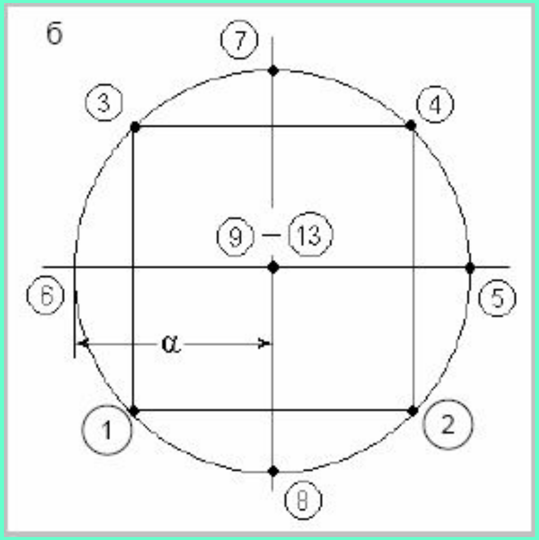
$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2}$$

Метод ротатабельного центрального композиционного планирования

Метод ротатабельного планирования эксперимента позволяет получать более точное математическое описание поверхности отклика по сравнению с ортогональным ЦКП, что достигается благодаря увеличению числа опытов в центре плана и специальному выбору величины «звездного» плеча α*.*

Это план, у которого точки плана располагаются на окружностях (сферах, гиперсферах)

Точность оценивания функции отклика по любому направлению факторного пространства (для всех точек плана) одинаковая, что позволяет наилучшим образом извлечь максимальное количество (несмещенной) информации из плана



Номер опыта		Факторы						Результат
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_j
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
Звездные точки	5	+1	+1,414	0	0	2	0	y_5
	6	+1	-1,414	0	0	2	0	y_6
	7	+1	0	+1,414	0	0	2	y_7
	8	+1	0	-1,414	0	0	2	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9
	10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	+1	0	0	0	0	0	y_{12}

Ротабельный план 2-ого порядка

Для того, что бы привести план 2-ого порядка к ротатабельному, величину плеча выбирают из условия

$$(**)\ \alpha = 2^{\frac{k}{4}} \text{ при } k < 5 \text{ и } \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}} \text{ при } k >= 5$$

При ротатабельном ЦКП для вычисления коэффициентов регрессии и соответствующих оценок дисперсий находят следующие константы

$$A = \frac{1}{2B\left[(n+2)B - n\right]} \qquad B = \frac{nN}{(n+2)(N - N_0)} \qquad C = \frac{N}{N - N_0}$$

где *n* – число факторов; *N* – общее число опытов ротатабельного ЦКП; N_0 – число опытов в центре плана

На основании результатов эксперимента вычисляют след. суммы

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} y_j \qquad S_i = \sum_{j=1}^{N} X_{ji} y_j$$ (где *i*=1,2,…,*n*),

$$S_{ik} = \sum_{j=1}^{N} X_{ji} X_{jk} y_j$$ (где $i \neq k$), $$S_{ii} = \sum_{i=1}^{N} X_{ji}^2 y_j$$ (где i=1,…, *n*)

Формулы для расчета коэффициентов регрессии имеют следующий вид

$$b_0 = \frac{2AB}{N}\left[S_0 B(n+2) - C\sum_{i=1}^{n} S_{ii} \right]$$

$$b_i = \frac{CS_i}{N} \qquad b_{ik} = \frac{C^2 S_{ik}}{BN}$$ где $i \neq k$

$$b_{ii} = \frac{AC}{N}\left\{ S_{ii}C\left[B(n+2)-n\right] + C(1-B)\sum_{i=1}^{n} S_{ii} - 2BS_0 \right\}$$

Оценки дисперсий в определении коэфф-тов регрессии вычисляют по следующим формулам

$$S_{b_0}^2 = \frac{2AB(n+2)}{N} S_{воспр}^2$$

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_{воспр}^2}{N - N_0}$$ (где $i=1,2,\ldots,n$)

$$S_{b_{ik}}^2 = \frac{C^2 S_{воспр}^2}{N}$$ (где $i \neq k$)

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{AC^2 S_{воспр}^2}{N} \left[B(n+1) - (n-1) \right]$$

Коэффициент b_i, считается значимым, если $|b_i| > S_{b_i} t_{\alpha,n}$. Аналогично проверяется значимость остальных коэфф-тов регрессии

Оценку дисперсии адекватности рассчитывают по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} (y_j^э - y_j^p)^2 - S_{воспр}^2 (N_0 - 1)}{N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)}$$

С ней связано число степеней свободы

$$f_{ад} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)$$

Проверку адекватности уравнения регрессии осуществляют с помощью критерия Фишера

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2}$$

Пример. Рассмотреть ротатабельное ЦКП для двух факторов. Матрица планирования и результаты эксперимента приведены в таблице

Матрица планирования и результаты эксперимента

Система опытов	Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	$y_j^э$	$y_j^р$
Полный факторный эксперимент	1	−1	−1	+1	+1	+1	66,8	67,4
	2	+1	−1	−1	+1	+1	66,2	66,8
	3	−1	+1	−1	+1	+1	74,8	75,4
	4	+1	+1	+1	+1	+1	67,8	68,4
Опыты в "звездных" точках	5	+1,41	0	0	2	0	62,1	62,8
	6	−1,41	0	0	2	0	67,5	68,1
	7	0	+1,41	0	0	2	76,4	76,8
	8	0	−1,41	0	0	2	69,6	70,2
Опыты в центре плана	9	0	0	0	0	0	66,3	66,7
	10	0	0	0	0	0	67,2	66,7
	11	0	0	0	0	0	67,0	66,7
	12	0	0	0	0	0	66,2	66,7
	13	0	0	0	0	0	67,2	66,7

Для нахождения коэффициентов регрессии вычислим следующие вспомогательные коэффициенты

$$B = \frac{2 \cdot 13}{(2+2)(13-5)} = 0{,}81 \qquad A = \frac{1}{2 \cdot 0{,}81\left[(2+2) \cdot 0{,}81 - 2\right]} = 0{,}5 \qquad C = \frac{13}{8} = 1{,}63$$

На основании результатов опытов вычислим вспомогательные суммы

$$S_0 = \sum_{j=1}^{13} y_j^э = 885{,}1 \qquad S_1 = \sum_{j=1}^{13} X_{j1} y_j^э = -15{,}2 \qquad S_2 = \sum_{j=1}^{13} X_{j2} y_j^э = 19{,}2$$

$$S_{12} = \sum_{j=1}^{13} X_{j1} X_{j2} y_j^э = -6{,}4 \qquad S_{11} = \sum_{j=1}^{13} X_{j1}^2 y_j^э = 535{,}6$$

$$S_{22} = \sum_{j=1}^{13} X_{j2}^2 y_j^э = 567{,}6$$

Коэффициенты регрессии рассчитываем по формулам

$$b_0 = \frac{2AB}{N}[S_0 B(n+2) - C(S_{11} + S_{22})] = \frac{2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}81}{13}[885{,}1\cdot 0{,}81(2+2) -$$

$$-1{,}63(535{,}6 + 567{,}6)] = 66{,}7; \qquad b_1 = \frac{CS_1}{N} = \frac{1{,}63(-15{,}2)}{13} = -1{,}89$$

$$b_2 = \frac{CS_2}{N} = \frac{1{,}63\cdot 19{,}2}{13} = 2{,}41 \qquad b_{12} = \frac{C^2 S_{12}}{BN} = \frac{(1{,}63)^2\cdot(-6{,}4)}{0{,}81\cdot 13} = -1{,}61$$

$$b_{11} = \frac{AC}{N}\{S_{11}C[B(n+2) - n] + C(1-B)(S_{11} + S_{22}) - 2BS_0\} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 1{,}63}{13}\{535{,}6\cdot 1{,}63[0{,}81(2+2) - 2] + 1{,}63(1-0{,}81)(535{,}6 + 567{,}6) -$$

$$-2\cdot 0{,}81\cdot 885{,}1\} = -0{,}6;$$

$$b_{22} = \frac{AC}{N}\{S_{22}C[B(n+2) - n] + C(1-B)(S_{11} + S_{22}) - 2BS_0\} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 1{,}63}{13}\{567{,}6\cdot 1{,}63[0{,}81(2+2) - 2] + 1{,}63(1-0{,}81)(535{,}6 + 567{,}6) -$$

$$2\cdot 0{,}81\cdot 885{,}1\} = 3{,}4.$$

Оценку дисперсии воспроизводимости можно найти на основании результатов опытов, проведенных в центре плана

$$\bar{y} = \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} y_j^э = \frac{1}{5}(66{,}3 + 67{,}2 + 67{,}0 + 66{,}2 + 67{,}2) = 67$$

$$S^2_{воспр} = \frac{1}{N_0 - 1}\sum_{j=1}^{N_0}(y_j^э - \bar{y}) = 0{,}3$$

Эта величина найдена при числе степеней свободы $f = N_0 - 1 = 5 - 1 = 4$

Оценки дисперсий в определении коэфф. регрессии

$$S^2_{b_0} = \frac{2AB(n+2)}{N} S^2_{воспр} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81(2+2)0{,}3}{13} = 0{,}0748$$

$$S^2_{b_i} = \frac{S^2_y}{N - N_0} = \frac{0{,}3}{13-5} = 0{,}0375 \qquad S^2_{b_{ik}} = \frac{C^2 S^2_y}{N} = \frac{(1{,}63)^2 0{,}3}{13} = 0{,}0613$$

$$S^2_{b_{ii}} = \frac{AC^2 S^2_y}{N}[B(n+1) - (n-1)] = \frac{0{,}5(1{,}63)^2 0{,}3}{13}[0{,}81(2+1) - (2-1)] = 0{,}0438$$

Пользуясь таблицей значений критерия Стьюдента, находим $t_{\alpha,n} = 2{,}78$ для $f = 4$ и $P = 0{,}95$

$$S_{b_0} t_{\alpha,n} = 0{,}274 \cdot 2{,}78 = 0{,}761 \qquad S_{b_i} t_{\alpha,n} = 0{,}194 \cdot 2{,}78 = 0{,}539$$

$$S_{b_{ik}} t_{\alpha,n} = 0{,}248 \cdot 2{,}78 = 0{,}689 \qquad S_{b_{ii}} t_{\alpha,n} = 0{,}209 \cdot 2{,}78 = 0{,}581$$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии рассмотрим соотнош.

$$|b_0| = 66{,}7 > S_{b_0} t_{\alpha,n} \qquad |b_1| = 1{,}89 > S_{b_i} t_{\alpha,n} \qquad |b_2| = 2{,}41 > S_{b_i} t_{\alpha,n}$$

$$|b_{12}| = 1{,}61 > S_{b_{ik}} t_{\alpha,n} \qquad |b_{11}| = 0{,}61 > S_{b_{ii}} t_{\alpha,n} \qquad |b_{22}| = 3{,}4 > S_{b_{ii}} t_{\alpha,n}$$

Все коэффициенты регрессии значимы. Вычисляем оценку дисперсии адекватности

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{j=1}^{N} (y_j^э - y_j^p)^2 - S^2_{воспр}(N_0 - 1)}{N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)} = \frac{3{,}81 - 0{,}3 \cdot 4}{13 - \frac{4 \cdot 3}{2} - 4} = 0{,}87$$

Число степеней свободы, связанных с этой оценкой дисперсии

$$f_{ад} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1) = 13 - \frac{4 \cdot 3}{2} - 4 = 3$$

Расчетное значение критерия Фишера $F = \dfrac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2} = \dfrac{0{,}87}{0{,}3} = 2{,}9$

Из таблицы значений критерия Фишера соответствующее значение критерия $F_T = 6{,}6$. Условие $F_p \le F_T$ выполнено, следовательно, уравнение регрессии

$$y = 66{,}7 - 1{,}89X_1 + 2{,}41X_2 - 1{,}61X_1X_2 - 0{,}61X_1^2 + 3{,}40X_2^2$$

адекватно представленным результатам эксперимента

Перейдем в уравнение регрессии от кодированных переменных к физическим

Пусть в нашем примере кодированные переменные X_1 и X_2 представляют собой температуру и концентрацию, причем координаты центра плана x_{01}= 60°С и x_{02}= 30%, а шаги варьирования Δx_1= 5°С и Δx_2= 1% . Тогда

$$X_1 = \frac{x_1 - x_{01}}{\Delta x_1} = 0{,}2x_1 - 12 \qquad X_2 = \frac{x_2 - x_{02}}{\Delta x_2} = x_2 - 30$$

Подставляя их в полученное в этом примере уравнение регрессии, преобразуем его к виду

$$y = 2409 + 9{,}57x_1 + 19{,}7x_2 - 0{,}32x_1x_2 - 0{,}0244x_1^2 + 3{,}4x_2^2$$

Пользуясь таким уравнением, исследователь избавляется от необходимости переводить всякий раз условия опыта в кодированные переменные

Планирование активного эксперимента

При планировании экспериментов чаще всего применяются планы 1-ого и 2-ого порядков. Планы более высоких порядков применяются редко из-за их большой вычислительной сложности

Планы 1-ого порядка – это планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащее только первые степени факторов и их произведения

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{\substack{i,u=1 \\ i \neq i}}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \neq u}}^{k} b_{iju} x_i x_j x_u + \ldots$$

Планы 2-ого порядка – это планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащие вторые степени факторов

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^{\,2} + \sum_{\substack{i,u=1 \\ i \neq u}}^{k} b_{iu} x_i x_u + \ldots$$

Планирование первого порядка

- В качестве факторов выбираются только контролируемые и управляемые факторы (переменные)
- Обеспечивается возможность независимого изменения каждого из факторов и поддержание его на определенном уровне
- Для каждого фактора указывается интервал (+/-), в пределах которого ставится исследование

Представления плана эксперимента
(на примере эксперимента с 3-мя независимыми факторами)

b_0, b_1, b_2, b_3 – коэффициенты регрессии

x_i*x_u – члены двойного взаимодействия

x_1*x_2*x_3 – члены тройного взаимодействия

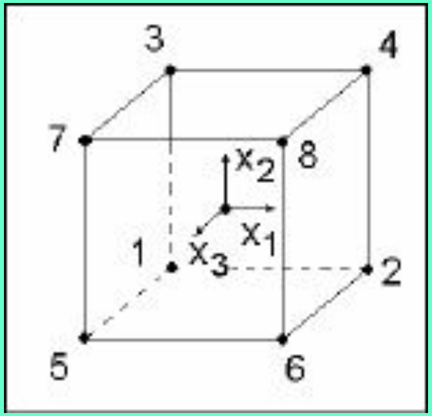
Уравнением регрессии

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + \sum_{\substack{i,u=1 \\ i \neq u}}^{3} b_{ui} x_i x_u + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

Табличное (матричное) представление

Номер опыта	План								Результат y
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y4
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	y5
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	y6
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	y7
8	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	y8

Геометрическое представление



Свойства матрицы представления эксперимента

1. Свойство симметричности – алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю (за исключением столбца, соответствующего свободному члену)

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 0,$$

i = номер фактора, j – номер опыта

2. Свойство нормирования – сумма квадратов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}{}^{2} = n;$$

3. Свойство ортогональности – скалярное произведение всех вектор-столбцов (сумма почленных произведений элементов любых вектор столбцов) равно нулю

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} X_{uj} = 0, i \neq u$$

Определение коэффициентов b уравнения регрессии

Методом наименьших квадратов находятся оценки b коэффициентов

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \hat{y}_j \right)^2 \to \min_{b_i}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 2 \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - b_0 - b_1 X_{1j} - b_2 X_{2j} \right) X_{1j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j} X_{1j} - b_0 \sum_{j=1}^{n} X_{1j} - b_1 \sum_{j=1}^{n} X_{1j}^{\ 2} - b_2 \sum_{j=1}^{n} X_{1j} X_{2j} = 0;$$

По свойствам матрицы планирования

- (ссимметриность) $b_0 \sum X_{1j} = 0;$

– (нормирования) $b_1 \sum X_{1j}^{\ 2} = n b_1;$

– (ортогональность) $b_2 \sum X_{1j} X_{2j} = 0;$

Получаем

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{1j}}{n}; b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{2j}}{n}; b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{0j}}{n}$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j \left(X_1 X_2 \right)_j}{n}; b_{123} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j \left(X_1 X_2 X_3 \right)_j}{n}$$

Планирование второго порядка

- Применяется если описание функции отклика первым порядком получается недостаточным (например, процесс носит нелинейный характер)
- Каждый фактор варьируется не менее чем на трех уровнях – полный эксперимент содержит 3^k (k – количество факторов) опытов.

Номер опыта		Факторы						Результат
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_j
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
	5	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
Звездные точки	6	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
	7	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
	8	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9

План 2-ого порядка при k=2 n=1

Опыты проводятся

1. В «крайних точках» - как в планировании 1-ого порядка
2. В «звездных точках» - x_i=(+/-)a, x_j=0, 1,…,n; 1,…,n; i!=j
3. В «центре» - x_i=0, j=1,2,3,…,n

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^{\ 2} + b_{22} x_2^{\ 2} + b_{12} x_1 x_2$$

Уравнение регрессии для эксперимента с 2-мя факторами