Работа и механическая энергия

Лекция №4

План лекции

- 1. Работа силы. Мощность.
- 2. Консервативные силы.
- 3. Кинетическая энергия.
- 4. Потенциальная энергия.
- 5. Закон сохранения энергии.
- 6. Применение законов сохранения импульса и энергии к расчету абсолютно упругого и неупругого ударов:

А) Абсолютно неупругий удар;

Б) Абсолютно упругий удар.

Энергия

- Энергия – это универсальная и наиболее общая характеристика всех форм движения материи и их превращений друг в друга.

- Энергией называется СФВ изменение, которой равна работе совершаемой в данном процессе.

$$\Delta W = A$$

- Для различных форм движения и соответствующих им взаимодействий в физике рассматривают следующие виды энергии: механическую; внутреннюю; электромагнитную; ядерную и т.д.

- В механике рассматривается ***механическая энергия***.

- **Механическая энергия** тела – СФВ, являющаяся мерой его механического движения и механического взаимодействия и зависящая от массы тела, скорости его движения и расстояния до других тел или расстояния между частицами одного и того же тела.

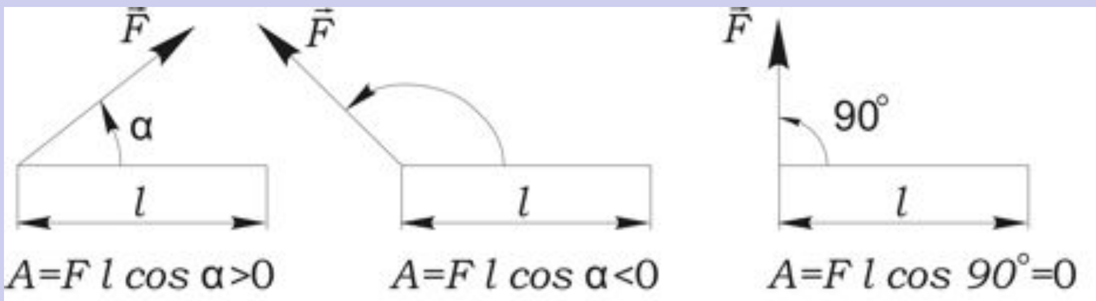
- Для количественного описания ***механического движения*** тела, при котором происходит изменение энергии тела, в механике вводят понятие **работы силы**.

1. Работа силы. Мощность

Работа *A* силы – СФВ, характеризующая процесс передачи механического движения от одного тела к другому и равная скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cos\alpha}$$

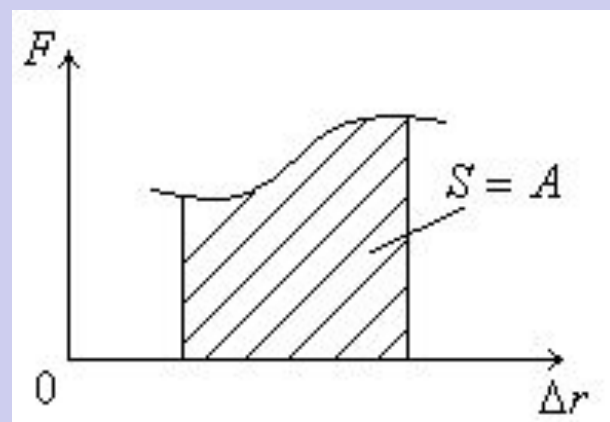
$$где\ \ \alpha = \left(\vec{F} \,\hat{,}\, \Delta\vec{r}\right)$$



[*A*] = 1 Н·м = 1 Дж (джоуль)

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ – элементарная работа

$$A = \int \delta A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$



Мощность силы

Мощность N (P) **силы** – СФВ, характеризующая быстроту совершения работы и равная производной работы по времени:

$$\boxed{N = \frac{\delta A}{dt}}$$

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}$$ ***- средняя мощность***

$$[N] = \frac{1\,\text{Дж}}{1\,\text{с}} = 1\,\text{Вт (ватт)}$$

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

2. Консервативные силы

Если на частицу в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то эта частица находится в поле сил.

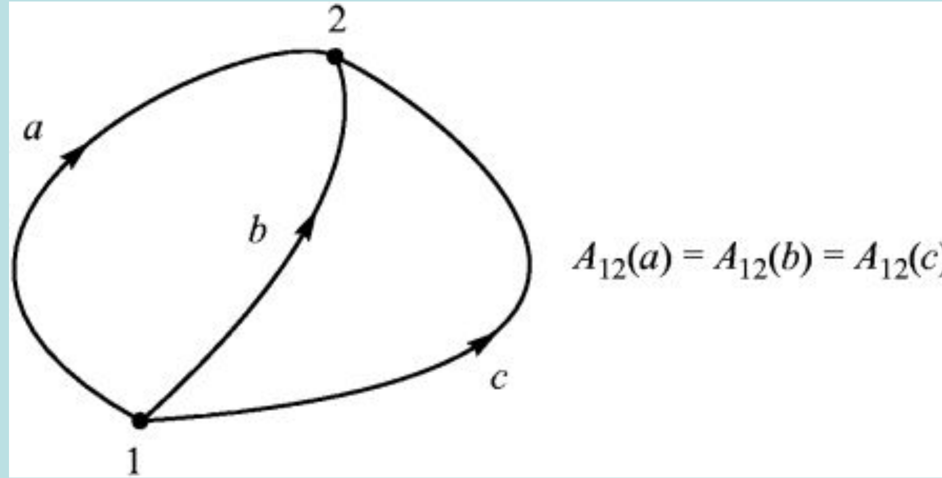
- Поле сил называется **центральным,** если направление силы действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через ее неподвижный центр, а величина силы зависит от расстояния до этого центра.

  Примеры полей: ***гравитационное*** и ***электростатическое***.

- Поле называется **однородным**, если силы действующие на частицу ***одинаковы*** по **величине** и **направлению** ($F = const$).

- Поле называется **стационарным**, если оно не изменяется с течением времени. Поле изменяющееся со временем, называется **нестационарным**.

- Для **стационарного поля** работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь ***только*** от **начального** и **конечного** положения частицы и ***не зависит*** от **пути**, по которому двигалась частица. Силы, обладающие таким **свойством**, называются ***консервативными силами***.
- **Консервативная сила** – это сила, работа которой не зависит от формы траектории.



По замкнутой траектории работа такой силы равна нулю: $A_{\circlearrowleft} = 0.$

$$A = \oint\limits_{(L)} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Примеры - сила тяжести, сила упругости, сила Кулона, сила Ампера и др.

Консервативные силы можно определить двумя способами:

1)Как силы, работа которых не зависит от **пути**, по которому частица переходит из одного положения в другое;

2)Как силы, работа которых на ***любом*** **замкнутом пути** равна **нулю**.

Работа совершаемая **силой тяжести** в поле Земли определяется по формуле:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

Из этой формулы видно, что работа в поле силы тяжести не зависит от пути. Отсюда следует, что **сила тяжести** является ***консервативной силой***.

- **Диссипативная** (неконсервативная) **сила** – это сила, работа которой ***зависит*** от формы траектории.

Примеры - силы трения, силы сопротивления движению, сила тяги, сила давления газа и др.

3. Кинетическая энергия

- В механике различают два вида **механической энергии**: **кинетическую** и **потенциальную**.

- **Кинетической энергией** механической системы называется энергия механического движения этой системы.

Изменение кинетической энергии м.т. происходит под действием приложенной к ней силы F и равно работе совершаемой этой силой.

$$\Delta W_k = A$$

- Кинетическая энергия W_k тела - СФВ, являющаяся мерой его механического движения и равная половине произведения массы частицы на квадрат ее скорости, т.е.

$$\boxed{W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

$$\boxed{A = \Delta W_k}$$

- теорема о кинетической энергии

- Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$$

- Кинетическую энергию **твердого тела** движущегося **поступательно** можно найти по формуле:

$$\boxed{W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

где m – масса всего тела.

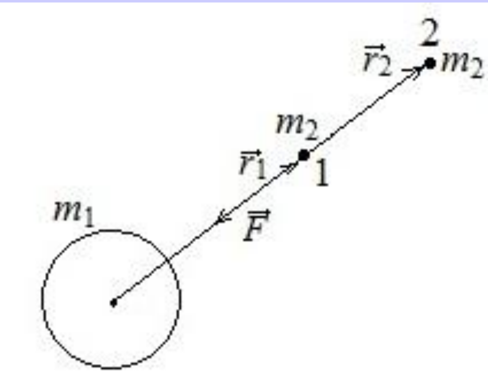
- Кинетическая энергия системы есть функция состояния ее механического движения $f(\upsilon)$, т.е. она полностью определяется значением масс и скоростей входящих в неё тел (м.т.).

- Кинетическая энергия системы в отличии от её импульса **не зависит** от того, в каких направлениях движутся её части (тела или м.т. входящие в рассматриваемую механическую систему).

4. Потенциальная энергия

- **Потенциальная энергия** - СФВ, являющаяся мерой механического взаимодействия тел или частей тела. Она является непрерывной однозначной и дифференцируемой функцией, зависящей от расстояния между телами или расстояния между частицами одного тела.

Потенциальная энергия тела в гравитационном поле

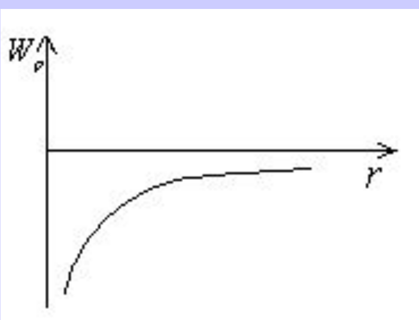


$$A = -\int_{r_1}^{r_2} F dr = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} =$$

$$= -\left[-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} \right) \right] = -\Delta W_p$$

$$A = -\Delta W_p$$

$\boxed{W_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}}$ *- потенциальная энергия тела в гравитационном поле*

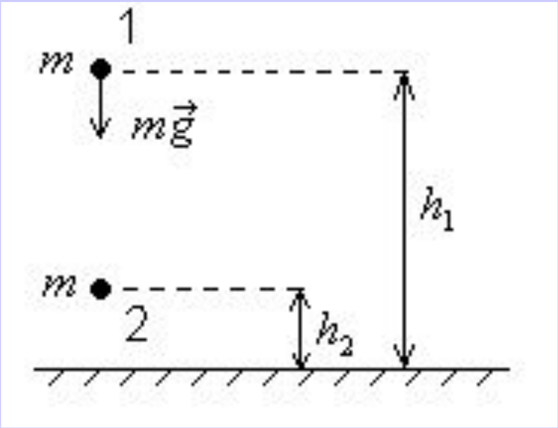


при $r \to \infty \quad W_p \to 0$

Значение потенциальной энергии можно определить с точностью до некоторой постоянной, поэтому выбор начала отсчета условен.

Обычно за нулевой уровень энергии принимают потенциальную энергию бесконечности.

Потенциальная энергия тела, поднятого над Землей



$$F_{тяж} = const$$

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cos 0^\circ = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1)$$

$\boxed{W_p = mgh}$ - потенциальная энергия тела поднятого над землей (при $h << R_З$).

$\boxed{A = -\Delta W_p}$ - *теорема о потенциальной энергии:*

Работа внешних консервативных сил равна убыли потенциальной энергии тела.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Воспользуемся законом Гука: $F_{ух} = - kx = - kr_x$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_у dr = \int_{r_1}^{r_2} - krdr = -k\int_{r_1}^{r_2} rdr = -k\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r_1}^{r_2} = -\left(\frac{kr_2^2}{2} - \frac{kr_1^2}{2}\right)$$

Заменим r_1 и r_2 на x_1 и x_2 соответственно:

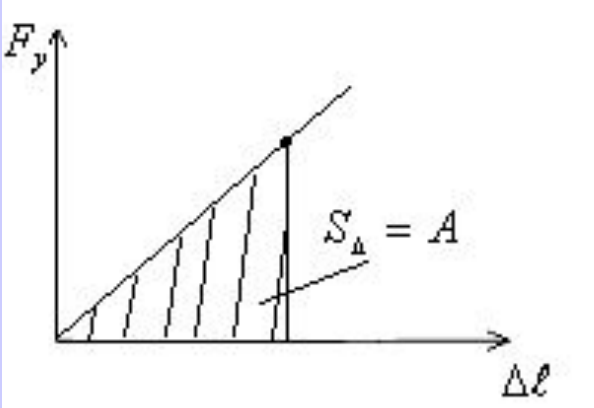
$$A = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right)$$

Согласно теореме о потенциальной энергии $A = -\Delta W_p$

$$\boxed{W_p = \frac{kx^2}{2}}$$

- потенциальная энергия упругого деформированного тела

Согласно закону Гука $F_у = k\Delta l$. Построим график:
Учтем, что $F_у$ является переменной силой.



$$A = -\Delta W_p = W_{p0} - W_p = -W_p$$

$$A = S_\Delta = \frac{1}{2} F_у \Delta l = \frac{\sigma S \Delta l}{2} = \frac{E\varepsilon S \Delta l}{2} \frac{l_0}{l_0}$$

С учетом того, что $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ *и* $V = Sl_0$, *имеем:* $\boxed{W_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} V}$

$\boxed{w = \frac{W}{V}}$ *- объемная плотность энергии тела*

$\boxed{w = \frac{E\varepsilon^2}{2}}$ *- объемная плотность энергии упруго деформированного тела*

Связь консервативной силы и потенциальной энергии

- Применим теорему о потенциальной энергии к элементарной работе консервативной силы:

$$\delta A = -dW_p,$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_p$$

$$\vec{F} = -\frac{dW_p}{d\vec{r}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$ *- оператор Гамильтона (набла-оператор)*

$$\nabla W_p = \mathrm{grad} W_p$$

Вектор градиента скалярного поля – это вектор, показывающий направление наибольшего возрастания данной скалярной функции и равный производной данной функции по координатам.

$$\boxed{\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p}$$ *- связь между консервативной силой и потенциальной энергией*

5. Закон сохранения энергии

Полная механическая энергия системы тел* – это энергия *механического движения и взаимодействия* –** равна сумме ее ***кинетической и потенциальной энергий:

$$\boxed{W = W_k + W_p}$$

На **м.т.** (тела) механической системы могут действовать как ***внутренние***, так и ***внешние силы***, которые могут быть **консервативными** и **неконсервативными**.

- Если механическая система замкнута и консервативна, то на нее не действуют внешние силы, тогда работа ***внешних сил*** равна **нулю**.
- Для таких систем выполняется ***закон сохранения механической энергии***.

- **Закон сохранения механической энергии:**
- Полная механическая энергия замкнутой системы тел между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$$W_{\text{пол}} = W_k + W_p = const$$

- Закон сохранения механической энергии является основным законом механики.

- Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени.

- Если система замкнута, то изменение ее механической энергии обусловлено только действием в ней непотенциальных сил:

$$\Delta W = A^{\text{нпс}}$$

- Системы, в которых действуют непотенциальные силы и их механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии, то они называются **диссипативными системами**.
- **Диссипация** это **рассеяние**, в данном случае рассеяние энергии.

- В природе все системы являются диссипативными.

- Закон сохранения и превращения энергии – ***фундаментальный закон природы***, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

6. Применение законов сохранения импульса и энергии

к расчету абсолютно упругого и неупругого ударов:

А) Абсолютно неупругий удар

Б) Абсолютно упругий удар

Удар

- **Ударом** называется **явление** изменение скоростей тел на конечные значения за очень короткий промежуток времени, происходящее при их столкновениях.

- **Силы взаимодействия** (внутренние силы) между сталкивающимися телами столь велики, что ***внешними силами***, действующими на них можно **<u>пренебречь</u>**. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как **<u>замкнутую систему</u>** и применять к ней ***<u>законы сохранения</u>***.

- Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами.

- В природе нет **идеально упругих тел** и **идеально гладких поверхностей**, поэтому относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел ***после удара*** и ***до удара*** называется **коэффициентом восстановления ε**:

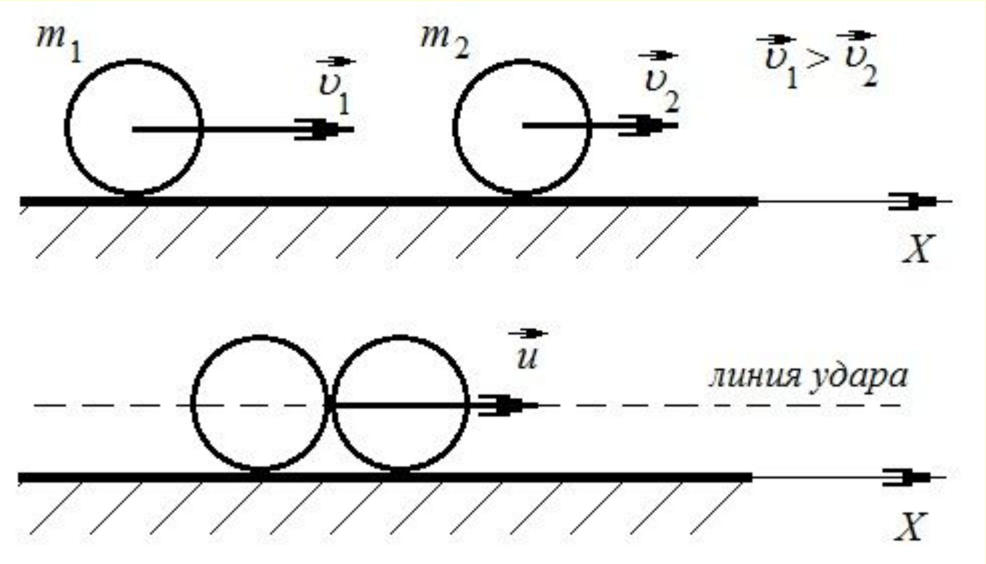
$$\varepsilon = \frac{\upsilon'_n}{\upsilon_n}$$

- где υ_n – скорость тела до удара, υ'_n – скорость тела после удара.
- Если для сталкивающихся тел ε=0, то такие тела называются **абсолютно неупругими**, если ε=1 – **абсолютно упругими.**

- Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**.
- **Удар** называется **прямым**, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара, в противном случае удар называется **косым**.
- **Удар** называется **центральным**, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

Абсолютно неупругий удар

- Удар называется абсолютно неупругим, если после удара тела объединяются и дальше движутся как одно целое, т.е. с одной и той же скоростью.



При ***абсолютно неупругом ударе*** *<u>выполняется</u>* **закон сохранения импульса**, *а* **закон сохранения энергии** *<u>не выполняется.</u>*

m_1 и m_2 – массы соударяющихся тел, υ_1 и υ_2 − скорости этих тел до удара, найдем скорость u этих тел после удара.

Запишем ***<u>закон сохранения импульса</u>****:*

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = const$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u} + m_2\vec{u}$$

$$m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = (m_1 + m_2)u_x$$

$$u_x = \frac{m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}}{m_1 + m_2}$$

- При абсолютно неупругом ударе закон сохранения энергии не выполняется, так как часть механической энергии переходит во внутреннюю (в тепло), т.е. соударяющиеся тела нагреваются.

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} < 0$$

$$Q = W_{k1} - W_{k2}$$

$$W_{k1} = \frac{m_1 \upsilon_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_{2x}^2}{2} \qquad W_{k2} = \frac{m_1 u_x^2}{2} + \frac{m_2 u_x^2}{2}$$

Абсолютно упругий удар

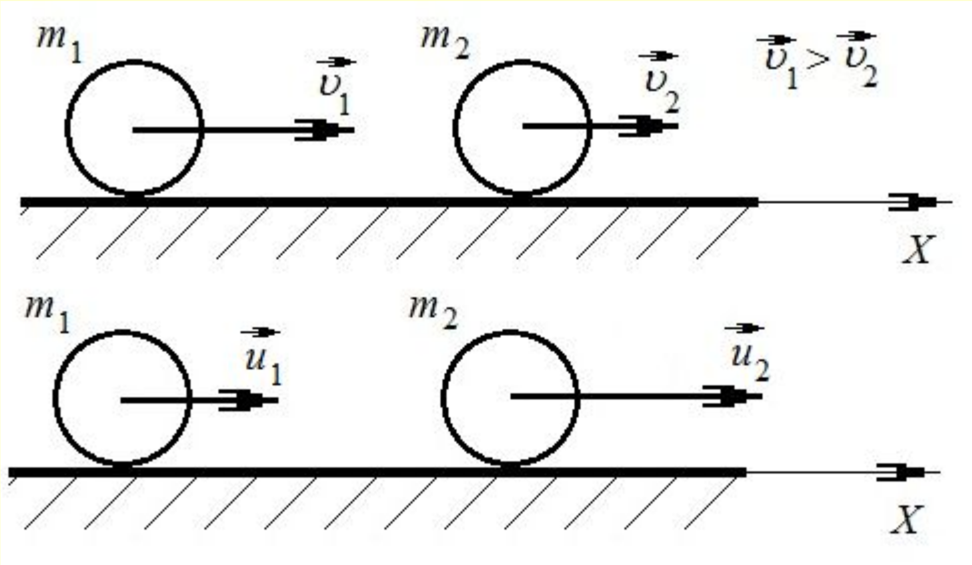
- **Абсолютно упругим ударом** называется такой **удар**, при котором **механическая энергия** соударяющихся тел *не преобразуется* в другие виды энергии.

- При **абсолютном упругом ударе** выполняются законы сохранения ***импульса*** и ***энергии***.

- При **абсолютно упругом ударе** происходит перераспределение ***механической энергии*** между соударяющимися телами, и после удара тела движутся с разными **скоростями**.

- В процессе удара систему соударяющихся упругих тел можно считать замкнутой и консервативной.

m_1 и m_2 – массы соударяющихся тел, $\boldsymbol{\upsilon}_1$ и $\boldsymbol{\upsilon}_2$ − скорости этих тел до удара, найдем скорость $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ этих тел после удара.



Запишем **закон сохранения энергии**:

$$m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$$

Запишем ***закон сохранения импульса****:*

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

т.к. все скорости направлены вдоль оси *OX*, то из ЗСИ следует, что

$$m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = m_1u_{1x} + m_2u_{2x}$$

ЗСЭ запишем в следующем виде

$$m_1\upsilon_{1x}^2 - m_1u_{1x}^2 = m_2u_{2x}^2 - m_2\upsilon_{2x}^2 \,\Big|\times -1$$

$$m_1\left(u_{1x}^2 - \upsilon_{1x}^2\right) = -m_2\left(u_{2x}^2 - \upsilon_{2x}^2\right)$$

ЗСИ запишем в следующем форме

$$m_1\left(u_{1x} - \upsilon_{1x}\right) = -m_2\left(u_{2x} - \upsilon_{2x}\right)$$

теперь перепишем ЗСЭ

$$m_1\left(u_{1x} + \upsilon_{1x}\right)\left(u_{1x} - \upsilon_{1x}\right) = -m_2\left(u_{2x} + \upsilon_{2x}\right)\left(u_{2x} - \upsilon_{2x}\right)$$

- Произведя сокращения получим:

$$u_{1x} + \upsilon_{1x} = u_{2x} + \upsilon_{2x}$$

- Выразим скорость второго тела после удара

$$u_{2x} = u_{1x} + \upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}$$

- Эту формулу подставим в ЗСИ, получим

$$u_{1x}(m_1 + m_2) = m_1\upsilon_{1x} - m_2\upsilon_{1x} + 2m_2\upsilon_{2x}$$

- Из этого уравнения находим скорость первого тела после удара:

$$u_{1x} = \frac{\upsilon_{1x}(m_1 - m_2) + 2m_2\upsilon_{2x}}{m_1 + m_2}$$

- Произведя аналогичные рассуждения получаем формулу для расчёта скорости второго тела после удара:

$$u_{2x} = \frac{\upsilon_{2x}(m_2 - m_1) + 2m_1\upsilon_{1x}}{m_1 + m_2}$$