

**Динамика  
материальной точки и  
поступательного движения  
твёрдого тела**

**Лекция №3**

# План лекции

- 1. Инерциальные системы отсчета. Сила, масса и импульс тела. Первый закон Ньютона.
- 2. Второй закон Ньютона.
- 3. Третий закон Ньютона.
- 4. Силы в механике.
- 5. Центр масс. Закон сохранения импульса.
- 6. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

**1. Инерциальные системы отсчета.  
Сила, масса и импульс тела.  
Первый закон Ньютона**

*Динамика изучает механическое взаимодействие тел с учетом вызвавших его причин.*

*Динамику интересуют силы, действующие на тела.*

**Сила**  $\vec{F}$  – ВФВ, характеризующая механическое взаимодействие тел и полей.

$$[F] = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 1 \text{ Н (ньютон)}$$

О действии сил можно судить по двум признакам:

- 1) Появление ускорения (динамическое действие)
- 2) Деформация тел (статическое действие)

### Принцип суперпозиции для сил:

*Если на тело действуют несколько сил, то силы действуют независимо друг от друга, и результат их действия складывается по правилам действия над векторами.*

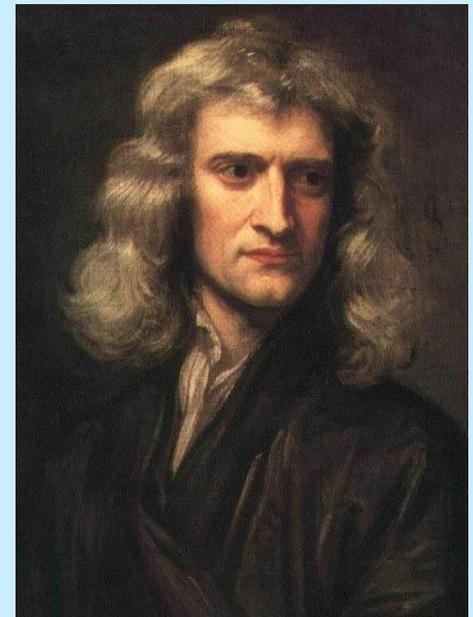
$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

**Инерциальная система отсчета (ИСО)** – это система отсчета, связанная со свободным невращающимся телом.

Свободным называется тело, не взаимодействующее с другими телами.

*В основе классической механики лежат три закона, сформулированные И. Ньютоном в книге «Математических началах натуральной философии» (1687 г.).*

*Классическая механика – это механика Ньютона.*



*Сэр Исаак (Айзек)  
Ньютон  
1642-1727*

# Первый закон Ньютона

## (закон инерции)

**Первый закон Ньютона** говорит о движении свободной м.т. относительно ИСО.

Формулировки :

- Ньютон:  
«Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние»
- А.К. Кикоин, И.К. Кикоин, Физика-10:  
«Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются)»
- Мы:

**В ИСО свободная м.т. либо покоится либо движется равномерно и прямолинейно.**

**Инерция** – явление сохранения скорости тела по модулю и направлению до тех пор, пока на него не подействуют другие тела.

**Инертность** – свойство тел, проявляющееся в том, что скорость тела изменяется не мгновенно, а с течением времени.

**Масса тела**  $m$  – СФВ, являющаяся мерой инертных свойств тела при его поступательном движении и мерой гравитационных свойств тела.

$$[m] = 1 \text{ кг}$$

Импульс  $\vec{p}$  (количество движения) м.т. – ВФВ, являющаяся мерой ее механического движения и равная произведению массы м.т. на вектор ее скорости:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

## 2. Второй закон Ньютона (основной закон динамики)

**Второй закон Ньютона** отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

- Ускорение, приобретаемое м.т. В ИСО, прямо пропорционально силе, действующей на нее, и обратно пропорционально ее массе:

$$\boxed{a = \frac{F}{m}} \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d(mv)}{dt} = F$$

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = F} \quad (2)$$

- Скорость изменения импульса тела равна равнодействующей всех сил, приложенных к телу (более общая формулировка 2-го закона Ньютона).

Выражение (1) не выполняется в тех случаях, когда масса тела изменяется. Выражение (2) является универсальным.

- Второй закон Ньютона **справедлив** только в **инерциальных системах отсчета**.
- В случае равенства нулю равнодействующих сил ускорение также равно нулю, т.е. этот вывод совпадает с утверждением Первого закона Ньютона.
- **Первый закон Ньютона** рассматривается как самостоятельный закон (а не как следствие второго закона), так как именно 1-ый закон утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых **выполняется 2-ой закон Ньютона**.
- В механике выполняется **принцип независимости действия сил**:  
*если на м.т. действуют одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает м.т. ускорение согласно 2-му закону Ньютона, как будто других сил не было.* Согласно этому принципу, **силы** и **ускорение** можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

# **3. Третий закон Ньютона**

Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



**Примечание:** эти силы должны быть одинаковой природы и приложены к разным телам. Эти силы всегда действуют парами.

Механическая система – это совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых в данной механической задаче

В механических системах различают внутренние и внешние силы.

Сумма всех внутренних сил в механической системе всегда равно нулю:

$$\sum_{i,j=1}^n \vec{F}_{i,j} = 0$$

**ЗАКОНЫ НЬЮТОНА ВЫПОЛНЯЮТСЯ ТОЛЬКО В ИСО!**

# 4. Силы в механике

- А. Упругие силы;
- Б. Силы трения;
- В. Гравитационные силы;
- Г. Вес тела. Сила реакции опоры.

- В **современной физике** различают четыре вида взаимодействий:
  - 1) гравитационное (взаимодействие обусловленное всемирным тяготением);
  - 2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля);
  - 3) Сильное или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре);
  - 4) слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

В рамках **классической механики** имеют дело с **гравитационными** и **электромагнитными** силами, а также с силами упругости и трения, вес тела, силой реакцией опоры.

- **Гравитационные** и **электромагнитные силы** являются **фундаментальными** – их нельзя свести к другим, более простым, силам.
- Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Пример:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \text{ - гравитационная постоянная}$$

- Силы **упругости**, сила **трения**, **вес тела**, **сила реакции опоры** являются по своей природе электромагнитными и, следовательно, не могут считаться фундаментальными. Для этих сил можно получить лишь приближенные эмпирические (опытные) формулы. Примеры:

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

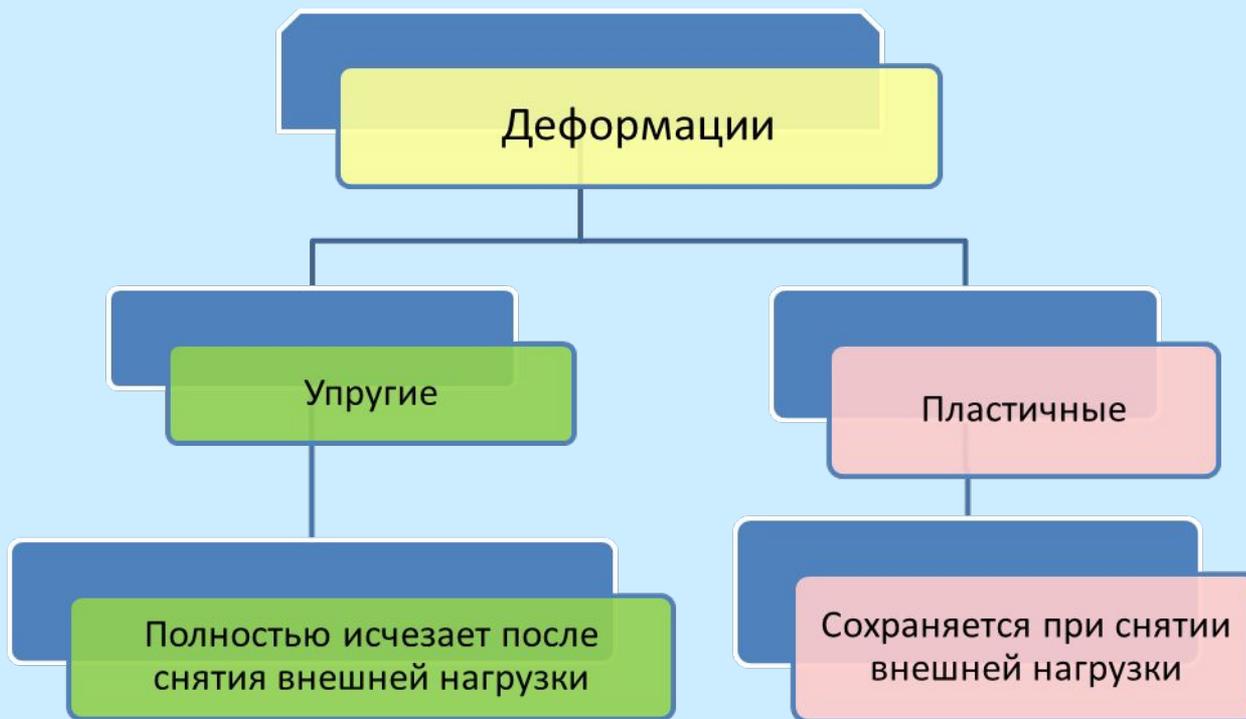
$$|F_{\text{упр}}| = k \Delta x$$

# **А. Упругие силы**

**Упругая сила** – это сила, возникающая в теле при его упругой деформации.

**Силы упругости** по своей природе относятся к **электромагнитному** виду взаимодействия.

**Деформация тела** – это изменение его формы и размеров под действием внешних сил.



# Закон Гука:

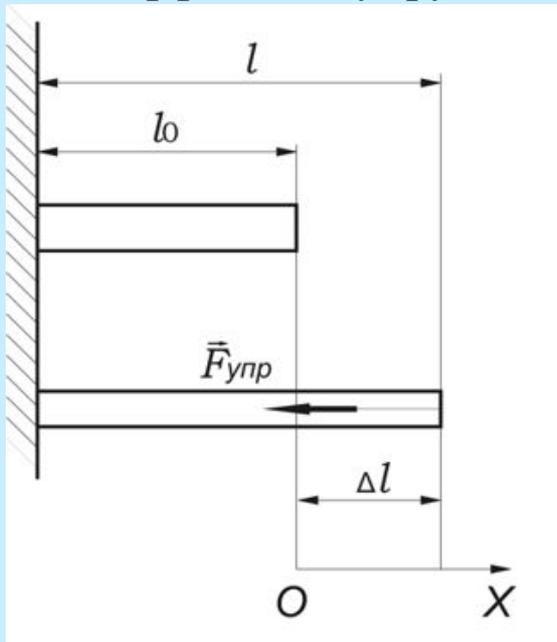
Сила  $\vec{F}_y$  упругости, возникающая в теле, пропорциональна удлинению  $\Delta l$  тела.

$$F_y = k\Delta l = kx$$

$$F_{y,x} = -k\Delta l = -kx$$

$x = \Delta l = l - l_0$  - абсолютное удлинение тела

$k$  - коэффициент упругости (жесткость) тела

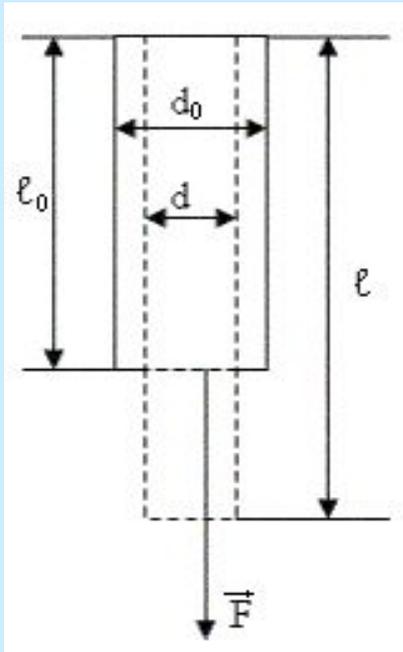


Роберт Гук  
(1635-1703)

## Виды деформаций

- Растяжение и сжатие
- Кручение
- Сдвиг
- Изгиб

# Деформация растяжения (сжатия)



- $\Delta l = l - l_0$  – абсолютное продольное удлинение,
- $\Delta d = d - d_0$  – абсолютное поперечное сжатие,

- $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$  – относительное продольное удлинение

- $\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0}$  – относительное поперечное сжатие

- $\mu = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l}$  – коэффициент Пуассона

$$\mu \leq 0,5$$

**Механическое напряжение**  $\sigma$  – СФВ, характеризующая распределение упругой силы по сечению образца и равная:

$$\sigma = \frac{F_{y.n}}{S}$$

$$p = \frac{F_{\text{внеш.п}}}{S} \quad - \text{механическое усилие}$$

$$[\sigma] = [p] = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па (паскаль)}$$

В случае упругих деформаций однородных тел:

$$\sigma = p, \quad \text{т.к. } F_y = F_{\text{внеш}}$$

**Закон Гука: Механическое напряжение, возникающее в теле, прямо пропорционально его относительному удлинению (сжатию):**

$$\sigma = E \cdot |\varepsilon|$$

$E$  - модуль Юнга

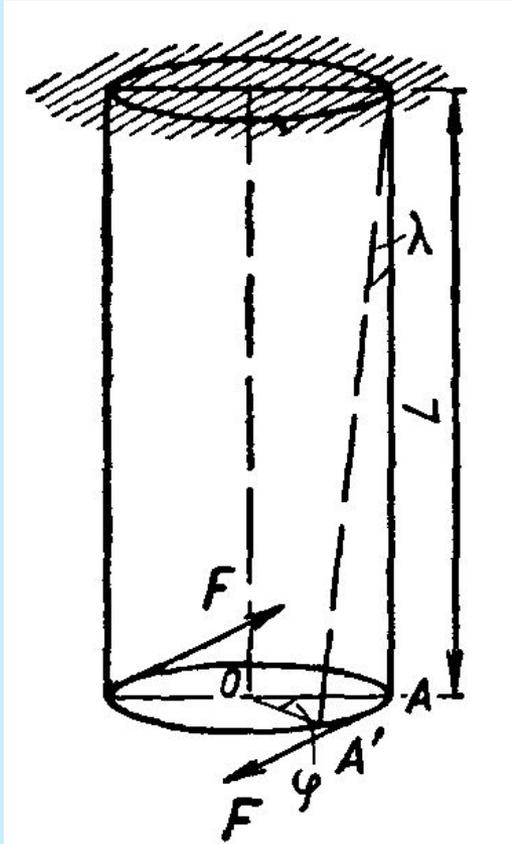
$$[E] = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$$

Физический смысл модуля Юнга:

$$E = \sigma, \quad \text{если} \quad \varepsilon = 1 = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \begin{matrix} l - l_0 = l_0 \\ \underline{l = 2l_0} \end{matrix}$$

**Модуль Юнга** равен такому нормальному механическому напряжению, возникающему в теле, при котором относительное удлинение было бы равно единице, следовательно, приращение длины было бы равно первоначальной длине стержня, т.е. оно изменило свои размеры в два раза.

# Деформация кручения



$\phi$  - угол закручивания диаметра нижнего основания цилиндра

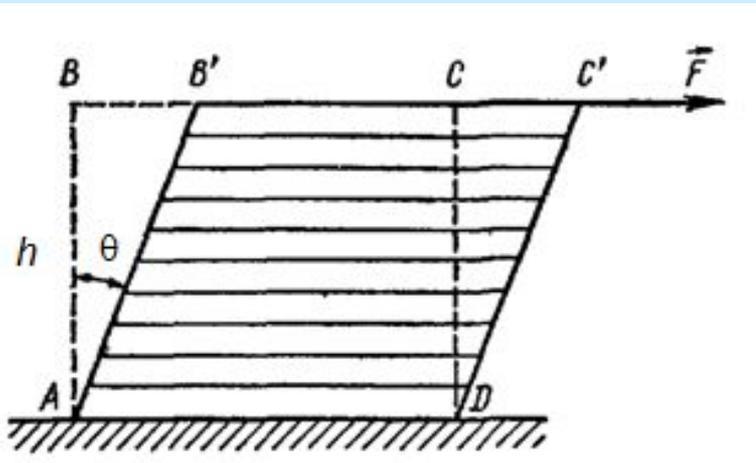
$L$  - высота цилиндра

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\phi}{L} \quad - \text{относительная деформация кручения}$$

$M = C\phi$  - момент силы кручения

$C = \text{const}$  - постоянная кручения

# Деформация сдвига



$\Delta x = CC'$  - абсолютный сдвиг

$\gamma$  - относительный сдвиг

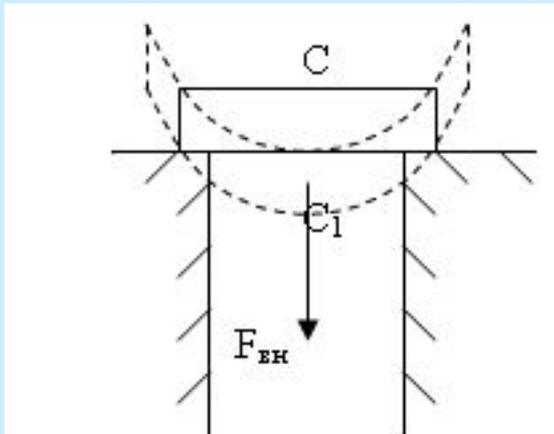
$$[\gamma] = 1 \text{ рад}$$

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h} = \text{tg} \theta$$

Для малых деформаций ( $\theta \rightarrow 0$ ):

$$\text{tg} \theta \approx \theta \Rightarrow \gamma = \theta = \frac{\Delta x}{h}$$

# Деформация изгиба



$\Delta h = CC_1$  - стрела прогиба

## Деформация растяжения

- Нормальное механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F_{y.n}}{S}$$

- относительное продольное удлинение:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- Закон Гука:

$$\sigma = E \cdot |\varepsilon|$$

- $E$  - модуль Юнга
- $[E] = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$

## Деформация сдвига

- Тангенциальное механическое напряжение:

$$\tau = \frac{F_{y\tau}}{S}$$

- относительный сдвиг:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h} = \text{tg}\theta$$

- Закон Гука:

$$\tau = G\gamma = G\theta$$

- $G$  - модуль сдвига
- $[G] = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$

Модуль сдвига равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равен  $45^\circ$   $\text{tg}\theta = 1$

## Б. Силы трения

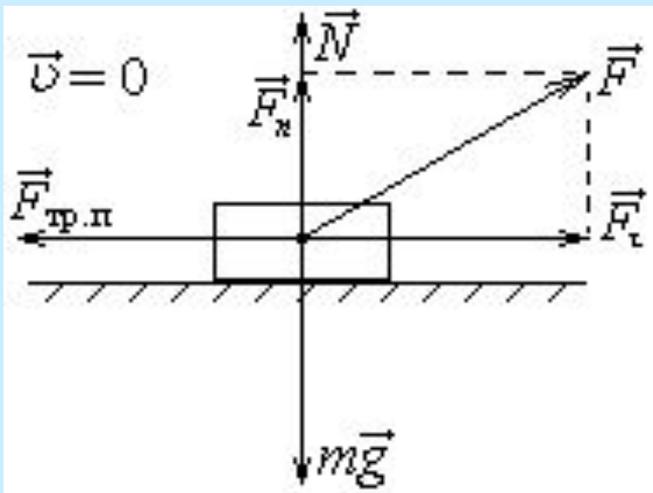
- **Силы трения** возникают (проявляются) при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга.
- Трение – взаимодействие между соприкасающимися телами, препятствующее их относительному движению.
- Сила трения относится к электромагнитному виду взаимодействия.

- **Трение** возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называют *внешним трением*, а трение между частями одного и того же сплошного тела (например жидкости или газа) называют *внутренним трением*.
- **Внешнее** (сухое) трение – трение между поверхностями твердых тел.
- **Внутренне** (вязкое) трение – трение между движущимися слоями жидкости или газа.

### Внешнее трение:

1. *Трение покоя;*
2. *Трение скольжения;*
3. *Трение качения.*

$$\vec{F}_{\text{тр. п}} = -\vec{F}_{\tau}$$

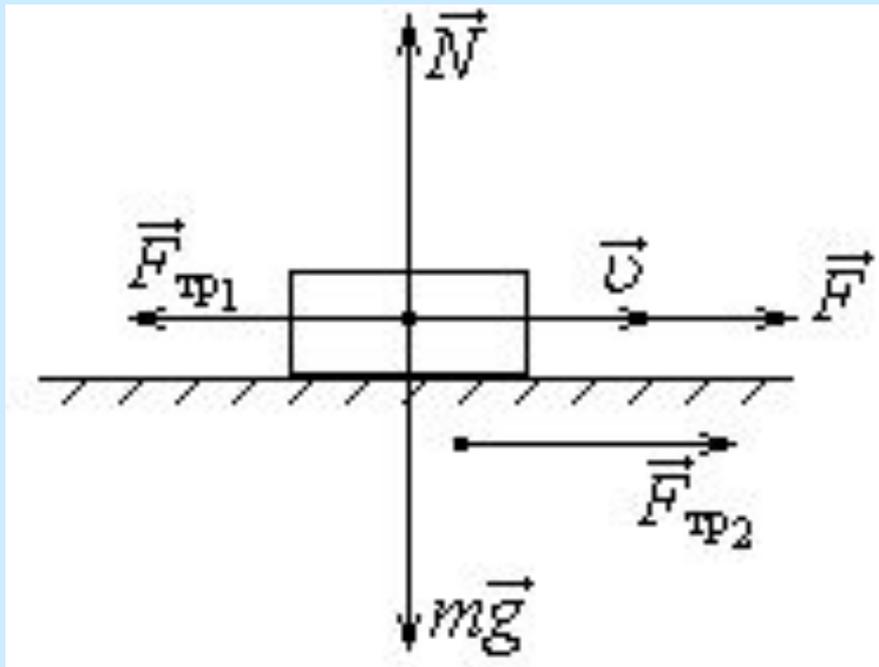


$F_{\text{тр. п}}$  - сила трения покоя.

$$[\mu_{\text{п}}] = 1$$

$$F_{\text{тр. п. max}} = \mu_{\text{п}} N$$

$\mu_{\text{п}}$  - коэффициент трения покоя



$$\vec{F}_{\text{тр}1} = -\vec{F}_{\text{тр}2}$$

Силы трения всегда возникают попарно.

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

- закон Амонтона-Кулона

$\mu$ - коэффициент трения скольжения  
[ $\mu$ ] = 1

Коэффициент трения зависит от материала соприкасающихся поверхностей, качества их обработки и физического состояния, но не зависит от их площади.

# **В. Гравитационные силы**

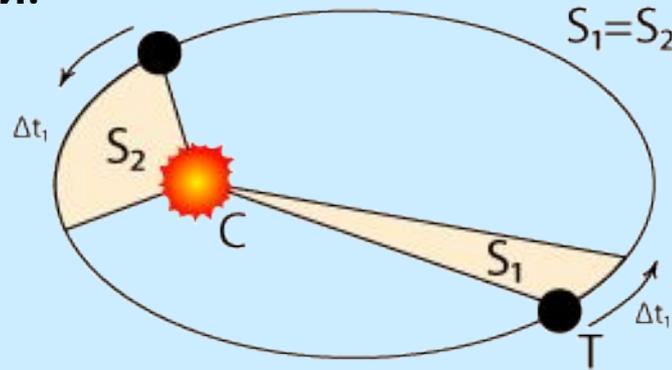
# Законы Кеплера

- **Первый закон Кеплера:**

Все планеты Солнечной системы обращаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

- **Второй закон Кеплера:**

Все планеты Солнечной системы движутся с постоянными секторными скоростями, т.е. радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.



- **Третий закон Кеплера:**

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

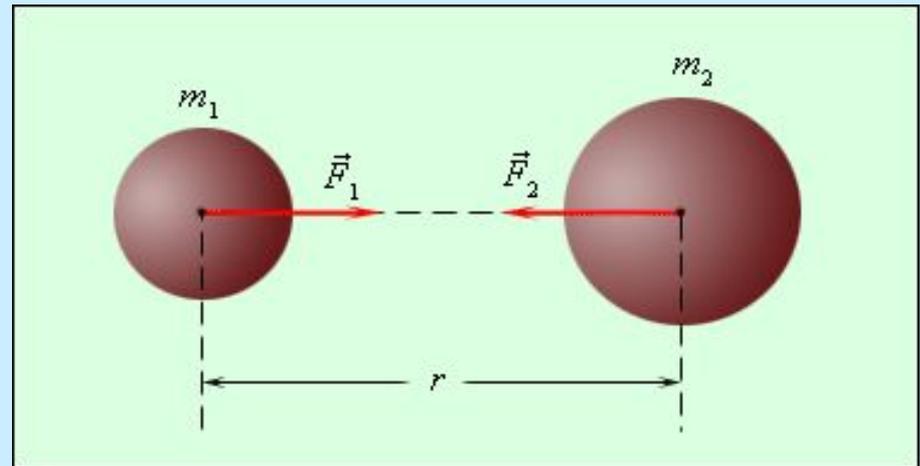
## Закон всемирного тяготения (1687 г.):

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{М}^2}{\text{КГ}^2}$$

- гравитационная постоянная

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$\underbrace{F}_{12} = - \underbrace{F}_{21}$$

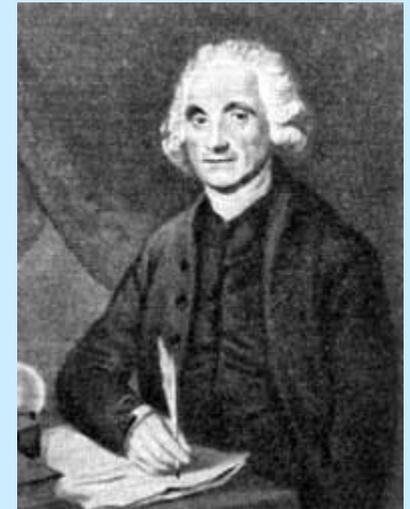
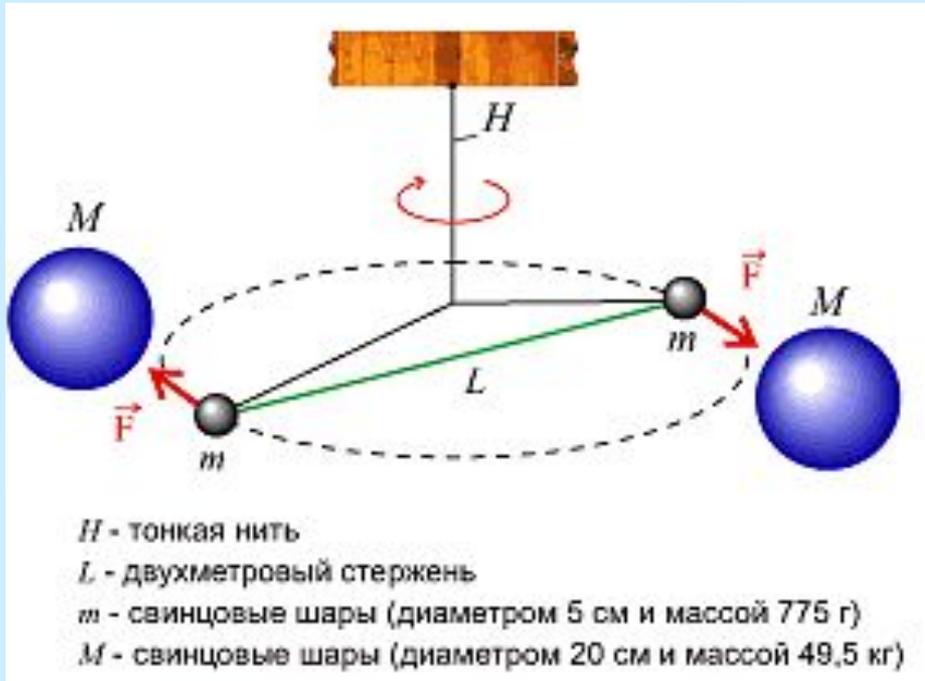


Границы применимости:

- для точечных масс.
- для удаленных тел
- для сферических тел с равномерным распределением плотности по слоям.

# Опыт Г. Кавендиша

- В опыте с крутильными весами (1798 г.) впервые была определена гравитационная постоянная



Генри  
Кавендиш  
(1731-1810)

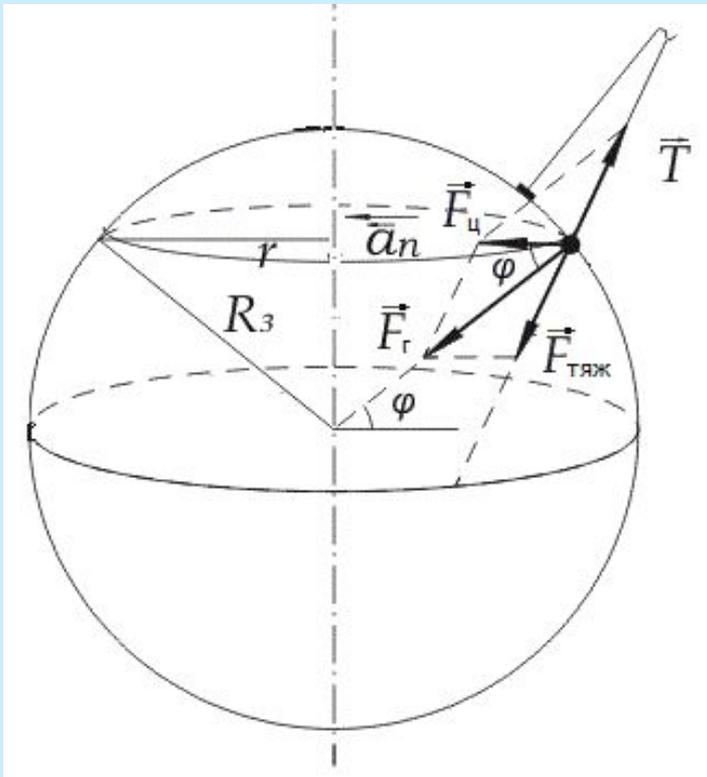
Кавендиш определил гравитационную постоянную:

$$\gamma = \frac{F \cdot r^2}{M m} = 6,65 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}}$$

# Сила тяжести

Сила тяжести  $\vec{F}_{\text{ТЯЖ}}$  тела – это отвесная составляющая силы земного тяготения, действующей на тело

$$\vec{F}_{\text{ТЯЖ}} = mg$$



$F_{\Gamma}$  - сила гравитационного притяжения  
 $T$  - сила натяжения нити  
 $\phi$  - географическая широта местности  
 По теореме косинусов

$$F_{\text{ТЯЖ}} = \sqrt{F_{\Gamma}^2 + F_{\text{ц}}^2 - 2F_{\Gamma}F_{\text{ц}}\cos\phi}$$

где  $F_{\text{ц}} = ma_n = m \frac{v^2}{r}$  - центробежная сила

- 1) полюс ( $\phi=90^\circ$ )  $F_{\text{ТЯЖ}} = F_{\Gamma}$
- 2) экватор ( $\phi=0^\circ$ )

$$F_{\text{ТЯЖ}} = F_{\Gamma} - \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} R_3$$

Максимальное различие между  $F_{\text{ТЯЖ}}$  и  $F_{\Gamma}$  не превышает 0,3%  $\Rightarrow$  Будем считать  $F_{\text{ТЯЖ}} \approx F_{\Gamma}$

# Ускорение свободного падения

Пусть тело находится на поверхности Земли ( $r = R_3$ ):

$$F = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2} \quad F = ma$$

$$ma = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2}$$

$$g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} = 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$$

- ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$g_h = \gamma \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$$

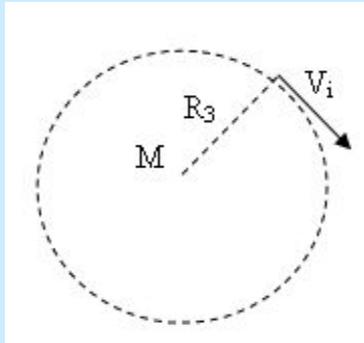
- ускорение свободного падения на высоте  $h$  над поверхностью Земли

$g$  ЗАВИСИТ ОТ:

- 1) высоты
- 2) географической широты
- 3) залегания горных пород

# Космические скорости

- Первая космическая (эллиптическая) скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли.



$$F = \gamma \frac{mM}{R_3^2}$$

$$F = ma_n = m \frac{v_1^2}{R_3}$$

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{gR_3}$$

- первая космическая скорость

$$v_1 \approx 7,9 \text{ км/с}$$

- Вторая космическая (параболическая) скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло пределы Земли и стало спутником Солнца.

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2} \quad - \text{ЗСЭ}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM_3}{R_3} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R_3}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_3 R_3}{R_3^2}} = \left| g = \frac{\gamma M_3}{R_3^2} \right| = \sqrt{2gR_3} = \sqrt{2}v_1 \quad v_2 = 11,2 \text{ км/с}$$

- Третья космическая скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы.

$$v_3 = 16,7 \text{ км/с, если тело запускать по ходу орбитального движения Земли}$$

# Гравитационное поле

- По современным представлениям любое силовое взаимодействие передается с помощью поля.
- Гравитационное взаимодействие осуществляется гравитационным полем.

$$\vec{E}_\gamma = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

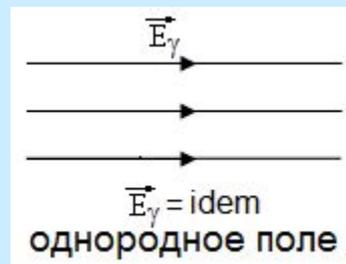
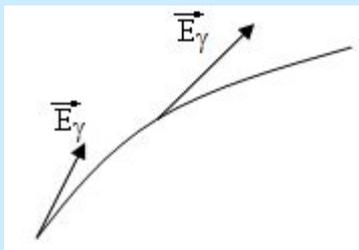
- напряженность гравитационного поля

$$\vec{E}_\gamma \approx \vec{g}$$

$$\Phi_\gamma = \frac{W_p}{m} = -\gamma \frac{M}{r}$$

- потенциал гравитационного поля

**Силовая линия поля** – это линия, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной к ней.

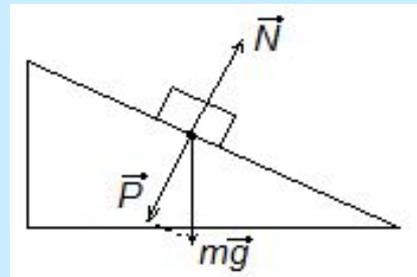


Что такое ГРАВИТОН?

# Г. Вес тела. Сила реакции опоры

- **Вес**  $\vec{P}$  **тела** – сила, с которой тело давит на опору или натягивает подвес вследствие гравитационного притяжения к Земле.
- **Нормальная реакция**  $\vec{N}$  **опоры** – сила, с которой опора действует на тело в направлении, перпендикулярном к поверхности соприкосновения тела и опоры.

Вес тела и сила реакции опоры равны по третьему закону Ньютона  $\vec{P} := -\vec{N}$



В современной науке **вес** и **масса** – совершенно разные понятия: масса является неотъемлемым свойством тела, а вес – результат действия силы тяжести на опору.

Во многих повседневных ситуациях слово «вес» продолжает использоваться, когда фактически речь идет о «массе».

$$[m] = 1 \text{ кг}$$

$$[P] = 1 \text{ Н}$$

## **5. Центр масс.**

# **Закон сохранения импульса**

**Центр масс механической системы** – это точка масса которой равна массе системы, а радиус вектор задается уравнением:

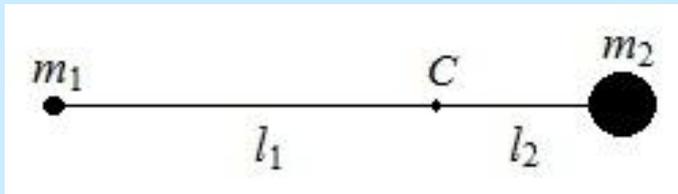
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

или в скалярной форме системой трех уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{array} \right.$$

**Центром масс** или **центром системы материальных точек** называется точка  $C$  радиус-вектор которой равен отношению суммы произведений масс всех материальных точек системы на их радиусы векторы к массе всей системы.

Вокруг центра масс уплотнилась бы механическая система, если бы силы гравитационного притяжения возросли до бесконечности.



$$m_2 > m_1 \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

**Замкнутая механическая система** – система, на которую не действуют внешние силы.

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

**Квазизамкнутая механическая система** – система, на которую действуют скомпенсированные внешние силы.

$$\vec{F}_i \neq 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

**Незамкнутая механическая система** – система, на которую действуют не скомпенсированные внешние силы.

$$\vec{F}_i \neq 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \neq 0$$

Продифференцируем радиус-вектор центра масс и найдем скорость ее движения:

$$\dot{\vec{r}}_C = \dot{\vec{v}}_C = \frac{d \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right)}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{M}$$

$$M \dot{\vec{v}}_C = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

$$\boxed{\dot{\vec{p}}_C = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i} \text{ - теорема о движении центра масс}$$

Центр масс механической системы движется как точка, масса которой равна массе всей системы. Импульс системы равен импульсу центра ее масс.

# Закон сохранения импульса (ЗСИ)

$$m\mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \qquad d(m\mathbf{v}_c) = d\left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n d(m_i \mathbf{v}_i)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_c)}{dt} \quad \text{- Закон движения центра масс}$$

$$d(m\mathbf{v}_c) = \mathbf{F} dt \quad \mathbf{F} dt \text{ - импульс силы}$$

Если система замкнута, то  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$ , тогда:

$$d(m\mathbf{v}_c) = 0$$

$$m\mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const}} \quad \text{- закон сохранения импульса}$$

## Закон сохранения импульса:

импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени:

Геометрическая сумма импульсов тел замкнутой механической системы не изменяется.

# СИЛА И ИМПУЛЬС

❖ Запишем второй закон Ньютона

❖  $F = ma$        $a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow F = \frac{mv - mv_0}{t}$

$$Ft = mv - mv_0$$

$p = mv$  – импульс тела после взаимодействия

$p_0 = mv_0$  – импульс тела до взаимодействия

$I = Ft$  – импульс силы

$$F \cdot t = p - p_0$$

- Хотя ЗСИ получен с помощью законов динамики, он не является их следствием.
- Все законы сохранения являются универсальными, т.е. выполняются и в макромире и в микромире.
- Согласно **теореме Эмми Нётер (1918 г.)** каждому свойству симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения.
- **Закон сохранения импульса** – следствие **однородности пространства**.



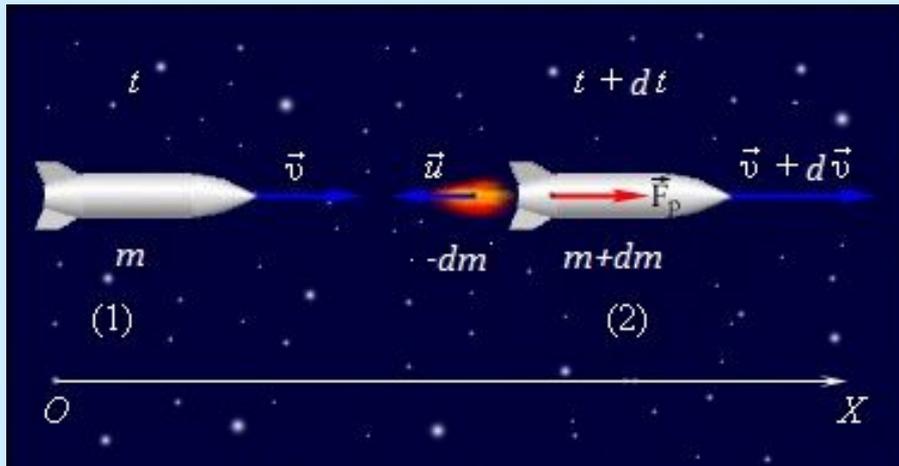
Амалия Эмми Нётер  
(1882-1935)

**6. Реактивное движение.  
Уравнение Мещерского.  
Формула Циолковского**

# Уравнение Мещерского

- **Реактивное движение** - движение тела, при котором от него отделяется (присоединяется) некоторая его часть.

Рассмотрим движение ракеты:



В момент времени  $t$ :

$m$  – масса ракеты,  
 $u$  – скорость ракеты,

В момент времени  $t + dt$ :

$m + dm$  – масса ракеты,  
 $u + du$  – скорость ракеты,  
 $-dm$  – масса выброшенных газов  
( $dm < 0$ ),

$u$  – скорость истечения газов  
относительно ИСО

Используем второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}dt$$

где

$\vec{p}_0$  - импульс системы в начальный момент времени  $t$ ,

$\vec{p}$  - импульс системы в момент времени  $t + dt$ .

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm\vec{u}) - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

$$m\vec{v} + md\vec{v} + dm \cdot \vec{v} + dm \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{u} - m\vec{v} = \vec{F}dt \quad \left| \cdot \frac{d}{dt} \right.$$

$$dm \cdot d\vec{v} \rightarrow 0$$

$$\frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v})$$

$\vec{V} = \vec{u} - \vec{v}$  - скорость истечения газов относительно ракеты.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{V} \quad \text{- уравнение Мещерского}$$

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dm}{dt} \vec{V} \quad \text{- реактивная сила}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{реакт}}$$



Иван  
Всеволодович  
Мещерский  
(1859-1935)

# Формула Циолковского

Пусть система замкнута  $\vec{F} = 0$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{V}$$

В проекциях на направление движения:

$$m \frac{dv}{dt} = -V \frac{dm}{dt} \quad (dm < 0)$$

Разделим переменные:  $dv = -V \frac{dm}{m}$

$$\int_0^v dv = -V \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

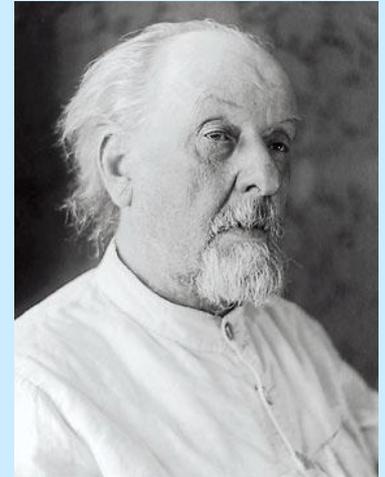
$$v = V \ln \frac{m_0}{m}$$

- формула Циолковского

где  $m_0$  – стартовая масса ракеты (вместе с топливом);

$m = m_0 - m_{\text{топ}}$  – полезная масса (масса ракеты без топлива).

Пусть  $V \approx 1$  км/с,  $u = u_1 = 7,9$  км/с  $\Rightarrow \frac{m_0}{m} = 2697$



Константин  
Эдуардович  
Циолковский  
(1857-1935)