Көп айнымалылар функциясы

Биостатистика және ғылыми зерттеу негіздері кафедрасының аға оқытушы Раманқұлова Алима Абдрамбекқызы

Дәріс жоспары

1. Көп айнымалылар функциясы туралы ұғым.
2. Екі айнымалылар функциясының шегі және үзіліссіздігі
3. Дербес туындылар.
4. Дербес және толық дифференциалдар.
5. Екі айнымалы функциясының экстремумдары.
6. Тұйық аймақта функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Көп айнымалылар функциясы туралы ұғым

АНЫҚТАМА. Айталық, *X, У, Z* қандай да бір сандар жиындары берілсін. Егер $x \in X$, $y \in У$ айнымалы шамаларының мәні бола алатын әрбір (x, y) сандар жұбына белгілі бір заң бойынша $z \in Z$ айнымалысының бірғана мәні сәйкес келсе, онда *z* айнымалы *x* және *y екі айнымалы функция* деп аталады да $z=f(x, y)$ түрінде жазылады.

z санын *f* функциясының (x, y) нүктесіндегі мәні деп те атайды.

z айнымалысын тәуелді айнымалы, *x* және *y* айнымалыларын тәуелсіз айнымалылар немесе аргументтер деп атайды; $\{(x; y)\}$ жиыны- функцияның анықталу облысы, ал *Z* жиыны- функцияның мүмкін мәндер жиыны деп аталады.

ХОУ тікбұрышты координаталар жүйесінде әрбір (x, y) сандар жұбына бір ғана *М* нүктесі сәйкес келетін болғандықтан, екі айнымалылар функциясын *М* нүктесінің функциясы ретінде қарастыруға болады және орнына жазады. Бұл жағдайда функцияның анықталу облысы жазықтықтың қандай да бір нүктелер жиыны болып табылады.

Көп айнымалылар функциясы туралы ұғым

XOY тікбұрышты координаталар жүйесінде әрбір (x, y) сандар жұбына бір ғана *M* нүктесі сәйкес келетін болғандықтан, екі айнымалылар функциясын *M* нүктесінің функциясы ретінде қарастыруға болады және $Z = f(x, y)$ орнына $Z = f(M)$ жазады. Бұл жағдайда функцияның анықталу облысы жазықтықтың қандай да бір нүктелер жиыны болып табылады.

Мысал. $Z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ - екі айнымалының функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, яғни

$x^2 + y^2 \leq 9$ болғанда анықталады. Бұл теңсіздікті радиусы $R=3$, центрі координаталар бас нүктесі болатын дөңгелектің ішінде және шекарасында жатқан барлық нүктелердің координаталары қанағаттандырады. Сондай-ақ, дөңгелектің өзі де функцияның анықталу облысы болып табылады.

Жоғарыда келтірілген анықтамаға ұқсас $u = f(x, y, z)$ үш айнымалылар, $u = f(x, y, z, t)$ төрт айнымалылар және сол сияқты, жалпы алғанда $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n айнымалылар функцияларының анықтамасын беруге болады.

Екі айнымалылар функциясының шегі және үзіліссіздігі

Айталық, $Z = f(M)$ функциясы қандай да бір $\{M\}$ жиынында анықталған болсын және $M_0 \in \{M\}$ нүктесінің кез келген δ−аймағында $\{M\}$ жиынының ең болмағанда бір нүктесі бар болсын.

1-АНЫҚТАМА: Егер $Z = f(M)$ функциясы M_0 нүктесінің аймағында анықталған және $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\exists \delta > 0$ $|M_0 M| < \delta$, болғанда $|f(M) - A| < \varepsilon$ қатынасы орындалатын болса, онда А саны $f(x, y)$ функциясының M_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады және ол мына түрде жазылады: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$

немесе $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

2-АНЫҚТАМА: Егер $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ немесе $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ болса, онда $Z = f(M)$ функциясы M_0 *нүктесінде үзіліссіз* деп аталады.

Дербес туындылар

Айталық $Z = f(M)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінің қайсыбір аймағында анықталған болсын. M нуктесінде x айнымалысына Δx өсімшесін берейік, ал y айнымалысының мәні өзгерусіз қалсын. Онда функцияның сәйкес өсімшесі

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

функцияның $M(x, y)$ нүктесіндегі x айнымалысы бойынша *дербес өсімшесі* деп аталады.

Сол сиякты функцияның y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі анықталады: $\Delta_y Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$

АНЫҚТАМА: Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x Z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y Z}{\Delta y} \right)$ шегі бар болса, онда ол $Z = f(M)$ функциясының M нүктесіндегі x айнымалысы бойынша (y айнымалысы бойынша) алынған *дербес туындысы* деп аталады және $Z'_x, f'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial Z}{\partial x} \left(Z'_y, f'_y, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial Z}{\partial y} \right)$ символдарының бірімен белгіленеді.

Дербес дифференциалдар

АНЫҚТАМА: $Z = f(x, y)$ функциясының

$$\Delta_x Z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \ (\Delta_y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y))$$

дербес өсімшесінің Δx-қа қатысты (Δy-ке қатысты) пропорционал бас бөлігі осы функцияның x айнымалысы (y айнымалысы) бойынша *дербес дифференциалы* деп аталады.

x және y айнымалы шамаларының дифференциалдары олардың өсімшелеріне тең, яғни $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Дербес дифференциалдарды былай белгілейміз:

$d_x Z$ – x бойынша дербес дифференциал,

$d_y Z$ – y бойынша дербес дифференциал және

$$d_x Z = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx$$

$$d_y Z = \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy$$

Сонымен екі айнымалы функцияның дербес дифференциалы осы функцияның сәйкес дербес туындысы мен айнымалысының дифференциалының көбейтіндісіне тең.

Толық өсімше және толық дифференциал

$Z = f(x, y)$ функциясының екі аргументінің де өзгеруі бойынша алынған өсімшесі $\Delta Z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$ толық өсімше деп аталады.

АНЫҚТАМА: $Z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесінің айнымалылардың өсімшелеріне қарасты сызықты бас бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталады.

Теорема. Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы оның дербес дифференциалдарының қосындысына тең.

$$dZ = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \quad \text{немесе} \quad dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$$

Ал $\frac{\partial Z}{\partial x}dx = d_x Z$ және $\frac{\partial Z}{\partial y}dy = d_y Z$ болғандықтан $dZ = d_x Z + d_y Z$

Мысал. $Z = 3a \cdot xy - x^3 - y^3$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Функцияның дербес дифференциалын x бойынша табамыз:

$$d_x Z = \frac{\partial Z}{\partial x}dx = (3a \cdot xy - x^3 - y^3)'_x \cdot dx = (3a \cdot y - 3x^2)dx$$

$$d_y Z = \frac{\partial Z}{\partial y}dy = (3a \cdot xy - x^3 - y^3)'_y \cdot dy = (3a \cdot x - 3y^2)dy$$

$$d\ Z = (3a \cdot y - 3x^2)dx + (3a \cdot x - 3y^2)dy$$

Екі айнымалы функциясының экстремумдары

D аймағында кем дегенде екінші ретке дейінгі дербес туындылары бар $z = f(x;y)$функциясын қарастырайық. Аймақтан бір бекітілген нүкте алайық, $N_0(x_0;y_0) \in D$. Осы нүктенің $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ теңсіздігі орындалатындай белгілі бір аймағы бар болса, онда $N_0(x_0;y_0)$ нүктесі **локальдық максимум** нүктесі деп аталады. Ал сондай аймақта $f(x;y) > f(x_0;y_0)$ теңсіздігі орындалар болса, онда $N_0(x_0;y_0)$ - **локальдық минимум** болады. Максимум және минимум нүктелері локальдық экстремум нүктелері дейді. Оларды табу үшін функцияның дербес туындыларын нөлге теңейміз:

$$f'_x(x_0;y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0;y_0) = 0$$

Бұл теңдіктер локалдық экстремумның бар болуының қажетті шарттары болып табылады. Жүйенің шешулері функцияның **стационар нүктелері** болады. Оларға ең болмаса бір дербес туындысы жоқ болатын нүктелерді қоссақ, оларды **сыни нүктесі** дейді.

Қажетті шарт орындалған жағдайда да, кейбір сыни нүктелерде функцияның локалдық экстремумдары болмауы мүмкін. Экстремумның бар болуының жеткілікті шарты келесі теоремамен беріледі.

Теорема. Функцияның екінші дербес туындылары

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0) \qquad B = f''_{xy}(x_0; y_0) \qquad C = f''_{yy}(x_0; y_0)$$

болатындай $f(x; y)$ функциясының $(x_0; y_0)$ сыни нүктесі бар болса, онда:

1. егер $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$ болса, онда $(x_0; y_0)$ нүктесінде экстремум бар болып және $A < 0$ болғанда, $f(x_0; y_0) = f_{\max}$, ал $A > 0$ болғанда, $f(x_0; y_0) = f_{\min}$ болады;

2. егер $\Delta = AC - B^2 < 0$ болса, онда $(x_0; y_0)$ нүктесінде локалдық экстремум жоқ.

3. $\Delta = 0$ болса, онда локалдық экстремум туралы ештеңе айта алмаймыз. Қосымша зерттеулер қажет.

Мысал. $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ функциясының экстремумдарын табыңыз.

Шешуі: Мұнда $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$

Теңдеулер жүйесін $\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$

шешіп, функцияның стационар нүктелерін анықтаймыз: $M_1(6;3)$, $M_2(0;0)$.

Берілген фукцияның екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$z''_{xx} = 6y - 6x,\quad z''_{xy} = 6x,\quad z''_{yy} = -12y^2$$

$M_1(6;3)$ нүктесінде $A = -18,\ B = 36,\ C = -108$ тең болады.

Бұдан $AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648$, яғни $\Delta > 0$.

$A < 0$ болғандықтан M_1 нүктесінде функцияның локалдық максимумы бар:

$$z_{max} = z(6;3) - 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$$

Ал, $M_2(0;0)$ нүктесінде $A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ болып, $\Delta = 0$ болады.

Бұл жағдайда қосымша зерттеулер жасаймыз. M_2 нүктесінде функция мәні $z(0;0) = 0$ тең. $x = 0,\ y \neq 0$ болғанда, $z = -y^4 < 0$, ал $x \neq 0,\ y = 0$ болғанда, $z = -x^3 > 0$. Сонымен $M_2(0;0)$ нүктесінің аймағында функциясы теріс те, оң мәндер қабылдайды. Олай болса, M_2 нүктесінде функция экстремумы жок

Тұйық аймақта функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Тұйық D аймағында $z = f(x; y)$ үздіксіз функциясы, осы аймақтың кейбір нүктелерінде ең үлкен, ең кіші мәндерін қабылдайды делік. Мұны функцияның глобалдық экстремумдары деп атайды. Сонымен берілген функция тұйық D аймағында үздіксіз болса, онда осы аймақта (ішінде немесе шекарасында)

$$f(x_1; y_1) = f_{\min}, \quad f(x_2; y_2) = f_{\max}$$

болатын $(x_1; y_1)$ және $(x_2; y_2)$ нүктелері табылады.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу ережесі:

1. Берілген функцияның дербес туындыларын тауып сыни нүктелерін анықтаймыз. Осы нүктелердегі функция мәндерін табамыз;
2. Аймақ шекарасындағы нүктелердегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз;
3. Бүкіл табылған функция мәндерін салыстыра отырып, ең үлкен және ең кіші мәндерін таңдап алмыз.

Әдебиет:

- И.В. Павлушков и др. Основы высшей математики и математической статистики. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов)., М., 2003 г.
- В.С. Шипачев. Курс высшей математики. М., Проспект. 2004 г.
- И.И. Баврин, В.Л. Матросов. Высшая математика. М., ВЛАДОС.2002г.
- Ю. Морозов. Основы высшей математики для мед. вузов. М., 2000 г.

Назарларыңызға рахмет.