

Дифференциалдық теңдеулер

**Медициналық биофизика, информатика және
математикалық статистика кафедрасының доценті
Аймаханова Айзат Шалхаровна**

Дәріс жоспары:

- Бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешімдер.
- Айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі.
- Бір текті дифференциалдық теңдеу.
- Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Лагранж әдісі. Бернуллі әдісі.
- Медициналық – биологиялық есептерге дифференциалдық теңдеулер құру.

Дифференциалдық теңдеу деп x тәуелсіз айнымалыны, y ізделінді функцияны және оның әртүрлі ретті туындыларын байланыстыратын өрнекті айтады.

Дифференциалдық теңдеудің құрамына кіретін туындылардың ең жоғары реті сол теңдеудің реті деп аталады.

Егер y ізделінді функциясы бір айнымалыға тәуелді болса, онда д.т. қарапайым дифференциалдық теңдеу деп аталады.

n-ші ретті дифференциалдық
теңдеулер :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

***n*- дифференциалдық теңдеудің реті**

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \quad , y^{(n-1)}\right)$$

Жоғары туындыға қатысты шешілген д.т.

Дифференциалдық теңдеудің шешімі деп сол теңдеуге қойғанда оны теңбе-теңдікке айналдыратын $y=y(x)$ функциясын айтады.

Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу есебі берілген дифференциалдық теңдеуді интегралдау есебі деп аталады.

Дифференциалдық теңдеудің шешімінің графигі *интегралдық қисық* деп аталады.

n -ші ретті д.т. жалпы және дербес шешімдері

$y = \phi(x, C_1, \dots, C_n)$, - *жалпы шешім*,
мұндағы $C_1, \dots, C_n$ кез келген тұрақты
сандар.

$C_1, \dots, C_n$ нақты бір сандық мәндеріндегі
шешім *дербес шешім* деп аталады.

1-ші ретті қарапайым
дифференциалдық теңдеу:

$$F(x, y, y') = 0$$

*x – тәуелсіз айнымалы; y - ізделінді функция;
 y' - функция туындысы.*

$$y' = f(x, y)$$

**туындыға қатысты шешілетін бірінші
ретті д.т.**

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

немесе
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y) = 0$$

мұндағы $f(x), M(x), P(x)$ – x айнымалысының
қандай да бір функциясы;
 $g(y), N(y), Q(y)$ – y айнымалысының функциясы.

Шешу жолы:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$y = \varphi(x, C)$$

- жалпы шешім.

Коши есебі

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

бастапқы шартын
қанағаттандыратын $y' = f(x, y)$
теңдеуінің дербес шешімін табу
есебі **Коши есебі** деп аталады.

Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Егер x және y айнымалылары бойынша ноль өлшемді біртекті функция болатын болса, онда бірінші ретті дифференциалдық теңдеу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

біртекті теңдеу деп аталады.

Біртекті теңдеудің шешуі. Шарт бойынша

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Онда теңдеу төмендегі түрге ие болады:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, y/x\right).$$

Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{немесе} \quad y = u \cdot x \quad \text{алмастыруын жасаймыз.}$$

Соңғы теңдікті дифференциалдап, табатынымыз:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

y және $\frac{dy}{dx}$ -тің мәндерін берілген теңдеуге қойып,

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u)$$

теңдеуіне ие боламыз. Бұл айнымалылары бөлінетін теңдеу:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{немесе} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Интегралдап табамыз:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \quad \text{немесе} \quad \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (1)$$

мұндағы $p(x)$ и $f(x)$ — үздіксіз функциялар,

*Егер $f(x) = 0$, онда $y' + p(x)y = 0$
біртекті сызықты д.т.*

*Егер $f(x) \neq 0$, онда $y' + p(x)y = f(x)$,
біртекті сызықты емес д.т.*

СЫЗЫҚТЫ БІРТЕКТІ Д.Т. шешу әдісі

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|$$

Біртекті сызықты емес д.т. шешу әдістері

$$y' + p(x)y = f(x)$$

- Тұрақтыны вариациялау әдісі
(Лагранж әдісі)
- Бернулли әдісі

Тұрақтыны вариациялау әдісі

1. С.б.емес д.т. жалпы шешімін адымдап табу әдісі.
2. Жалпы шешімнің формуласы:

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

Тұрақтыны вариациялау әдісі

Бұл әдіс үш этаптан тұрады.

$$A) \quad \frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 = 0$$

сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімін анықтаймыз.

$$\frac{dy_0}{y_0} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy_0}{y_0} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y_0 = -\int P(x)dx + \ln C,$$

$$y_0 = C \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Тұрақтыны вариациялау әдісі

В) теңдеудің дербес шешімін табу үшін C x айнымалының функциясы болсын да, бұл жерде белгісіз функция. Яғни, $C=C(x)$.

$$\left(C(x)e^{-\int P(x)dx} \right)' + P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx} \right) = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx} \right) + P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx} \right) = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad dC = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

$$C = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1$$

С) $C(x)$ функциясының табылған мәнін $y_0 = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ теңдікке қойып, табамыз:

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right) e^{-\int P(x)dx} \quad (*)$$

(*) - бірінші ретті сызықтық бір текті емес теңдеудің жалпы шешімі.

Бернулли әдісі

С.б. емес д.т. шешімі мына түрде
ізделінеді

$$y = u \cdot v$$

мұндағы $u = u(x)$ және $v = v(x)$ -
белгісіз функциялар.

Бернулли теңдеуі

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық.

Егер $n = 0$ немесе $n = 1$ болатын болса, онда сызықтық дифференциалдық теңдеуге ие боламыз. Сондықтан $n \neq 0$ және $n \neq 1$ жағдайда қарастырамыз.

Бұл теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады және $z = y^{1-n}$ алмастыруы арқылы сызықтық дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Ол үшін теңдеудің екі жағын да y^n бөліп: (1) теңдеуін аламыз.

$$z = y^{1-n} \quad (2) \quad y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

алмастыруын жасаймыз.

(2) теңдікті дифференциалдап, табамыз:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}. \quad (3)$$

z және $\frac{dz}{dx}$ -тің мәндерін (1) теңдеуге қойып, төмендегі сызықтық дифференциалдық теңдеуге ие боламыз:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \quad (4)$$

Бұл теңдеудің жалпы интегралын тауып және z -ті y^{1-n} арқылы алмастырып, Бернулли теңдеуінің жалпы интегралын табамыз.

Кейбір жаратылыстану
есептеріне д.т. құру:

Бактериялардың көбею жылдамдығы жөніндегі есеп

Бактериялардың көбею жылдамдығы олардың санына пропорционал. Бастапқы мезетте 100 бактерия болды, ал 3 сағ. Ішінде олардың саны екі есе артты. Бактериялар санының уақытқа тәуелділігін табу керек. 9сағ. ішінде бактериялар саны неше есе артады?

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Химиялық реакцияларды сипаттайтын д.т.:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) \quad - \text{бірінші текті х.р.}$$

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \quad - \text{екінші текті х.р.}$$

Радиоактивті ыдырау жөніндегі есеп

Радийдің ыдырау жылдамдығы уақыттың әрбір мезетінде оның бар массасына пропорционал. Бастапқы мезетте m_0 г радийдің болғаны және радийдің жартылай ыдырау кезеңі (радийдің жарты массасының ыдырайтын уақыт кезеңі) 1590 жыл екендігі белгілі болса, онда радийдің ыдырау заңын табу керек.

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

Дененің тоңазуы жөніндегі есеп

Дененің ауада тоңазу жылдамдығы дене температурасы мен ауа температурасының айырмасына пропорционал. Ауа температурасы 20^0 С тең. 20 мин. ішінде дененің 100 ден 60^0 С. дейін тоңазитыны белгілі болса, дене температурасының t уақытқа тәуелді өзгеру заңын табу керек.

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 20),$$

Әдебиет:

ҚАЗАҚ ТІЛІНДЕ

- **Изтлеуов М.К., Беккужина А.И., Жалимбетова Н.К., Ахметова А.Б. Математика: Жоғары медицина оқу орындарына арналған оқулық. Полиграфия, 2005г.**
- **Қасымов К., Қасымов Е. Жоғары математика курсы. Оқу құралы.-Алматы: Санат, 1997.**

ОРЫС ТІЛІНДЕ

- **И.В. Павлушков и др. Основы высшей математики и математической статистики. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов)., М., 2003 г.**
- **В.С. Шипачев. Курс высшей математики. М., Проспект. 2004 г.**
- **И.И. Баврин, В.Л. Матросов. Высшая математика. М., ВЛАДОС.2002г.**
- **Ю. Морозов. Основы высшей математики для мед. вузов. М., 2000 г.**

Назарларыңызға рахмет