Случайные величины

С*лучайной величиной* называется переменная величина,
которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение.

Имеют место два типа случайных величин — дискретные и непрерывные.

Мы будем рассматривать:
Дискретные случайные величины.

Рассмотрим случайную величину ξ , возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Пусть задана функция $p(x)$, значение которой в каждой точке $x=x_i$ $(i=1,2, \ldots)$ равно вероятности $p(x_i) = P(\xi = x_i)$ того, что величина ξ примет значение x_i.

Такая случайная величина ξ называется *дискретной (прерывной)*.
Функция $p(x)$ называется *законом распределения вероятностей случайной величины*, или кратко, *законом распределения*. Эта функция определена в точках последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n,$

Так как в каждом из испытаний случайная величина ξ

принимает всегда какое-либо значение из области ее изменения, то

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) + \ldots = 1$$

Это условие называют условием нормирования, которое может служить проверкой правильности вычисления закона распределения

Пример случайная величина

— число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Возможные значения ξ

— числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При этом вероятность того, что она примет любое из этих значений, одна и та же и равна 1/6. Какой будет закон распределения ?

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.**

Основные числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения или плотность вероятности) полностью описывают поведение случайной величины. Но в ряде задач достаточно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный вопрос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическое ожидание.

- **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \,.$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Математическое ожидание называют иногда ***взвешенным средним***, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание Математическое ожидание дискретной случайной величины есть ***неслучайная*** (постоянная) величина.

Пример 1. Найдем математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для $\boldsymbol{X}$. Из условия задачи следует, что $\boldsymbol{X}$ может принимать значения 1, 2, 3.

$$p(1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15},\ p(2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},\ p(3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

Тогда

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{7}{15}+3\cdot\frac{7}{15}=2{,}4.$$

Дисперсия.

- Для того, чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание. Рассмотрим две случайные величины: ***X*** и ***Y***, заданные рядами распределения вида

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	100
p	0,5	0,5

Найдем

$M(X) = 49 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,8 + 51 \cdot 0,1 = 50$, $M(Y) = 0 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 50$

Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для $\boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$ хорошо описывает поведение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения $\boldsymbol{Y}$ существенно отстоят от $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Y})$. Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}))^2.$$

Найдем дисперсию случайной величины ***X*** (числа стандартных деталей среди отобранных) в Примере 1. Вычислим значения квадрата отклонения каждого возможного значения от математического ожидания:

$(1 - 2{,}4)^2 = 1{,}96$; $(2 - 2{,}4)^2 = 0{,}16$; $(3 - 2{,}4)^2 = 0{,}36$. Следовательно,

$$D(X) = 1{,}96 \cdot \frac{1}{15} + 0{,}16 \cdot \frac{7}{15} + 0{,}36 \cdot \frac{7}{15} = \frac{28}{75} \approx 0{,}373.$$

Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}^2) - \boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{X}).$$

Пример. Вычислим дисперсии случайных величин $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, рассмотренных в начале этого раздела.

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = (49^2 \cdot 0{,}1 + 50^2 \cdot 0{,}8 + 51^2 \cdot 0{,}1) - 50^2 = 2500{,}2 - 2500 = 0{,}2.$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}) = (0^2 \cdot 0{,}5 + 100^2 \cdot 0{,}5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$

Итак, дисперсия второй случайной величины в несколько тысяч раз больше дисперсии первой. Таким образом, даже не зная законов распределения этих величин, по известным значениям дисперсии мы можем утверждать, что $\boldsymbol{X}$ мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для $\boldsymbol{Y}$ это отклонение весьма существенно.

Среднее квадратическое отклонение

- Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением (одной размерности с математическим ожиданием).
- **Средним квадратическим отклонением** σ случайной величины ***X*** называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Пример. В предыдущем примере средние квадратические отклонения ***X*** и ***Y*** равны соответственно

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447; \quad \sigma_y = \sqrt{2500} = 50.$$