

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7.1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Первообразной называют такую функцию $F(x)$, по отношению к которой исходная функция $f(x)$ является производной, т.е. $f(x) = F'(x)$.

Например, для функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ первообразной будет

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, точнее, *семейство* первообразных $F(x) + C$, где C —

произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C \right)' = 2x^2 - 3x.$$

Переход $f(x) \rightarrow [F(x) + C]$ есть *операция интегрирования* функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Методы интегрирования

Метод разложения.

$$\int f(x) dx \Rightarrow \begin{array}{l} \text{представляется в виде} \\ \text{сумма табличных интегралов} \end{array}$$

Метод подстановки
(замены переменной)

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Метод интегрирования по частям

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

Примеры

Метод разложения

$$\int (x^2 + 7x - 5) dx = \int x^2 dx + \int 7x dx - \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

$$\text{Проверка.} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C \right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{14x}{2} - 5 = x^2 + 7x - 5.$$

Метод подстановки (замены переменной)

Найти $\int (4x - 3)^2 dx$.

Введем новую переменную, положив $u = 4x - 3$,

$$du = (4x - 3)' dx = 4 dx, \quad dx = \frac{du}{4}.$$

Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^2 du = \frac{1}{4} \frac{u^3}{3} + C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4} \frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x - 3)^3}{12} + C.$$

Интегрирование по частям

Требуется найти интеграл $\int x e^x dx$.

Положим

$$U = x, dV = e^x dx. \text{ Тогда } dU = dx, V = e^x$$

и

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Проверка. $(x e^x - e^x + C)' = x e^x + e^x - e^x = x e^x$.

Упражнения. Найти:

а) $x^6 dx$; б) $\int (x - x^3) dx$; в) $\int x^2(x^2 + 3) dx$; г) $\int \sin 7x dx$;

д) $\int \cos(3x + 7) dx$; е) $\int x \ln x dx$ (принять $U = \ln x$).

7.2. Определенный интеграл

Интеграл можно определить как предел интегральных сумм.

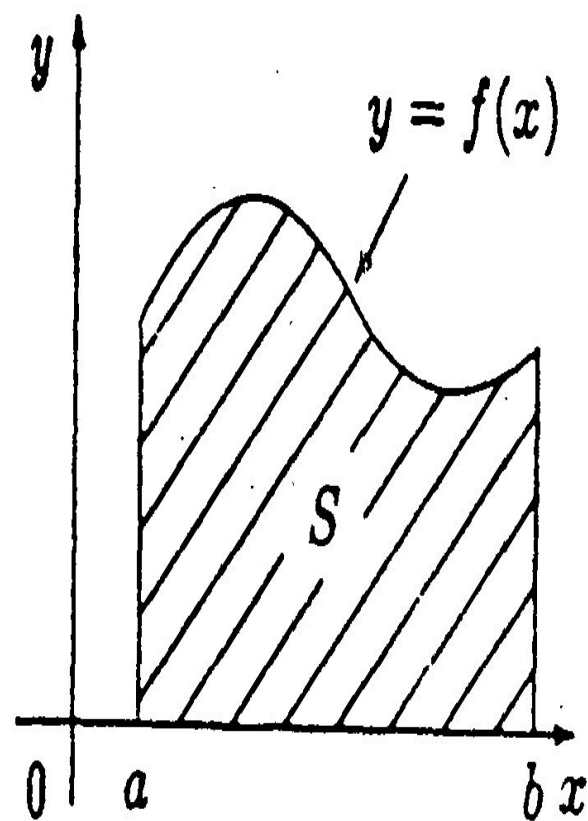
Определенный интеграл функции $f(x)$ на
отрезке $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S$$

С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять самые различные величины.

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$, т.е. (формула Ньютона—Лейбница)

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



*Геометрический смысл
определенного интеграла*

Примеры. Вычислить:

$$\text{а) } \int_1^2 x^2 dx; \quad \text{б) } \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$\text{а) } \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{б) } \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 \sqrt{2x} dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^8 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = \frac{16^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{3}{4} 8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{100}{3}.$$

Упражнение. Найти числа, получающиеся при использовании

в интеграле $\int_1^2 f(x) dx$ следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \frac{3}{8}.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \sin x$ и осью абсцисс, если $x \in [0, \pi]$.

Для ответа на поставленный вопрос следует вычислить определенный интеграл

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -((-1) - 1) = 2 \text{ ед.}^2.$$

Пример. Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \sin x \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \cos 0\right) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Здесь

$$U = x, \quad dU = dx, \quad dV = \sin x \, dx, \quad V = -\cos x.$$