Раздел V. Дифференциальное исчисление

- Определение производной
- Геометрический и механический смысл производной
- Дифференциал функции. Основные правила дифференцирования
- Таблица производных элементарных функций

Насырова Р.Т.

Определение производной

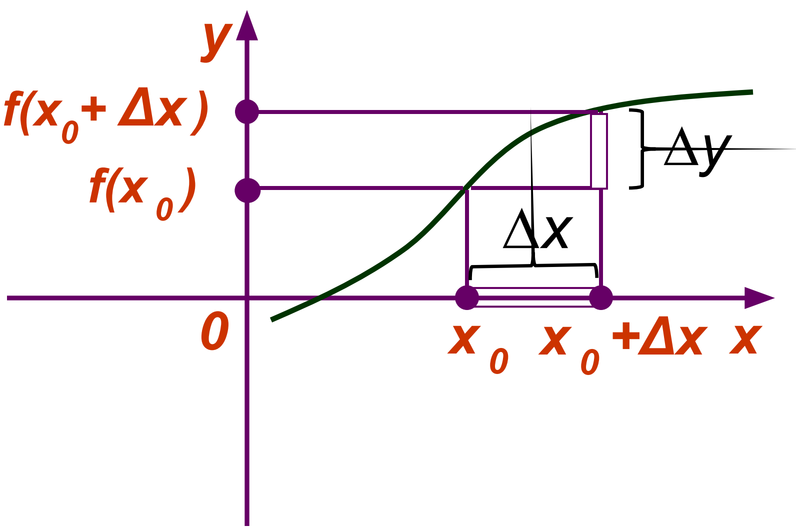
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некотором интервале ***(a; b)***.

Аргументу ***x*** придадим некоторое приращение Δx:

$$x_0 + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции ***y = f(x)*** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx в этой точке при $\Delta x \to 0$.

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

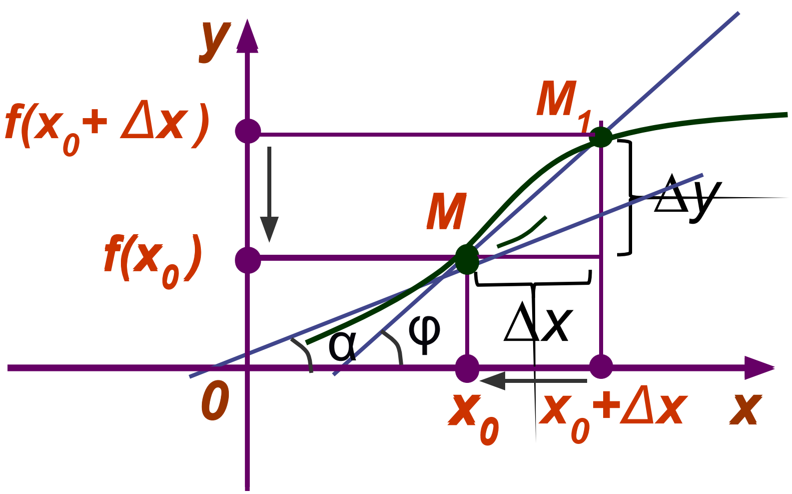
Значение производно функции ***y = f(x)*** в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой – либо физический процесс, то ***f '(x)*** есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой две точки ***M*** и ***M₁***:



Через точки ***M*** и ***M₁*** проведем секущую и обозначим через ***φ*** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка ***M₁*** неограниченно приближается по кривой к точке ***M***, а секущая ***MM₁*** переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{} = tg\alpha = k = y'$$

Производная ***f '(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

y'

Если точка касания ***M*** имеет координаты ***(x₀; y₀)***, угловой коэффициент касательной есть ***k = f '(x₀)***.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

Уравнение касательной

Уравнение нормали

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** к кривой.

$f'(x_0)$

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Механический смысл производной

Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси. При этом задан закон движения точки: координата x движущейся точки – это известная функция времени x(t).

В течение интервала времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ точка перемещается на расстояние $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$

Средняя скорость точки v_a находится по формуле: $v_a=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

При $\Delta t\to 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая в физике называется **мгновенной скоростью** $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0.

Следовательно, для мгновенной скорости можно записать формулу

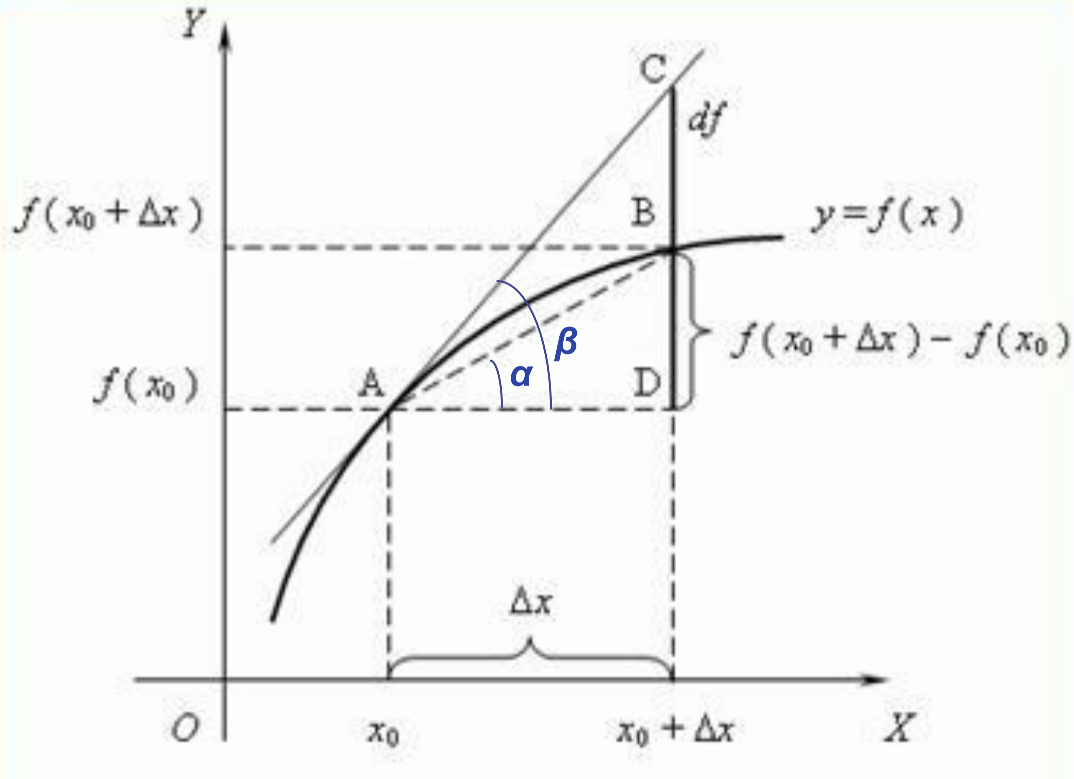
$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=x'(t_0)}$$

Если сравнить эту формулу с формулой производной, то можно сделать вывод, что **скорость – это производная координаты по времени** $\boxed{v(t_0)=x'(t_0)}$

Дифференциал функции

Дифференциал функции *– это произведение производной $f'(x_0)$ и приращения аргумента Δx*

$$\boxed{df = f'(x_0)*\Delta x}$$



Здесь $df = CD$.

Из ΔACD можно записать

$$CD = AD * tg\beta$$

где β – угол наклона касательной AC к оси OX.

Но если $\Delta x \to 0$, то $\beta \to \alpha$.

Дифференциал CD равен сумме отрезков BC и BD (приращение функции).

Но, если $\Delta x \to 0$, то и отрезок $BC \to 0$

Значит, дифференциал отличается от производной на бесконечно малую величину.

Таблица производных простейших элементарных функций

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
18. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
19. $(\operatorname{th} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правила дифференцирования

Пусть ***u(x)*** , ***v(x)*** и ***w(x)*** – дифференцируемые в некотором интервале ***(a; b)*** функции, ***C*** – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$

Правила дифференцирования

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u + v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

   $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctg u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctg u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Производная сложной функции

Пусть ***y = f(u)*** и ***u = φ(x)*** , тогда ***y = f(φ(x))*** – сложная функция с промежуточным аргументом ***u*** и независимым аргументом ***x.***

Теорема

Если функция ***u = φ(x)*** имеет производную u'_x в точке ***x*** а функция ***y = f(u)*** имеет производную y'_u в соответствующей точке ***u*** , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Формирование подгрупп происходит по методу жеребьёвки

Группа БТПп-15-21

Даётся 2 минуты на распределение обязанностей внутри подгруппы

Подгруппа 1 | Подгруппа 2 | Подгруппа 3 | Подгруппа 4

Координатор (1)

- Распределяет задания, данные в пакете, внутри своей подгруппы между всеми участниками
- Отвечает сам на контрольные вопросы

Аналитик (1)

- Анализирует работу каждого участника своей подгруппы
- Выставляет каждому очки (от 0 до 10) в соответствии с критериями оценивания

Критик (1)

- Анализирует работу каждого участника соседней подгруппы (1 у 2, 2 у 3, 3 у 4, 4 у 1)
- Выставляет каждому очки (от 0 до 10) в соответствии с критериями оценивания

Исполнитель (5)

- Изучает содержимое теоретической части пакета
- Выполняют данную координатором работу для последующего ее представления проверяющим с учётом требований